高等学校教学用書



泛函分析講义

关肇直 編

高等教育出版社

本書是泛函分析的入門讀物。主要介紹了巴拿赫空間与希尔伯特空間的理論，也涉及一些半群、黎斯空間。本書与一般泛函分析入門書不同之处在于內容比較多面，并注意介紹問題研究的现况及最近文献，也有时提出些啓發性問題。書中并附有适当的練習題。可作为綜合大学数学系泛函分析專門化方面的教学用書或参考書。

泛函分析講义

关肇直 編

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

京华印書局印刷　新华書店發行

統一書号13010·499　開本850×1168 1/32　印張20 15/16

字數554,000　印數0001—2,000　定價（8）¥2.30

1958年9月第1版　1958年9月北京第1次印刷

（另精1,000册）

序

这个講义是在1956—1957两个学年中国科学院数学研究所与北京大学数学力学系泛函分析專門化用的講稿基础上編成的。1956年度来到数学研究所的大学畢業生除个别外根本未学过泛函分析的基础知識，因此必須为他們补充这种知識，以便走上研究的道路。当时，我們采取的方式是这样的：由泛函分析組中原来担任导师的几位同志——田方增同志、馮康同志和我拟出計划与提綱，由青年同志們按照提綱自己編写講稿、自己在討論班上报告，其中有些部分是我們三人动手写的。这是这份講义的前身。1957年秋季，在北京大学設立泛函分析專門化，四年級的泛函分析概要課程由我担任。为此，在数学研究所的講稿基础上，重新改写。一方面是把不同的同志分别写的加以系統化，名詞与符号加以統一，等等；另一方面編排与証明也改变得很多。特别我們注意在这一門基础課中也尽可能提出一些思考問題，举出有关的最新文献。当然，在这样一个基础課中，所能接触的还不一定是泛函分析目前發展主流中的問題，其中往往是培养思考时很容易提出的問題，它們的解决也往往不一定需要特殊的工具，也正是如此，把它們摆在这一基础教程中才有意义；特别可以为学年論文与畢業論文提供一些綫索。

泛函分析概要的書籍，用各种文字写的，目前已經有很多了。我們所以仍願自己編一种，因为覺得别的本子用来总感不便。經典性著作：

Banach, S.: Théorie des opérations linéaires, (1932) 富有啓發性，但不适于初学，而且材料只限于 Banach 空間，不够全面，內容方面也有很多有了新进展。

Люстерник, Л. А.-Соболев, В. И.: 泛函数分析概要，有汉譯本，而且从其內容看也适合于作教材用，但我們覺得材料过少，作为專門化課程似乎不够，面也稍窄。

Колмогоров, А. Н.-Фомин, С. В.: 函数論与泛函分析初步是一部書的第一分册，这一分册內容不多，后面的几册还未出版，暫时無法采用。

Riesz, F. et Sz. Nagy, B.: Leçons d'analyse fonctionnelle 是写得非常好的書，但内容偏重 Hilbert 空間，关于 Banach 空間的部分太少。

Hille, E.: Functional analysis and semi-groups, (1948) 內容丰富，但主要是为了講半群，一般泛函分析方面写得很略，有时只有提綱，証明有时沒有，在初学时很不便。

A. C. Zaanen: Linear analysis,(1953)中关于 Banach 空間的材料不算少，但对于 Hilbert 空間理論則很少，同时，积分方程方面的材料很細，用作通論的入門課程，似嫌过偏。

G. Marinescu: Spaţii vectoriale normate,(1956)一書取材較新，配上 C. T. Ionescu Tulcea: Spaţii Hilbert,(1956)材料比較齐全，也大致和本書相仿，但因系罗馬尼亞文，国內讀者参考不方便。

吉田耕作：綫型作用素材料很好，但只講 Banach 空間，后来这本書又發展成吉田耕作：位相解析 I，材料較全面，成为本講义的主要藍本。这本書以三百余頁的篇幅介紹了 Banach 空間理論中的全部主要內容，Hilbert 空間綫性算子譜理論以及半群与 Riesz 空間的概要，的确是一本很好的書。但这本書写得較略，初学者閱讀会感到困难。本書的編写，是企圖彙采以上各家之長，內容力求比較不太偏，証明力求清晰，便于初学。为此，內容有很多部分取自吉田耕作的位相解析 I，但証明或加改写，或虽基本上采取了吉田耕作的，却在說明上改得更詳細，使初学者讀起来不致遭遇重大困难。此外，在提出思考問題与現代文献方面，是与上述各書不同之处。我們也搜集了一些習題，其中一部分是取自一些論文中的較初等部分，希望初学者重視这些習題，通过它們培养思考能力并复習書中內容。書中还注意从偏微分方程与概率論

中采取一些例，使讀者能及早注意泛函分析的应用。初学者如对于偏微分方程与概率論沒有足够預备知識，也可以在初学时略过这些例。在本書的开始，有一段历史概述，企圖使讀者了解泛函分析这一学科誕生的过程，了解它不是單純人为的任意創造，而是由于研究各种問題的必要性产生的。此外在某些章的前面又介紹了有关部分的更詳細历史發展。

由于在書中用到測度的地方不少，我們在本書中加上一个附录，企圖以最快的方式介紹測度論的基础知識。如果讀过 Halmos 的測度論，就可以直接讀本書而略去这个附录。这一附录不算作本書的有机整体中的部分，从而在符号上沒有力求与本書正文的一致，以免增添不必要的煩复。

在数学研究所使用时还有拓扑空間方面的准备知識，后面也相应有一些利用拓扑空間知識的部分(如弱拓扑、自反性等)，在北京大学講授时，由于这一学年时間較紧，把这些都删掉，原計划的下学期講的拓扑空間与拓扑綫性空間理論，改成一个独立課程，內容就不在本講义中包括了。

本書第一章介紹关于距离空間的准备知識。第二章講 Banach 空間，大抵相当于上述 Marinescu 的書的內容。这里也包括了作为 Banach 空間的特例的 Hilbert 空間初等理論(§4)。第三章講 Hilbert 空間綫性算子譜理論。第四章是半群的簡單介紹。第五章是 Riesz 空間(半序綫性空間)与 M. Г. Крейн 的凸錐理論。

由于本書是个講义，体裁也是講义式的，即按定义、定理、証明等一一列出，而把一些应喚起讀者注意的地方用"注"补足，从而不是用一气呵成的文体。

在使用的符号方面，有必要略加說明。根据泛函分析是代数、几何与分析的綜合这一特点，我們使用的符号是多方面的，特别其中涉及集論(集的并与交等)、代数运算(加減乘等)、分析(極限等)中的各种符

号，因此，为了避免混淆，必须严加区别。为此，我們用 $\cup$，$\cap$，$\setminus$ 表示集的并、交、差、而把 $+$, Σ; $\cdot$, Π; $-$ 等保留作为代数运算之用。我們一般用希腊字母表示实数或虚数，但用 n, m, p, q 等表示整数，用罗馬字母 a, b, c, x, y, z, u, v 等表示空間中的元，用 $x(t)$ 表示函数；而不用平常的符号 $f(x)$，把 f 留作定义在空間上的泛函数之用。我們也有时为了減少文字的書写，用符号

$$\{x \mid P\}$$

表示滿足命題 P 規定的性質的那些元 x 的全体，用 $\longrightarrow$ 表示蘊涵，用 $\exists$ 表示存在等。关于符号的詳細說明，請見本書最后的附表。

这份講义本来不是很成熟的，后来有些同志認为为了促进国内泛函分析的發展，尽快出版我国人自己編著的，适合我国人使用的基本讀物，还是有迫切需要的。因此把出版的日子提前了。后来，在全国各項事業大躍进的形势下，我們数学研究所泛函分析組的全体同志也鼓足干勁，希望用多快好省的方法多作出些有益的事来。因此，經过大家的討論，决定把这本講义提前整理出版，把定稿作为全組同志向今年七一党的生日及中国共产党中国科学院机关第二届代表大会的献礼的一个項目。我們也得到高等教育出版社的热情支持，社里的同志願意接受作为突击任务，赶在今年十月一日前出版，作为出版社和泛函分析組兩方面全体同志的国庆节献礼項目之一。我們希望这一微薄的礼物对于国內讀者有些裨益，但特别希望使用的同志多提批評和意見，以便在有必要再版时修改得好些。

关肇直

1958年7月1日

目　录

历史概述

泛函分析是数学中形成較晚的一个分支;它在20世紀初开始形成,直到本世紀三十年代才正式成为独立学科①。它是在19世紀数学蓬勃發展,积累了大量的成果的基础上生長起来的。簡單地說,在19世紀数学物理的許多問題研究中,提出了数学新方法与新概念,而19世紀上半叶群論与非欧几里得几何学的發現分别在代数学与几何学中引起了巨大变革;泛函分析就是在这样基础上誕生的。

泛函分析的某些基本概念可以远溯到微积分学的發現,因为微分(即求微商)乃是作用在函数上的运算,而定积分則是对应于函数的数值,换句話說,用現代的語言,微分乃是作用在可微分函数上的算子,而定积分乃是定义在可积分函数类上的泛函数。但是在那时,这些情况并不可能引起人們的注意。对于泛函分析有影响的工作,最早屬于 Daniel Bernoulli(1700—1784)。他在研究弦索振动問題时,首先用 n 个質点的力学系統代替連續的弦索,考慮这个質点系統的振动,然后令 $n\to\infty$,而推出关于弦索振动的結果。对于 n 个質点系統的振动,問題化成綫性变換的固有值問題,而由此令 $n\to\infty$,可以求出"固有振动"的頻率。同时,D. Bernoulli 由物理想法發現了所謂"叠合原理":即弦索所引起的声音由基音和無穷多个較弱的泛音合成,从而想出,弦索振动由它的不同部分的無穷多振动合成,即弦的形狀由与各不相同的泛音相应的正弦曲綫合成,这些正弦曲綫的周期与自然数成反比地遞減:

$$y=\alpha\sin\frac{\pi x}{a}+\beta\sin\frac{2\pi x}{a}+\gamma\sin\frac{3\pi x}{a}+\cdots,$$

于是他發現了在数学物理中具有基本意义的原理。这一方面引起后来

① 例如在 Zentralblatt für Mathematik 中,从1932年才开始把泛函分析列为一个独立項目,足以說明这一点。

受到長时期研究的問題：即一个任意給定的函数是否可以展成三角級数的問題。其他的"直交函数"展开也在同时或更早發現：例如球函数、Legendre 多項式，$(e^{i\lambda_n x})$（λ_n 不是同一数的整数倍），这些都是在 18 世紀与振动問題联系着引入的。Fourier, Poisson 在热理論中也引入这种展开。到了 1830, Ch. Sturm(1803—1855)与 J. Liouville(1809—1882)系統化了这些研究，建立了一般的振动理論（一个变量的）。他考察了如下形狀的微分方程的边界值問題：

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dx}{dt}\right)+\lambda\rho(t)x(t)=0,\ p(t)>0, \rho(t)>0, \tag{1}$$

$$\begin{cases} x'(a)-\gamma_1 x(a)=0,\ \gamma_1\geqslant 0,\ \gamma_2\geqslant 0, \\ x'(b)+\gamma_2 x(b)=0,\ a<b. \end{cases} \tag{2}$$

他們得出了如下的結果：

1°. 上述边界值問題除了对于 λ 的一串值(λ_n)外沒有非零解，这里 $\lambda_n>0, \lambda_n\to+\infty$；

2°. 对于每个 λ_n，解是一个确定的函数 $x_n(t)$的倍，因此無妨"規格化"，使

$$\int_a^b \rho(t)(x_n(t))^2\,dt=1,$$

这时

$$\int_a^b \rho(t)x_n(t)x_m(t)\,dt=0 \qquad (m\neq n).$$

3°. $[a, b]$ 上凡二阶可微分并滿足边界条件(2)的函数 $u(t)$必可展成一致收斂的無穷級数

$$u(t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n(t),$$

这里

$$a_n=\int_a^b \rho(t)u(t)x_n(t)dt;$$

4°. 对于上述展开式，有等式

$$\int_a^b \rho(t)(u(t))^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2.$$

这与上面所提到的具 n 个自由度 $\xi_p(1\leqslant p\leqslant n)$ 的体系的振动問題的类似是值得注意的。这种体系的振动由一組 n 个一次代数方程

$$\sum_{q=1}^{n} k_{pq}\xi_q - \lambda\xi_p = \eta_p, \quad k_{pq} = k_{qp}, \tag{3}$$

决定，

$$Q(x) = \sum_{p,q=1}^{n} k_{pq}\xi_p\xi_q \qquad (x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n))$$

表示体系的势能，而固有振动由相应的齐次方程决定(即令 $\eta_p=0$)。这个齐次方程組恰具 n 个綫性無关解 $x_p=(\xi_1^{(p)}, \cdots, \xi_n^{(p)})(1\leqslant p\leqslant n)$, 各相应于 n 个(其中可能有重出的)固有值 $\lambda_p(1\leqslant p\leqslant n)$, λ_p 都是 n 次方程

$$\det(k_{pq} - \lambda\delta_{pq}) = 0$$

的根，这里 δ_{pq} 即 Kronecker 符号

$$\delta_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } p=q, \\ 0 & \text{如果 } p\neq q, \end{cases}$$

$\det(\alpha_{pq})$ 表示由陣(α_{pq})作的行列式。(3)的解按平常 Cramer 法則表示出来，都是 λ 的有理函数。諸矢量 $x_1, \cdots, x_n$ 形成 n 个規格化直交矢的組：

$$\sum_{p=1}^{n} \xi_k^{(p)}\xi_j^{(p)} = \delta_{kj}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(p)}\xi_k^{(q)} = \delta_{pq}. \tag{4}$$

利用上面第二等式，，可以写成

$$\xi_p = \sum_{k=1}^{n} \xi_p^{(k)} \left(\sum_{q=1}^{n} \xi_q^{(k)}\xi_q \right),$$

这与上面弦索振动中 3° 的無穷展开相仿，而(4)与上面的 2°相仿。上面的 4° 相应于平常矢量長的等式：

$$\sum_{p=1}^{n} \xi_p^2 = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{q=1}^{n} \xi_q^{(k)} \xi_q \Big)^2.$$

这里的相应使由矢量 $x=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 与 $x_k=(\xi_1^{(k)}, \cdots, \xi_n^{(k)})$ 作的"积"

$$(x, x_k) \equiv \sum_{q=1}^{n} \xi_q \xi_q^{(k)}$$

与由函数 $u(t)$ 及 $x_n(t)$ 作的积分

$$(u, x_k) \equiv \int_a^b \rho(t) u(t) x_k(t) dt$$

对应。

在上述 Sturm, Liouville 的工作約半世紀之后，J. P. Gram 繼續 Чебышев 的研究，看出了上述"直交展开"(3°)与平均最佳逼近的关系。所謂平均最佳逼近的問題，乃是对已知函数 $x(t)$ 求巳知函数 $(x_n(t))$ 的綫性組合 $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k$，使

$$\int_a^b \rho(t) [x(t) - \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(t)]^2 dt$$

达到它的極小値。Gram 利用了"直交化法"解这一問題；实际上，这問题的有穷維类似，按上述，乃是求巳知矢量 $x_1, \cdots, x_k$ 的綫性組合 $\Sigma a_i x_i$，使它离巳知矢量 x 最近；直观上可以想到，只須取 x 在由 $x_1, \cdots, x_k$ 張成的綫性子空間中的直交投影，而为了求这一投影，最好把 $x_1, \cdots, x_k$ 直

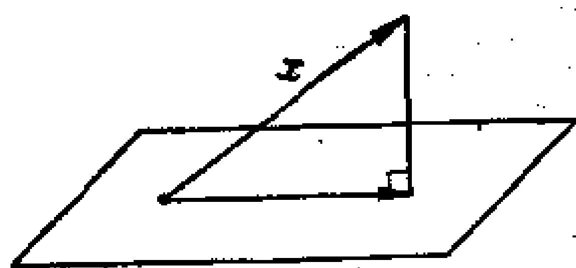


圖 1.

交化，即把 $x_1, \cdots, x_k$ 换成另一个直交組，这組与 $x_1, \cdots, x_k$ 張成相同的綫性子空間。Gram 把这想法推到上述無穷組 (x_i) 的情形。对于每个自然数 n，作 $x_1, \cdots, x_k$ 的綫性組合 $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$，相应的最佳逼近是

$$\mu_k = \int_a^b \rho(t)[x(t) - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i(t)]^2 dt.$$

Gram 考虑了是否 $\mu_k \to 0 (k \to \infty)$ 的問題，于是他定义完全直交規格化組(即确使 $\mu_k \to 0$ 并滿足上述条件 2) 的組$(x_n(t))$)的概念，并証明了这完全性与下列性質的等价性：不存在非零函数 $y(t)$，与一切 $x_n(t)$"直交"：

$$\int_a^b \rho(t) y(t) x_n(t) dt = 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

但由于当时 Lebesgue 測度的理論尙未出現，虽然 Gram 也看出在上述討論中不必假定 $x(t)$ 連續，重要的只是性質

$$\int_a^b \rho(t)(x(t))^2 dt < +\infty,$$

他并未能把理論更推进。

19 世紀后半，数学物理研究的需要使得要考察偏微分方程的边界值問題。当时工作着眼于把 Sturm-Liouville 理論推广到多变量的場合。例如考察振动膜的問題：求方程

$$L_\lambda u \equiv \Delta u + \lambda u = 0, \qquad \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

的解 u，使 u 在一适当規則的区域 G 的边界 S 上取値 0。利用变分法的考虑，这个边界值問題等价于下列極值問題：求一在 $G \cup S$ 中連續的函数，使它在 G 中具連續一阶导函数及片段連續的二阶导函数，在 S 上取 0 值，并使

$$\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]ds\,dt \tag{5}$$

达到極小值(物理意义乃是求振动膜的平衡位置)。Riemann 曾用所謂 Dirichlet 原理解这問題(实际上，Gauss(1839)、Thomson(1847) 与 Dirichlet(1856) 都用过这种方法)：他認为，(5)中的式既 $\geqslant 0$, 它有下界，从而必在一适当的 u_0 处达到極小值。Weierstrass 指出这一証明的毛病，卽对于無穷集来說，有下界的集不必有極小。于是当时的数学家必須另覓途徑。Weierstrass 曾教他的学生 H. A. Schwarz 詳細研究 Riemann 的存在証明，并另求新証。Schwarz 利用了 Poisson 公式証明了边界为圓的情形，并引入 Green 函数的概念。后来 Schwarz 又証明了問題的最小固有值(基音)存在。1894 年 H. Poincaré 証明一切固有值的存在，并証明，对于已知的函数 $b=b(s,t)$, 方程 $L_\lambda u=b$ 的在边界 S 上取 0 值的解 u_λ 是复变量 λ 的半純函数，这函数只具單的实極点 λ_n, 而 λ_n 正是所求的固有值，相应的殘量卽相应固有函数。如果 λ 不是固有值，方程 $L_\lambda u=b$ 对于任意已知函数 b 有一意解。这与解析几何学中主軸問題(卽二次曲綫經过主軸变換化成标准形的問題)是非常类似的。

A. Beer 在 1856 年考虑場位理論的边界值問題时引出一个第二类綫性积分方程

$$x(s)-\int_a^b K(s,t)x(t)dt=y(t). \tag{6}$$

他实質上用了所謂叠代法解这一方程:

$$x_0(s)=y(s),\quad x_n(s)=y(s)+\int_a^b K(s,t)x_{n-1}(t)dt,$$

但未考虑这叠代程序的收斂。C. Neumann 在 1877 年补足了这一漏洞，發現这一程序并非不加条件卽可收斂的。H. Poincaré 在 1896 年

把上述对振动膜間題所用的方法用到这里来，并注意到与一次代数方程組

$$\xi_p - \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{n} k_{pq} \xi_q = \eta_p \qquad (1 \leqslant p \leqslant n) \tag{7}$$

情形的类似。这方程組(7)可以借用有穷和逼近定积分由积分方程(6)按下述規定得出:

$$\xi_p = x\left(a + \frac{p}{n}(b-a)\right), \qquad \eta_p = y\left(a + \frac{p}{n}(b-a)\right),$$

$$k_{pq} = K\left(a + \frac{p}{n}(b-a), \quad a + \frac{q}{n}(b-a)\right), \quad (1 \leqslant p, q \leqslant n),$$

这里核 $K(s, t)$既不一定是对称的，陣(k_{pq})也不一定是对称的，从而不象振动膜情形那样可以用二次齐式的固有值問題来处理，而是要依据一次代数方程組的一般求解法。Poincaré 引入参数 λ; 这里 λ 是"人为地"引入的，不象在振动問題中那样是由物理意义自然出現的。Poincaré 考慮了解 $x(s)$对 λ 的依賴性，这时 C. Neumann 的級数

$$x(s) = y(s) + \sum_{m=1}^{\infty} x_m(s),$$

$$x_0(s) = y(s), \ x_m(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) x_{m-1}(t) dt$$

成为在 $\lambda = 0$ 附近的冪級数，而这級数当 λ 足够小时是收斂的。Poincaré 得知解 $x(s)$是 λ 的半純函数，但沒有得出固有值 λ_n 存在的一般命題。4 年之后，Fredholm 在假定区間$[a, b]$有穷及核为連續的情形得到了完全的証明。他完全以积分方程(6)与代数方程組(7)的类似为指导思想，他直接用行列式求解，并把(6)的解表示成兩式的商，与解(7)的 Cramer 法則相仿，不象前人那样用特殊的工具与函数論方法。

在这些結果的基础上，D. Hilbert 对于具对称实連續核 $K(s, t) =$

$K(t,s)$的第二种綫性积分方程

$$x(s)-\lambda\int_a^b K(s,t)x(t)dt=y(s)$$

建立了更系統的理論。正如同 Fredholm 理論与一次代数方程組的求解問題的关系一样，Hilbert 的这个新理論类似綫性代数中的二次齐式直交变換理論，也就是解析几何中二次曲面的主軸問題。这一工作他在 1901—1902 年的討論班中講过，首先發表于 1904 年。他除对于以前那种由有穷过渡到無穷的極限过程給予精密的証明外，并得出基本定理

$$\int_a^b\int_a^b K(s,t)x(s)x(t)dsdt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left(\int_a^b x(s)x_n(s)ds\right)^2, \tag{8}$$

这与用直交变換把对称陣化成对角形的代数公式完全类似:

$$\sum_{p,q=1}^{n} k_{pq}\xi_p\xi_q=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\lambda_k^{(n)}}\left(\sum_{p=1}^{n}\xi_p^{(k)}\xi_p\right)^2.$$

在上面(8)中 λ_n 是 K 的(实)固有值，$x_n(t)$ 是相应的固有函数。这些$(x_n(t))$形成直交規格化組，而当

$$\int_a^b |x(s)|^2ds\leqslant 1$$

时，(8)的右边收斂。Hilbert 又証明凡可以表示成

$$u(s)=\int_a^b K(s,t)z(t)dt \tag{9}$$

的函数 $u(s)$($z(t)$是連續函数)可以展成級数

$$u(s)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n(s)\int_a^b x_n(t)u(t)dt, \tag{10}$$

并仿二次齐式的古典理論，也可以用变分方法定出諸 λ_n 来，这恰是二次曲面軸的極端值性質的推广①。Fredholm 对方程 (6) 的求解与 Hilbert 对固有值問題的新貢献都是以代数为模型的。值得注意按上述由(8)不仅可以証明一切固有值存在，并且可以对 Fourier 展开得出更确切的了解。更重要的，乃是 (8)的成立，并不受对称核$K(s, t)$与函数 $x(s)$ 的函数性質的限制。实际上，可以作出連續核及連續函数 $x(s)$，使 Fourier 級数(見 3°)發散。但凡能表示成(9)形式的函数必能展成(10)的形狀。

討論积分方程(6)时，原本考慮的只是連續函数。但一些討論使得有必要扩大所考察的函数类。如果核 $K(s, t)$ 是連續的，对于有穷固有值 λ，由

$$x(s)=\lambda\int_a^b K(s, t)x(t)dt$$

可知相应固有函数 $x(s)$ 連續。但如把 $\lambda=\infty$看成固有值，由方程

$$\int_a^b K(s, t)x(t)dt=0 \tag{11}$$

并不能推断 $x(t)$的連續性。实际上可以作出一个連續函数 $K(s, t)$，使沒有連續函数 $x(t)$滿足(11)，并且可以作出一个連續函数 $u(s)$来，使得找不到連續函数 $z(s)$滿足(9)②。于是与代数的类似受到破坏，因为在代数中，如果方程組

$$\sum_{q=1}^{n} k_{pq}\xi_q=0\quad(1\leqslant p\leqslant n)$$

沒有非零解，那末方程組

① 詳見 Courant-Hilbert[3]，第一、三章。

② 參看 Hellinger-Toeplitz[8]中的附注 434, 440。

$$\eta_p=\sum_{q=1}^{n}k_{pq}\xi_q(1\leqslant p\leqslant n)$$

对于任意($\eta_1, \cdots, \eta_n$)有解。于是必須越出連續函数的范圍。只添加具有簡單类型的不連續性的函数仍不够用，因为在上面提到的反例中可以作出核 $K(s, t)$，使(11)不具連續解，而且可以有任意預給的不連續函数 $x(t)$作为解，这个 $x(t)$可以只是平方按 Lebesgue 可积分的，因此所考察的函数类至少要包括这种函数，即函数类 L^2。这个函数类也是够用的。Hilbert 在發表他的固有值理論之前就曾在他的講演中，在更深刻地襯托出与代数的形式类比之下进一步發展了他的理論：他使用了可数無穷多变量的方程組的理論。这些結果發表在 1906 年。他对这种方程組的研究所作的决定性进展在于他最先認識出为了能获得与代数的定理更类似的結果必須假定那無穷多个变量滿足一定的收斂性条件。前面已經談到必須把所考察函数类扩張到 L^2。在此以前就使用过的 Буняковский–Schwarz 不等式

$$\left[\int_a^b x(s)y(s)ds\right]^2\leqslant\int_a^b(x(s))^2ds\cdot\int_a^b(y(s))^2ds \qquad (12)$$

也提供了一些綫索。E. Schmidt 在 1905 年的学位論文中把 Hilbert 的結果簡化，并按更一般的形式处理。这里他不使用 Fredholm 的行列式，也不用"从有穷到無穷"的程序，而使用近于抽象的处理，同时适用于代数主軸問題与积分方程。他本質上只用了积分的綫性与正性，使用的唯一特殊收斂工具乃是上面积分不等式(12)，并利用平方积分来作估值，从而很自然地想到用平方积分作估值的"量測"。另一方面，Hilbert 在無穷多变量的綫性方程与二次齐式的新理論中指出如何由此直接导出积分方程的求解与固有值理論。Hilbert 利用一个完全直交規格化組 $\{x_n(t)\}$ 作积分方程中未知函数的 Fourier 系数，从而把方程(6)化成等价的無穷方程組

$$\xi_p-\sum_{q=1}^{\infty}k_{pq}\xi_q=\beta_p(p=1,2,\cdots), \tag{13}$$

这里
$$\xi_p=\int_a^b x(t)x_p(t)dt,\ \beta_p=\int_a^b y(t)x_p(t)dt,$$

$$k_{pq}=\int_a^b\int_a^b K(s,t)x_p(s)x_q(t)ds\,dt.$$

在 1893 Ch. de la Vallée Poussin 就曾發現，对于連續函数 $x(s)$，有下列等式成立：

$$\sum \xi_p^2=\int_a^b (x(s))^2 ds.$$

在 Hilbert 理論中就設(13)中数列(ξ_p)滿足

$$\sum_{p=1}^{\infty}\xi_p^2<+\infty.$$

当时虽然尙未提出 Hilbert 空間这一名詞，实际上已是以現在的空間(l^2)作为理論的背景了。Hilbert 并对这种数列 $(\xi_p)\in(l^2)$考慮了兩种收斂，卽現在所謂强斂与弱斂，以及一个"选擇原理"，就是現在所謂 Hilbert 空間(l^2) 中單位球的弱列緊性。在他的新理論中，他把代数中的綫性算子(卽綫性变換)，綫性泛函数(卽綫性齐式)、双綫性齐式都按"連續性"分类，以适应分析問題的需要。他最初对無穷陣(k_{pq})假定

$$\sum_{p,q} k_{pq}^2<+\infty,$$

后来又放寬了条件，發現 Fredholm 的成功在于所謂"全連續性"，卽当 $x_n\to x$(弱)，$y_n\to y$(弱)时，$B(x,y)=\sum\limits_{p,q}k_{pq}\xi_p\eta_q(x=(\xi_p),y=(\eta_p))$滿足

下列条件:

$$B(x_n, y_n) \to B(x, y)$$

他还指出这一性質的另一等价条件:对于一切满足

$$\sum \xi_p^2 \leqslant 1, \ \sum \eta_p^2 \leqslant 1$$

的 $x = (\xi_p)$, $y = (\eta_p)$,收斂

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{p,q=1}^{n} k_{pq} \xi_p \eta_q = B(x, y)$$

是一致的。以上所考虑的只是具体的 Hilbert 空間,一般的 Hilbert 空間及其系統理論要等到抽象空間理論的成長才能建立,我們將在下面談到,Hilbert 的这些理論詳細地叙述在他的書 [10](1904—8)中。关于Hilbert 空間綫性算子理論,特别是譜理論的历史,將在本書第四章的引言中叙述,这里从略。

除积分方程理論外,泛函分析的另一个前身乃是变分学。早在 17 世紀末 18 世紀初,Johann Bernoulli 关于捷綫的貢献已經可以看成是泛函数的研究。在 19 世紀中关于偏微分方程边界值問題提供了函数依賴于函数(边界值的解依賴表边界值的函数)的例,这就是后来所謂的算子(不必是綫性)。其后,这方面为泛函分析开路的工作很大一部分屬于意大利学派。Pincherle 首先考察作用在函数 f 上的算子 T,他考虑的方式仍是"从有穷到無穷",即把 f 展成無穷級数,再把 Tf 看成系数的函数,而对这种無穷多变量的函数仍用有穷多变量的函数逼近,然后取極限。Volterra 則与 Fredholm 处理积分方程的方法相似,把所求的那条使所考的泛函数取極值的曲綫用有穷多个点近似,然后取極限。Volterra 在研究 Hamilton-Jacobi 理論中为泛函分析的發現提供了新的前提。实际上,在力学中所遇到的微分方程多是一个积分的極值問題的 Euler 方程。在一維情形,积分可以看成它的上积分限的函数。但在数理方程中所遇到的通常是多重积分,而多重积分必

須看成是积分区域的边界的泛函数，从而为了推广 Hamilton-Jacobi 理論，必須用依賴于边界的泛函数代替平常的函数。

同时，在处理Laplace方程的 Dirichlet 問題方面，在 C. Neumann, Schwarz, Poincaré 等人避免 Dirichlet 原理的工作之后，另一想法乃是仍回到 Dirichlet 原理，但要寻求前述的極小存在的严格証明。这种作法始自 Arzelá(1897)，而 1900 Hilbert 才給出完全且严謹的証明。后来發現 Dirichlet 原理的成功在于积分 J 是半連續泛函数，而列紧集上的有下界的下半連續泛函数必达到其極小値。Tonelli 于是把半連續性作为極值問題的基础，成为变分学中新方法的創始人。

Pincherle, Volterra 等人的工作多是联系着特殊問題的，并未深入地分析相关的拓扑概念，这是因为后者在 19 世紀末还未被明确。这要等待着 M. Fréchet 的广义分析学的建立。在这里我們必須提一下 19 世紀以来一般数学背景。除上述一些多半来自数学物理問題的推动外，19 世紀以来数学的进一步抽象化及公理化为泛函分析的誕生提供了理論基础。首先 19 世紀 30 年代非欧几里得几何学的出现大大扩充了数学中的空間概念，而群論的發現使得代数逐漸抽象化。19 世紀末至 20 世紀初 G. Cantor 建立了集論，并証明了欧几里得空間中点集的若干拓扑性質。19 世紀末 D. Hilbert 的几何学基础工作不仅为欧几里得几何学提供了眞正完整的公理系統，而且开辟了数学公理化这一新方向，使得数学作为研究现实世界中的量的关系的科学这一本質更加显示出来。这些事实为广义分析学的誕生准备了条件。Hilbert 在他对几何学基础的研究中已得出类似鄰域概念的几个条件。Zermelo 在变分学的研究中，由于求極值的需要，必須考虑一个函数“附近”的函数这一概念，于是引入函数的 0 阶鄰域与 1 阶鄰域的概念，后者意味着不仅一条曲綫的每点距給定曲綫的各相应点很近，而且这兩条曲綫的对应点处的切綫也很接近。这些考虑以及上述的种种都要求考虑不仅依賴于一个变量的另一变量——函数关系，而且要考虑依賴于曲綫的

函数（Volterra 的 fonction de lignes）及函数的函数（Funktionenfunktionen）。但 M. Fréchet 考虑一抽象变元的函数，这一抽象变元的性質不加确定，而为了能考虑函数的連續性——这在分析問題中总是重要的，必須規定抽象元的变域(泛函数的定义域)中有“远近”概念，或更确切地說，必須在这变域中規定拓扑結構。于是 M. Fréchet 在 1904 开始建立了广义分析，并与 F. Riesz 成为拓扑空間理論的創始人。Fréchet 引进了抽象的距离空間、距离空間的备性、列紧性、可分性等基本概念。在 Fréchet 与 F. Riesz 的影响下，E. Schmidt 与 M. Fréchet 引入(1907—1908)实及复的 Hilbert 空間中的几何概念：这里最早引入了范数这一名詞及符号$\|x\|$、三角形不等式、Hilbert 空間(l^2)的可分性与备性。Schmidt 証明了閉綫性集上投影的存在，并利用它来簡化了 Hilbert 的綫性方程組理論。1907 年 Fréchet 与 F. Riesz 証明了函数空間 L^2 也具有与 l^2 相同的几何性質，而再后几个月，Fischer 与 Riesz 証明了現在按他們兩人命名的定理，即建立了 L^2 与 l^2 的同构，显示了 Lebesgue 积分理論的深刻性。于是 Hilbert 空間的基本理論的要点已大体具备了。

除了 Hilbert 空間 l^2 与 L^2 之外，其他函数空間的研究也开始了。1903 年 Hadamard 由于变分学的需要已經研究了有窮区間$[a, b]$上一切連續函数所組成的空間 $C[a, b]$ 上的綫性連續泛函数的一般表現問題，得出这种泛函数必可表示成一串 $\int_a^b K_n(t)x(t)dt$ 的極限。1909 年 F. Riesz 用 Stieltjes 积分完全解决了 Hadamard 这一問題，并实际使这一理論成为現代积分論的出發点。1907 年 Fréchet, F. Riesz 也对 l^2 解决了連續綫性泛函数的一般形式問題。1910 年 F. Riesz 研究了空間$L^p(a, b)(1<p<\infty)$，即一切 p 次冪可积分的可測函数集，三年之后又研究了空間 $l^p(1<p<+\infty)$。这些研究大大有助于显示出对偶性，因为他在这里第一次提出了不自然同構的兩个空間互相对偶。F. Ri-

esz 在 1918 所發表的 Fredholm 理論的新处理，不但把 Fredholm 理論抽象化，而且除詳細研究了 $C[a, b]$ 外，实际上在他的叙述中并未应用 $C[a, b]$ 的特殊性質，而只用了一般 Banach 空間的一些性質。这篇論文也最早一般地定义了全連續綫性算子(映有界集成列紧集)，并把整个 Frédholm 理論归結在一个重要定理之上：卽局部列紧賦范綫性空間必是有穷維的。

到了 1920—22 年，S. Banach, H. Hahn, E. Helly, N. Wiener 引入了賦范綫性空間的一般定义。在上述問題中，共同的对象是函数集，而这些函数集的共同基本屬性在于其中有代数运算，特别是函数可以相加，函数可以数乘，从而这些函数集是綫性空間；另一方面，必須考虑种种函数列的收斂，这种收斂最簡便的乃是用距离决定的。把这兩种概念結合，并加上一些其他考虑，便得出賦准范与賦范綫性空間的概念。1920—1930 年之間，这种空間的研究及其应用的探討便是当时泛函分析的主要內容。

1930 年以后，泛函分析不但成为独立学科，而且發展得非常蓬勃，現在已成为拥有众多方向的一門学科了。

参 考 文 献

[1] Banach, S.: Théorie des opérations linéaires, 1932.

[2] Bourbaki, N.: Éléments de mathématique, Livre V, Espaces vectorieis topologiques, Note historique (chapitres I à V), 1955.

[3] Courant R. und Hilbert, D.: Methoden der mathematischen Physik, Bd. I.

[4] Fréchet, M.: Les espaces abstraits, 1928.

[5] Fréchet, M.: Pages choisies d'analyse générale.

[6] Fredholm, I. Oeuvres complètes.

[7] Hadamard, J.: Le développement et le rôle scientifique du calcul fonctionnel. Atti del Congr. Intern. dei mat. 1928, Bologna.

[8] Hellinger, E.: Hilberts Arbeiten über Integralgleichungssysteme

und unendliche Gleichungssysteme, David Hilberts Gesammelte Abhandlungen, 3. Bd. 1935.

[9] Hellinger, E. und Toeplitz, O.: Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, Enzyklopädie der math. Wissenchs.

[10] Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie, 1899. 7. Aufl. 1930.

[11] Hilbert, D.: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 1912, 2. Aufl. 1924.

[12] Klein, F.: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert.

[13] Riesz, F.: Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. 1913.

[14] Riesz, F.: Über linearen Funktionalgleichungen, Acta math. XLI (1918), 71-98.

第一章　距离空間

§1. 距离决定的拓扑結構

定义 1　設E是一个集，由$E\times E$到实数集R中的映象$\rho(x, y)$叫做距离(尺度)，是指它滿足下列四个条件(x, y, z表E中任意元)：

1° $\rho(x, y)\geqslant 0$;

2° $\rho(x, y)=0\Longleftrightarrow x=y$;

3° $\rho(x, y)=\rho(y, x)$(对称性);

4° $\rho(x, y)+\rho(y, z)\geqslant\rho(x, z)$(三角形不等式)。

如果集E上定义了距离，則E叫做距离(尺度)空間。

例：1) 实数集R或复数集C上的函数$|x-y|$(数x与y之差的絕对值)就是一个距离。

2) 設K^n表示实数或复数所作的有序n数組$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的全体，那末，如果$x=(x_1, \cdots, x_n), y=(y_1, \cdots, y_n)$令

$$\rho(x, y)=\sqrt{|x_1-y_1|^2+\cdots+|x_n-y_n|^2}.$$

那末K^n成为距离空間。

3) 設$C[a, b]$表示閉区間$[a, b]$上一切連續实值函数全体組成的集，对于$x, y\in C[a, b]$，令

$$\rho(x, y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|,$$

那末$C[a, b]$是距离空間。

有了距离，就可以仿效数学分析中的考虑討論点列的收斂。

定义 2　在距离空間E中，所謂点列(x_n)收斂于点x_0，是指$\rho(x_n, x_0)\to 0(n\to\infty)$。这时我們写成

$$x_0=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

为了以后的討論，我們有必要引入一种更广的点列，及其收斂，即所謂 Moore—Smith—Шагуновский 收斂。

定义 2′ 集 E 叫做序集，是指对其中某些元之間定义一个关系 $\leqslant$，滿足下列性質，(x, y, z 表示 E 中任意元)：

1° 对于任意兩元 $x, y \in E$，或者 $x \leqslant y$，或者 $x \not\leqslant y$ (即 x 与 y 之間关系 $\leqslant$ 不成立)；

2° $x \leqslant x$ (自反性)；

3° $x \leqslant y$ 且 $y \leqslant x \Longrightarrow x = y$ (反对称性)；

4° $x \leqslant y$ 且 $y \leqslant z \Longrightarrow x \leqslant z$ (傳遞性)。

关系 $\leqslant$ 叫做 E 中的序关系，簡称序，我們說，这种关系把 E 序次。如果对 E 中任意兩元 x, y，$x \not\leqslant y \Longrightarrow y \leqslant x$，那末 E 叫做全序集。$x \leqslant y$ 也有时表示成 $y \geqslant x$，"$x \leqslant y$" 讀作"x 不大于 y"或"x 小于或等于 y"或"x 在 y 之前"等等。序集 E 叫作定向集，是指对于任意 $x, y \in E$，必存在 $z \in E$，使 $x \leqslant z, y \leqslant z$。在距离空間中，如有一族附有足标的点($x_\delta$)，而这些足标的全体 Δ 形成一个定向序集，那末(x_δ) 叫作定向点列。所謂定向点列(x_δ)收斂于点 $x_0 \in E$，是指对于任意 $\varepsilon > 0$，必存在一个足标 $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$，使

$$\delta \geqslant \delta_0 \Longrightarrow \rho(x_\delta, x_0) < \varepsilon,$$

这时我們表示成

$$\lim_{\delta \in \Delta} x_\delta = x_0.$$

例： 1) 自然数 $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$ 全体 N 按自然順序

$$1 < 2 < 3 < \cdots$$

形成全序集，用 N 作足标集的定向点列就是平常的点列。上述的收斂性的定义与定义 2 完全一致。

2) 考慮有穷区間 $[a, b]$ 的一切有穷分割：

$$\mathscr{P}:\ a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b \tag{1}$$

的全体 Π。諸点 t_i 叫作分割 $\mathscr{P}$ 的分点。所謂分割 $\mathscr{P}_1 \geqslant \mathscr{P}_2$，是指 $\mathscr{P}_1$

比 $\mathscr{P}_2$ 細，即 $\mathscr{P}_2$ 的每个分点也是 $\mathscr{P}_1$ 的分点。这样 Π 成为序集。这个序集也是定向的，因为只要把 $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ 的分点放在一齐作分割 $\mathscr{P}$，那末，

$$\mathscr{P} \geqslant \mathscr{P}_1,\ \mathscr{P} \geqslant \mathscr{P}_2,$$

如果 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的某一連續函数，对于每个分割(1)，作数

$$\sigma_{\mathscr{P}} = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(t_k - t_{k-1}).$$

那末 $(\sigma_{\mathscr{P}})$ 成为一个定向数列。由数学分析知道

$$\lim_{\mathscr{P} \in \Pi} \sigma_{\mathscr{P}} = \int_a^b f(t)dt.$$

定理 1 距离空間中定向点列至多收斂于一个点。

証 設 (x_δ) 是定向点列，設 (x_δ) 收斂于 y 与 z 两点。那末依定义 2′，对每个 $\varepsilon > 0$，必存在 δ_0，使

$$\delta \geqslant \delta_0 \Longrightarrow \rho(x_\delta, y) < \frac{\varepsilon}{2},$$

同理可取 δ_1 使

$$\delta \geqslant \delta_1 \Longrightarrow \rho(x_\delta, z) < \frac{\varepsilon}{2},$$

由于 (x_δ) 是定向点列，所以必有 $\delta \geqslant \delta_0$, $\delta \geqslant \delta_1$，于是

$$\rho(y, z) \leqslant \rho(y, x_\delta) + \rho(x_\delta, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ε 旣是任意的正数，而 y, z 与 ε 無关，所以

$$\rho(y, z) = 0,$$

从而 $y = z$。

定理 2 如果距离空間 E 中的点列 (x_n) 收斂于 x_0，那末对于任意一列自然数 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$，点列 x_{n_k} [叫做点列 (x_n) 的子列] 也收斂于 x_0。

証　因为 $n\to\infty$ 时 $\rho(x_n, x_0)\to 0$，所以对于 $\varepsilon>0$，存在 $n_0(\varepsilon)$ 当 $n\geqslant n_0(\varepsilon)$ 时，有 $\rho(x_n, x_0)<\varepsilon$，当然对 $n_k\geqslant n_0$ 时也有 $\rho(x_{n_k}, x_0)<\varepsilon$。

定义 3　距离空間 E 中的点集

$$\{x \mid x\in E, \rho(x, a)<\alpha\} \tag{2}$$

叫做以 $a\in E$ 为中心，以正数 α 为半徑的开球。如果在(2)中把"$<\alpha$"换成"$\leqslant\alpha$"相应集叫作閉球，这样的开球与閉球各用

$$S(a;\alpha) \text{ 及 } \bar{S}(a;\alpha)$$

表示。集 $\{x \mid x\in E, \rho(x, a)=\alpha\}$ 叫作球 $S(a;\alpha)$ 的表面，或叫以 a 为心以 α 为半徑的球面。点 a 叫做集 $A(\subset E)$ 的附着点，是指对于任意 $\varepsilon>0$，

$$S(a;\varepsilon)\cap A\neq\Phi.$$

集 A 的附着点全体所組成的集，表示成 $\bar{A}$，叫做集 A 的閉包。

定理 3　距离空間 E 中集的閉包具有下列屬性，(M, N 表 E 中任意集)：

1°　$\overline{M\cup N}=\bar{M}\cup\bar{N}$;

2°　$M\subset\bar{M}$;

3°　$\bar{\bar{M}}=\bar{M}$;

4°　$\bar{\Phi}=\Phi$.

証　2° 与 4° 是显然的。$M\subset N\Longrightarrow\bar{M}\subset\bar{N}$ 也容易看出。从而 $\bar{M}\cup\bar{N}\subset\overline{M\cup N}$，为了完成 1° 的証。只要証 $\overline{M\cup N}\subset\bar{M}\cup\bar{N}$。設 $x\in\overline{M\cup N}$，那末对于任意 $\varepsilon>0$，

$$S(x;\varepsilon)\cap(M\cup N)\neq\Phi. \tag{3}$$

如果 $x\notin\bar{M}$，$x\notin\bar{N}$，那末必存在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2>0$

使
$$S(x;\varepsilon_1)\cap M=\Phi=S(x;\varepsilon_2)\cap N,$$

取 $\varepsilon=\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 則 $S(x;\varepsilon)\cap(M\cup N)=\Phi$，这与上面的(3)矛盾。所以 $x\in\bar{M}$ 或 $x\in\bar{N}$。从而 $\overline{M\cup N}\subset\bar{M}\cup\bar{N}$。为了証 3°，注意由 2° 得知 $\bar{M}\subset\bar{\bar{M}}$。設 $x\in\bar{\bar{M}}$，那末对每个 $\varepsilon>0$ 必然

$$S(x;\varepsilon)\cap\bar{M}\neq\Phi.$$

取一点 $y\in S(x;\varepsilon)\cap M$，于是 $\rho(x,y)<\varepsilon$，而且取

$$\delta=\varepsilon-\rho(x,y)(>0),$$

由于 $\overline{M}$ 的定义，必然

$$S(y;\ \delta)\cap M\neq\Phi,$$

这就是說，存在 $z\in S(y,\delta)\cap M$，即 $\rho(y,z)<\delta$，从而

$$\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)<\rho(x,y)+\delta=\varepsilon,$$

而 $z\in M$。ε 既是任意的，可知 $x\in\overline{M}$，从而 $\overline{\overline{M}}\subset\overline{M}$，与前面的結果結合，得知 $\overline{M}=\overline{\overline{M}}$。

定义 4 在距离空間 E 中，如果集 $M=\overline{M}$，M 叫做閉集。如果集 M 的补集 $E\setminus M$ 是閉集，M 叫做开集，集 M 叫做在 E 中稠，是指 $\overline{M}=E$。空間 E 叫做可分，是指存在可数子集 $M\subset E$，使 $\overline{M}=E$。集 M 叫做在空間 E 中疏，是指

$$\overline{E\setminus\overline{M}}=E,$$

E 中点 x 叫做集 M 的內点，是指存在 $\varepsilon>0$，使 $S(x;\ \varepsilon)\subset M$。点 x 叫做 E 的界点，是指对于任意 $\varepsilon>0$，

$$S(x;\varepsilon)\cap M\neq\Phi\neq S(x;\varepsilon)\cap(E\setminus M).$$

例 在距离空間 R 中，每个閉区間$[a,b]$是閉集，每个开区間$]a,b[$是开集，每个半开区間$]a,b]$是既非閉又非开集，在 R 中，有理点全体構成一个稠集，从而 R 是可分的，注意，在 R 中，以 x 为心以 ε 为半徑的开球，实际上乃是以 x 为中心以 2ε 为長的开区間。

上面引入距离概念，为了规定空間中点列的收斂。但規定同一收斂的，可以是不同的距离。例如在 R^2 中，可以令 $x=(\xi_1,\xi_2)$，$y=(\eta_1,\eta_2)$；

$$\rho(x,y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2},$$

$$\rho_1(x,y)=\max(|\xi_1-\eta_1|,|\xi_2-\eta_2|),$$

$$\rho_2(x,y)=|\xi_1-\eta_1|+|\xi_2-\eta_2|,$$

而無論使用哪个距离 ρ, ρ_1, ρ_2, 所規定的收斂

$$x_n \equiv (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)},) \to x_0 \equiv (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}),$$

都意味着 $\xi_1^{(n)} \to \xi_1^{(0)}, \quad \xi_2^{(n)} \to \xi_2^{(0)}, \quad (n \to \infty).$

同时应当注意，在一个集上，常可以賦以种种不同的距离，一般使得所規定的收斂不一样。例如在任意集 E 上，可以令

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } x = y, \\ 1 & \text{如果 } x \neq y, \end{cases}$$

那末它所規定的收斂 $x_n \longrightarrow x_0$ 意味着从某个 n_0 起，$x_n = x_0 (n \geqslant n_0)$。特别这个距离也可以定义在 R 上，这与 R 上的距离 $|x-y|$ 所引出的收斂不同。于是值得考慮，在同一集 E 上，兩距离規定出同一收斂的条件。更确切的說，我們指出下列定义。

定义 3 在集 E 上兩距离 ρ, ρ_1 叫做等价的，是指对于 E 中任意点列 (x_n) 及任意点 $x_0 \in E$,

$$\rho(x_0, x_n) \to 0 \Longleftrightarrow \rho_1(x_0, x_n) \to 0 (n \to \infty).$$

定理 4 为了集 E 上兩距离 ρ 与 ρ_1 等价，必須且只須对于每个数 $\alpha > 0$ 及每个元 $x_0 \in E$, 必存在数 $\beta > 0$, 使

$$\rho(x_0, y) \leqslant \beta \Longrightarrow \rho_1(x_0, y) \leqslant \alpha \text{ 而} \tag{4}$$

$$\rho_1(x_0, y) \leqslant \beta \Longrightarrow \rho(x_0, y) \leqslant \alpha .$$

証 設定理中的条件滿足。設 $\rho(x_0, x_n) \longrightarrow 0 (n \longrightarrow \infty)$。对于 $\varepsilon > 0$, 依条件必存在 $\delta > 0$, 使

$$\rho(x_0, y) \leqslant \delta \Longrightarrow \rho_1(x_0, y) \leqslant \varepsilon。 \tag{5}$$

依假定 $\rho(x_0, x_n) \to 0 (n \to \infty)$，从而存在 n_0，使

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow \rho(x_0, x_n) \leqslant \delta.$$

于是依(5), $n \geqslant n_0 \Longrightarrow \rho_1(x_0, x_n) \leqslant \varepsilon$。而 ε 既是任意的，可知 $\rho_1(x_0, x_n) \to 0 (n \to \infty)$。同理証明 $\rho_1(x_0, x_n) \to 0 (n \to \infty) \Longrightarrow \rho(x_0, x_n) \to 0 (n \to \infty)$, 充分性証完。

反之，設 ρ, ρ_1 等价，但定理中的条件不成立，卽对于某个 $\alpha > 0$, 及

某个 $x_0\in E$, 滿足(4)的 β 不存在，于是無妨設对于每个自然数 n, 必存在点 y_n 使

$$\rho(x_0, y_n)\leqslant\frac{1}{n}, \rho_1(x_0, y_n)\geqslant\alpha.$$

于是 $\rho(x_0, y_n)\to 0$, $\rho_1(x_0, y_n)\not\to 0$ $(n\to\infty)$与 ρ, ρ_1 的等价性矛盾。

定义 6 集 E 上的距离 ρ, 当限制在 E 的子集 A 上时，仍是距离，从而 ρ 使得 A 成为距离空間，叫做 E 的子空間。

例 当把 R 与 R^2 中的横軸 $y=0$ 等同时，則 R 是 R^2 的子空間。

定义 7 距离空間 E 中由点 a 到集 A 的距离，是指

$$\rho(a, A)\equiv \inf_{x\in A} \rho(a, x).$$

E 中兩集，A, B 的距离，是指

$$\rho(A, B)\equiv \inf_{\substack{a\in A\\ b\in B}} \rho(a, b),$$

集 A 的直徑，是指

$$\alpha(A)\equiv \sup_{x, y\in A} \rho(x, y)$$

注 不难看出，在距离空間 E 中，对于任意集 A,

$$\overline{A}=\{x\,|\,x\in E,\ \ \rho(x, A)=0\}.$$

定义 8 由距离空間 E 到距离空間 E_1 中的映象 T 叫做連續的，是指对于 E 中任意一点 x_0 及任意一个收斂于 x_0 的元列(x_n),

$$x_n\to x_0(n\to\infty)\Longrightarrow Tx_n\to Tx_0(\text{在 } E_1 \text{ 中})$$

特別如果 $E_1=R$ 或 C, 那末相应的連續映象叫做（实值或复值的)連續函数。

注 当固定一点 a 时，距离 $\rho(a, x)$ 是 x 的連續函数。事实上不难驗明

$$|\rho(a, x)-\rho(a, y)|\leqslant\rho(x, y),$$

从而当 $x_n\to x(n\to\infty)$时，$\rho(x_n, x)\to 0$ 于是$\rho(a, x_n)\to\rho(a, x)$。同理不难驗明，对于任意集 $A\subset E$, $\rho(x, A)$是 x 的連續函数。

定理 5　为了由距离空間 E 到距离空間 E_1 中的映象 T 是連續的，必須且只須对于每个 $x\in E$ 及任意 $\varepsilon>0$，必存在 $\delta>0$，使对于任意 $y\in E$，

$$\rho(x, y)\leqslant\delta\Longrightarrow\rho_1(Tx, Ty)\leqslant\varepsilon,$$

这里 ρ, ρ_1 各表示 E, E_1 中的距离。

証　必要性：設 T 是連續的，如条件不成立，則存在某个 $\varepsilon>0$，使对于任何 δ，特別 $\delta_n=\dfrac{1}{n}$，必有 $x_n\in E$ 且

$$\rho(x, x_n)\leqslant\frac{1}{n}, \text{而 } \rho_1(Tx, Tx_n)>\varepsilon$$

这样就存在叙列 (x_n)，$x_n\to x$ 而 $Tx_n\not\to Tx$，这与假設矛盾。

充分性：設条件成立，(x_n) 是任一收斂于 x 的叙列，因为 $x_n\to x$，取 n 适当大时就有 $\rho(x, x_n)\leqslant\delta$，

从而　　$$\rho(x, x_n)\leqslant\delta\Longrightarrow\rho(Tx, Tx_n)\leqslant\varepsilon,$$

所以 $x_n\to x\Rightarrow Tx_n\Longrightarrow Tx$，卽 T 是連續的。

習題一

1．求証如果定向列 (x_δ)（在距离空間 E 中）收斂于点 x_0，那末 (x_δ) 的任一共尾子列 $(x_{\delta'})$（卽指对于每个 δ，必存在 $\delta'\geqslant\delta$），也收斂于 x_0。

2．为了 $x_0\in\bar{A}$，必須且只須存在 $x_n\in A$，使 $x_n\to x_0$。

3．为了 A 是开集，必須且只須对于每个 $x\in A$，存在一正数 ε（依賴于 x），使 $S(x, \varepsilon)\subset A$。求証开球 $S(x, a)$ 必是开集，而閉球 $\bar{S}(x, a)$ 必是閉集。

4．設距离空間 E 的距离 $\rho(x, y)$ 滿足下列条件：对于任意 $x, y, z\in E$ 有 $\rho(x, z)\leqslant\max(\rho(x, y), \rho(y, z))$。求証 E 的每个球中包含一个既开且閉的集。

5．为了 A 是疏集，必須且只須每个球含一球与 A 不相交（卽与 A 無公共点）。

6．为了 $\rho(A, B)=0$，只須 $\bar{A}\cap\bar{B}\neq\Phi$。求証逆命題一般不成立（試举反例）。

7．求証在距离空間中，如 A，B 是两个不相交閉集。那末，必存在空間上的一个連續函数 $f(x)$，使 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$ 并且

$$x\in A\Longrightarrow f(x)=0,\quad x\in B\Longrightarrow f(x)=1.$$

提示： 令

$$f(x)=\frac{\rho(x, A)}{\rho(x, A)+\rho(x, B)}.$$

8. 設 φ 是定义在$[0, +\infty]$上(即对 $t=+\infty$ 也有定义的)并在 $[0, +\infty]$中取値的函数，而 $\varphi(0)=0$，φ 在 0 点連續，φ 在$[0+\infty]$上遞增，并在 0 点附近严格遞增(即 $\exists\delta>0$，使 $0\leqslant t_1<t_2\leqslant\delta\Longrightarrow\varphi(t_1)<\varphi(t_2)$)，对于任意 $u, v\geqslant 0$，$\varphi(u+v)\leqslant\varphi(u)+\varphi(v)$，那末，当 ρ 是在 E 上的距离时，$\varphi(\rho(x,y))$也是在 E 上的距离，且与 ρ 等价。特别求証

$$\sqrt{u},\ \log(1+u),\ \frac{u}{1+u},\ \min(u,1)$$

都具 $\varphi(u)$的上述諸性質。

§2. 完备性，Baire 的綱

定义 1 距离空間 E 中的点列(x_n)叫做基本列，是指对于每个 $\varepsilon>0$，$\exists n_0=n_0(\varepsilon)$，使

$$p,\ q\geqslant n_0\Longrightarrow\rho(x_p, x_q)<\varepsilon.$$

注 如点列(x_n)收斂于空間中一点，那末不难看出(x_n)是基本列，但反之，基本列不一定在空間中收斂，例如，有理数集賦以距离 $|x-y|=\rho(x,y)$的情形就是古典的例子。

定义 2 距离空間 E 叫做完备的(簡称备的)，是指其中每个基本列必收斂于 E 中一点。

仿效 Cantor 把有理数集完备化成实数集的程序，可以証明完备化的定理。为此，我們引入下列概念。

定义 3 由距离空間 E 到距离空間 E_1 中的映象 T 叫做等距的，是指对于任意 $x, y\in E$，

$$\rho(x,y)=\rho_1(Tx, Ty),$$

这里 ρ, ρ_1 各表示 E, E_1 中的距离。这时，E 叫做等距于 $TE\subset E_1$。

定理 1. 每个距离空間必可以完备化。即对于每个距离空間 E，必存在一距离空間 E_1，使 E 等距于 E_1 中一个稠子空間，且除去等距的不計外，这完备化空間 E_1 是唯一的。

証 設 (x_n)，(x'_n) 是 E 中二基本列，如 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n, x'_n)=0$ 就說 $(x_n)\sim(x'_n)$，易知这关系是一等价关系，以此等价关系將 E 分类，將等

价类的全体所成的集合記为 E_1。

設 $\dot{x}, \dot{y} \in E_1$, $(x_n) \in \dot{x}$, $(y_n) \in \dot{y}$,

作
$$\rho(\dot{x}, \dot{y}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$$

由于(x_n), (y_n)是基本列，且

$$|\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n)| = |\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_m) +$$
$$+ \rho(x_n, y_m) - \rho(x_n, y_n)| \leqslant |\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_m)| +$$
$$+ |\rho(x_n, y_m) - \rho(x_n, y_n)| \leqslant \rho(x_m, x_n) + \rho(y_m, y_n) \to 0$$
$$(\text{当 } m, n \to \infty \text{ 时})$$

因此数列 $\{\rho(x_m, y_m)\}$ 滿足柯西条件，所以上式右边的極限存在。現在我們証明这样定义的 $\rho(\dot{x}, \dot{y})$ 与类 $\dot{x}, \dot{y}$ 中元 (x_n), (y_n) 的选擇無关。

取 (x_n), $(x'_n) \in \dot{x}$; (y_n), $(y'_n) \in \dot{y}$, 因为

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n, y'_n)| = |\rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n, y_n) + \rho(x'_n, y_n) -$$
$$- \rho(x'_n, y'_n)| \leqslant |\rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n, y_n)| + |\rho(x'_n, y_n) - \rho(x'_n, y'_n)| \leqslant$$
$$\leqslant \rho(x_n, x'_n) + \rho(y_n, y'_n) \to 0 \quad (\text{当 } n \to \infty \text{ 时})$$

所以 $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n)$。

所以 $\rho(\dot{x}, \dot{y})$ 由类 $\dot{x}$ 与 $\dot{y}$ 完全确定，易証它还滿足距离公理，从而 E_1 是一距离空間。

我們把形如 $\{x, x, \cdots, x, \cdots\}$ 的点列叫做常駐列。显然，E 中常駐列(x)是基本列，記 E_1 中包含常駐列的类的全体为 E'. 要証 E 与 E' 等距，且 E' 在 E_1 中稠。显然一等价类如包含一常駐列，則只能含有一个。因此 E 与 E' 作成一一对应。由 $\rho(\dot{x}, \dot{y})$ 的定义立得 E 与 E' 的等距性。

設 $\dot{x} \in E_1$, $(x_n) \in \dot{x}$, 由于 x_n 是基本列，所以对于 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n, m \geqslant N$ 时，有 $\rho(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon$。設 $\dot{x}_n$ 是包含常駐列$(x_n, x_n, \cdots)$的等价类，則
$$\rho(\dot{x}_n, \dot{x}) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon$$

所以E'在E_1中稠。同时有$(x_n)\in\dot{x}\Longrightarrow\dot{x}_n\to\dot{x}$。

設 $(\dot{x}^{(n)})\subset E_1,\ \rho(\dot{x}^{(n)},\dot{x}^{(m)})\to 0\ (n,m\to\infty)$

由上知对$\dot{x}^{(n)}$可取$\dot{x}_n\in E'$（$\dot{x}_n$是含$(x_n,x_n,\cdots)$的类）使$\rho(\dot{x}_n,\dot{x}^{(n)})<\frac{1}{n}$，取点列$(x_n)\subset E$，因为

$$\rho(x_n,x_m)=\rho(\dot{x}_n,\dot{x}_m)\leqslant\rho(\dot{x}_n,\dot{x}^{(n)})+\rho(\dot{x}^{(n)},\dot{x}^{(m)})+\rho(\dot{x}^{(m)},\dot{x}_m)\to 0$$
$$(n,m\to\infty)$$

所以(x_n)是一基本列，設$(x_n)\in\dot{x}\in E_1$，而

$$\rho(\dot{x}^{(n)},\dot{x})\leqslant\rho(\dot{x}^{(n)},\dot{x}_n)+\rho(\dot{x}_n,\dot{x})\to 0\quad(n\to\infty)$$

所以E_1是完备的。

設F_1是E的另外一个完备化空間，要証F_1与E_1等距。設F_1中的点表以$\tilde{x}$. F'是F_1中与E等距的稠子空間。

取$(x_n)\in\dot{x}\in E_1$，因为(x_n)是E中基本列，所以$(\tilde{x}_n)$也是F'中的基本列（$\tilde{x}_n$是F'中对应于$x_n\in E$的点，而$\rho(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m)=\rho(x_n,x_m)$），所以$\tilde{x}_n\to\tilde{x}\in F_1$，易知此$\tilde{x}$不隨$(x_n)\in\dot{x}$的取法而改变，我們使$\tilde{x}$和$\dot{x}$对应。反之，对于$\tilde{x}\in F_1$，必存在有$F'$中的基本列$(\tilde{x}_n)$使$\tilde{x}_n\to\tilde{x}$，显然$(x_n)$是$E$中的基本列，設$(x_n)\in\dot{x}$，同样$\dot{x}$不隨$\tilde{x}_n$的取法（只要$\tilde{x}_n\to\tilde{x}$）而改变，我們就令$\dot{x}$与$\tilde{x}$对应。这样得到$E_1$与$F_1$間的一个对应，显然是一一对应，且有

$$\rho(\tilde{x},\tilde{y})=\lim\rho(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)=\lim\rho(x_n,y_n)=\rho(\dot{x},\dot{y})$$

F_1与E_1的等距性証畢。

定理 2. 設$(\mathfrak{K}_n)$是备距离空間E中一列閉球，并且

$$\mathfrak{K}_1\supset\mathfrak{K}_2\supset\mathfrak{K}_3\supset\cdots\supset\mathfrak{K}_n\supset\cdots,\tag{1}$$

又設$\mathfrak{K}_n$的半徑ε_n滿足$\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$，那末

$$\prod_{n=1}^{\infty}\mathfrak{K}_n$$

恰含一个点。

証 設$\mathfrak{K}_n=\bar{S}(a_n,\varepsilon_n)$考察$E$中点列$(a_n)$，那末由假定(1)，对于每个自然数$m>n$，$a_m\in\mathfrak{K}_n$，从而

$$\rho(a_m, a_n)\leqslant\varepsilon_n \quad (m\geqslant n).$$

由假定 $\lim \varepsilon_n=0$, 可知 (a_n) 是基本列。依 E 的备性，必存在 $a_0\in E$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a_0$。由于 $\rho(x, a_n)$ (对于固定的 n) 是 x 的連續函数，而 $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ m\geqslant n}} a_m=a_0$, 从而

$$\rho(a_0, a_n)=\lim_{\substack{m\to\infty\\ m\geqslant n}} \rho(a_m, a_n)\leqslant\varepsilon_n,$$

即 $a_0\in \mathfrak{K}_n$, 这里 n 旣是任意的，所以

$$a_0\in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{K}_n.$$

設 x 也属于一切 $\mathfrak{K}_n$ 那末

$$\rho(x, a_0)\leqslant\rho(x, a_n)+\rho(a_n, a_0)\leqslant 2\varepsilon_n,$$

从而 $\rho(x, a_0)=0$, $x=a_0$ 証完。

定义 4. 距离空間 E 中的与集 A 叫做第一綱的，是指它可以表示成可数多个疏集的并

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \quad \overline{E\setminus \overline{M}_n}=E, \quad (n=1, 2, \cdots).$$

不是第一綱集的集叫做第二綱集。

例 在 R 中，有理数全体組成第一个綱集，而由下列定理可知無理数全体是 R 中第二个綱集，因为至多可数多个第一綱集的并仍是第一綱的。

定理 3. 备距离空間必是第二綱的。

証 如果定理不成立，那末姑設备距离空間 E 是第一綱的。即

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \tag{2}$$

M_n 是 E 中疏集$(n=1, 2, \cdots)$, 取任意一个閉球 $\bar{S}(a, 1)(a\in E)$, 依疏集的性質(見習題一，9)，必存在一个閉球 $\bar{S}(a_1, r_1)\subset\bar{S}(a, 1)$, 使 $r_1<\frac{1}{2}$, 而 $\bar{S}(a_1, r_1)$ 不含 M_1 中的点。M_2 既然也是疏的，必存在閉球 $\bar{S}(a_2, r_2)\subset$

$\subset \bar{S}(a_1, r_1)$, 使 $r_2 < \frac{1}{2^2}$, 而 $\bar{S}(a_2, r_2)$ 不含 M_2 中的点。类推，可得一串遞次相含的閉球列 $\{\bar{S}(a_n, r_n)\}$, 使 $\bar{S}(a_n, r_n)$ 不含 $\bigcup_{k=1}^{n} M_k$ 中的点，且 $\lim r_n = 0$。依定理 2, 恰存在一点 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{S}(a_n, r_n)$, 而又一方面 x_0 不含于任意 M_n 中，从而与(2)矛盾。証完。

注　这个簡單的定理，在証明种种存在定理时有很大的用处。在泛函分析中，这种引用定理 3 或类似定理的証明方法叫做“綱推理”特别在泛函分析發展的早期受到很多研究(請参看后附的几篇文章)，下面只举一个簡單的例，注意我們实际上已經証明(因为 $\bar{S}(a, 1)$ 是随意取的)，在备距离空間中任意第一綱集的补集必是稠集。

例　我們証明，$C[0, 1]$ 中例如在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 的每点处沒有导数的函数全体在 $C[0, 1]$ 中是第二綱集，从而是其中稠集。这种証法很象 Cantor 証明超越数存在的方式，乃是非構造的純存在証明。

事实上，为了 $x(t) \in C[0, 1]$ 在一点 $t_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ 处有有穷的右上下导数

$$\overline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{1}{h}(x(t_0+h) - x(t_0)),$$

$$\underline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{1}{h}(x(t_0+h) - x(t_0)),$$

必須且只須存在正整数 n, 使对于一切 $h > 0$ (使 $x(t_0+h)$ 有意义的),

$$\left| \frac{1}{h}(x(t_0+h) - x(t_0)) \right| \leqslant n. \tag{3}$$

令 M_n 表示至少存在一个 $t_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ 使上面不等式成立的 $x(t)$ ($\in C[0, 1]$) 的全体，$n = 1, 2, \cdots$。M_n 是閉集，因为如果 $x_i \in M_n$, 必存在 $t_i \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 使 $x_i(t)$ 在 t_i 处滿足(3)(即令 $x = x_i$, $t_0 = t_i$ 时(3)成立)。設 $x_i \to x_0 (i \to \infty)$, 即 $x_i(t)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收斂于 $x_0(t)$。(t_i) 必有一子列收斂于一点 $t_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 于是不难驗証(3)对于 x_0, t_0 成立。又 M_n 是

疏集，为此只須証对于任意 $x\in C[0, 1]$ 及任意 $\varepsilon>0$，必存在 $y\notin M_n$，使 $\rho(x, y)\leqslant\varepsilon$（因閉集 M 是疏集的充分必要条件乃是 $\overline{E\setminus M}=E$，即 $E\setminus M$ 在 E 中稠）。依連續函数用多項式一致逼近的 Weierstrass 定理，对于任意 $x\in C[0, 1]$，存在多項式 z，使 $\rho(x, z)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$（这里如前面所述一样，令

$$\rho(x, z)=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-z(t)|.$$

于是只須証对于任意多項式及任意数 $\varepsilon>0$，存在 $y\in C[0, 1]$，$y\notin M_n$ 使 $\rho(y, z)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ 即可。令

$$\sup_t\left|\frac{dz}{dt}\right|=\alpha>0,$$

取正整数 m，使

$$\varepsilon(n+2\alpha)^{-1}>m^{-1}.$$

把 $[0, 1]$ 分成 $2m$ 等分 $0=t_0<t_1<\cdots<t_{2m}=1$。令

$$w(t_{2i})=0,\quad w(t_{2j-1})=\frac{\varepsilon}{2}\quad(0\leqslant i\leqslant m;\ 1\leqslant j\leqslant m)$$

而 w 在每个小区間 (t_i, t_{i+1}) $(0\leqslant i\leqslant 2m-1)$ 中为直綫形。于是 $w(t)$ 的圖形是一折綫，即 $w\in C[0, 1]$，而 $w(t)$ 在各点的斜率按絕对值超过

$$\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{1}{2m}}=\varepsilon m>n+2\alpha,$$

从而 $y(t)=z(t)-w(t)$ 就滿足上述的要求。于是 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}M_n$ 是第一綱集。但由于連續函数列的一致收斂極限仍是連續函数，从而得知 $C[0, 1]$ 是备距离空間。于是 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}M_n$ 的补集是 $C[0, 1]$ 中第二个綱集，証完。

習題二

1. 設 (s) 表示一切实数列 (ξ_i) 的全体，而对于兩个如此的列 $x=(\xi_i)$，$y=(\eta_i)$，定义

距离

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|\xi_i-\eta_i|}{2^i[1+|\xi_i-\eta_i|]},$$

求証(S)是完备距离空間。

2. 設在实数域R中，定义：

$$\rho(x,y)=\begin{cases}|x-y| & \text{当}\ |x-y|\leqslant 2\\ 1+\dfrac{1}{|x-y|-1} & \text{当}\ |x-y|>2\end{cases}$$

求証R成为完备距离空間。

3. 求証在一备距离空間E中，如果(F_n)是一串閉集，使

$$F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots,$$

并且$F_n\neq\Phi(n=1,2,\cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty}d(F_n)=0$（$d(F_n)$表示集$F_n$的直徑），那末，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\Phi.$$

4. 求証在备距离空間中第一綱集沒有內点。

5. 設Ω为距离空間，$(x_n(t))$是Ω上一串(有穷)实値連續函数，而設对于每个$t\in\Omega$,

$$x(t)=\lim_{n\to\infty}x_n(t)$$

存在。求証$x(t)$的不連續点的全体是Ω中第一綱集。

参考文献

[1] Auerbach, H. und S. Banach: Über die Höldersche Bedingung. Studia math. 3 (1931), 180—184.

[2] Banach S.: Über die Bairesche Kategorie gewisser Functionen-mengen. Studia math. 3 (1931), 174—179.

[3] Kaczmarz, S.: Integrale von Dinischen Typus. Studia math. 3 (1931), 189—199.

[4] Mazurkiewicz, S.: Sur les fonctions non-derivables. Studia math. 3 (1931), 92—94.

[5] Mazurkiewicz, S.: Sur l' integrale $\int_0^1\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}dt$. Studia math. 3(1931), 114—118.

[6] Zeller, K.: Kondensation von Singularitäten. math. phys. Semesterber. 3 (1953), 207—213 (原文未見到，見 Реф. Ж. Матем. 1954: 10, 5186.)

§3. 列緊性

定义 1. 距离空間E中集M叫做列紧的，如果M中任一無穷子集都含有一个收斂叙列。如所有收斂叙列的極限都屬于M，則M叫做自列紧的，如空間E是自列紧的則叫做列紧空間。显然列紧空間是完备的。

例如，根据 Bolzano-Weierstrass 定理数直綫上的有界集必是列紧的，而無界集 $\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ 不是列紧的。

定义 2. 距离空間E中集A叫做集M的ε-網：如对每点$x\in M$存在$x_\varepsilon\in A$，使$\rho(x, x_\varepsilon)\leqslant\varepsilon$。

例如，$A=\{(m, n)/m, n\in N\}$ 在平面上就形成一个$\frac{\sqrt{2}}{2}$-網，其中$N=\{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$。

如对任意$\varepsilon>0$，M总有有穷的ε-網存在，則称M是完全有界的。

显然完全有界集必有界，但反之不成立。

定理 1. 为了距离空間E中集M是列紧的，必須M为完全有界。反之，設距离空間E是备的，如M为完全有界，則M是列紧的。

証 1)**必要性：** 設M是列紧的，但不是完全有界的，則必对于某一ε不存在M的有穷ε-網。任取$x_1\in M$，必存在$x_2\in M$使$\rho(x_1, x_2)>\varepsilon$，不然$\{x_1\}$即为$M$的有穷$\varepsilon$-網，矛盾。同理存在$x_3\in M$使$\rho(x_1, x_3)>\varepsilon$，$\rho(x_2, x_3)>\varepsilon$，不然$\{x_1, x_2\}$即为$M$的有穷$\varepsilon$-網，矛盾。依此类推，此步驟無休止，不然与假設矛盾，所以得一叙列(x_n)，滿足$\rho(x_n, x_m)>\varepsilon$ $(m\neq n)$，显然(x_n)不含有任何收斂的子叙列，此与M的列紧性矛盾。

2. **充分性：** 設E是备的，M为完全有界。取一正数列(ε_n)，滿足$\varepsilon_n\to 0\ (n\to\infty)$。設$\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_{k_n}^{(n)}\}$是$M$的有穷$\varepsilon_n$-網，$T$是$M$中任一無穷集合。作$\bar{S}(x_i^{(1)}, \varepsilon_1)$，$(1\leqslant i\leqslant k_1)$，則$T\subset\bigcup_{i=1}^{k_1}\bar{S}(x_i^{(1)}, \varepsilon_1)$，所以至少有一球設为$\bar{S}(x_{i_1}^{(1)}, \varepsilon_1)$含有$T$的無穷子集$T_1$。又$T_1\subset\bigcup_{i=1}^{k_2}\bar{S}(x_i^{(2)}, \varepsilon_2)$，

所以至少有一球，設为 $\bar{S}(x_{i_2}^{(2)}, \varepsilon_2)$ 含有 T_1 的無穷子集 T_2。类推，由此得 $T_1 \supset T_2 \supset \cdots \supset T_n \supset \cdots$，且 $T_n \subset \bar{S}(x_{i_n}^{(n)}, \varepsilon_n)(n=1, 2, \cdots)$。取 $a_1 \in T_1$，$a_2 \in T_2 \setminus \{a_1\}, \cdots, a_n \in T_n \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}, \cdots$，則因 $\rho(a_{n+p}, a_n) \leqslant 2\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$，又由于 E 是备的，所以存在 T 的叙列 (a_n)，$a_n \to a_0 \in E$，所以 M 是列緊的。

系 1. 在备距离空間中的集合 M，如对任意 $\varepsilon>0$，集 M 有列緊的 ε-網，則 M 是列緊的。

証　設 A 是 M 的列緊 $\frac{\varepsilon}{2}$-網，取 A 的有穷 $\frac{\varepsilon}{2}$-网 B，則 B 卽为 M 的有穷 ε-網。

系 2. 列緊空間 E 是可分的。

証　取正数列 (ε_n) 使 $\varepsilon_n \to 0(n \to \infty)$。設 A_n 是 E 的有穷 ε-網，則 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 卽为 E 中可数稠集。

系 3. 列緊集必有界。

例　我們將給出空間 $E = C[0, 1]$ 中列緊性的充要条件，为此首先說明兩个概念。

設定义在閉区間 $[0, 1]$ 上的函数族 $M = \{x(t)\}$，如存在常数 K 使对于任何 $t \in [0, 1]$，任何 $x(t) \in M$ 都有 $|x(t)| \leqslant K$，則称 M 中函数是(或 M 是)一致有界的。如对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon)>0$，使对 t_1，$t_2 \in [0, 1]$，凡 $x(t) \in M$，当 $|t_1 - t_2| < \delta$ 时，就有 $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ 則称 M 中的函数(或 M)是同等連續的。

为了 $C[0, 1]$ 中集 M 是列緊的必須，且只須 M 中函数一致有界且同等連續(Arzela 定理)。

証　1)必要性：

M 的一致有界性可由系 3 得出。

对于 $\varepsilon>0$ 作 M 的有穷 $\frac{\varepsilon}{3}$-網 $\{x_1, \cdots, x_n\}$。因为 $x_i(t)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是閉区間 $[0, 1]$ 上的連續函数，所以在其上一致連續。

对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_i=\delta_i(\varepsilon)$, 当 $|t_1-t_2|<\delta$ 时,有 $|x_i(t_1)-x_i(t_2)|<\frac{\varepsilon}{3}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$。

取 $\delta=\min\{\delta_1,\cdots,\delta_n\}$, 对于任一 $x(t)\in M$ 选取$x_i(t)$使 $\rho(x,x_i)=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-x_i(t)|<\varepsilon/3$, 所以当$|t_1-t_2|<\delta$ 时,有

$$\begin{aligned}|x(t_1)-x(t_2)|&=|x(t_1)-x_i(t_1)+x_i(t_1)-x_i(t_2)+x_i(t_2)-x(t_2)|\\&\leqslant|x(t_1)-x_i(t_1)|+|x_i(t_1)-x_i(t_2)|+|x_i(t_2)-x(t_2)|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

M 等度連續性証畢。

2) **充分性**: 要証对于任何 $\varepsilon>0$, 在 $C[0,1]$中总有M的列紧 ε-网存在。由M的等度連續性, 对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 使 $t_1, t_2\in[0,1]$, $x(t)\in M$, 当 $|t_1-t_2|<\delta$ 时,有 $|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon$,取$\frac{1}{n}<\delta$, 把 $[0,1]$ 分成 n 等分,于是当$|t_1-t_2|<\frac{1}{n}<\delta$时有$|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon$。

对每一 $x(t)\in M$ 作 $x_n(t)$ 如下

(i) $x_n\left(\frac{i}{n}\right)=x\left(\frac{i}{n}\right)$, $(0\leqslant i\leqslant n)$

(ii) 在 $\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]$ $(0\leqslant i\leqslant n)$ 上为直綫形。

如 $x\left(\frac{i}{n}\right)\leqslant x\left(\frac{i+1}{n}\right)$, 則对于 $\frac{i}{n}\leqslant t\leqslant\frac{i+1}{n}$ 有 $x\left(\frac{i}{n}\right)\leqslant x_n(t)\leqslant x\left(\frac{i+1}{n}\right)$, 从而有

$$x(t)-x\left(\frac{i+1}{n}\right)\leqslant x(t)-x_n(t)\leqslant x(t)-x\left(\frac{i}{n}\right)。$$

如 $x\left(\frac{i}{n}\right)\geqslant x\left(\frac{i+1}{n}\right)$, 則对于 $\frac{i}{n}\leqslant t\leqslant\frac{i+1}{n}$ 有 $x\left(\frac{i}{n}\right)\geqslant x_n(t)\geqslant x\left(\frac{i+1}{n}\right)$, 从而有

$$x(t)-x\left(\frac{i}{n}\right)\leqslant x(t)-x_n(t)\leqslant x(t)-x\left(\frac{i+1}{n}\right)。$$

因此对 $t\in[0,1]$有 $|x(t)-x_n(t)|<\varepsilon$ 即 $\rho(x,x_n)=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-$

$-x_n(t)|<\varepsilon$。所以对所有 $x(t)\in M$ 作得的 $x_n(t)$ 全体所成的集 A 是 M 的 ε–綱。

由于M的一致有界性知，存在 $K>0$ 使对于凡 $t\in[0,1]$，凡 $x(t)\in M$，$|x(t)|\leqslant K$；所以有

$$|x_n(t)|\leqslant|x(t)|+|x(t)-x_n(t)|<K+\varepsilon,\quad t\in[0,1].$$

于是A也是一致有界的。又因每一折綫 $x_n(t)$ 可由其 $n+1$ 个頂点的縱坐标完全确定，所以A可看为 $n+1$ 維欧氏空間 R^{n+1} 中的有界集，从而A是列紧的。由定理 1, 系 1, 知M是列紧的。

定义 3. 任何距离空間E中，如果$(G_\iota)_{\iota\in J}$是一族开集，而

$$M\subset\bigcup_{\iota\in J}G_\iota,$$

那末(G_ι)叫做集M的一个开复盖。集M叫做紧的，是指从M的任意开复盖$(G_\iota)_{\iota\in J}$中可以取出有穷多个集$G_{\iota_1},\cdots,G_{\iota_n}$来，使$(G_{\iota_1},\cdots,G_{\iota_n})$組成$M$的开复盖（簡單的說，从$M$的每个开复盖可以取出一个有穷开复盖来）。特别地当$E$为紧集时，$E$为紧距离空間。

定理 2. 为了距离空間是列紧的，必須且只須它是紧的。

証　必要性： 設E是列紧距离空間。那末E是可分空間（定理 1, 系 2）。設 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ 是E中可数稠集。考察一切球 $S(x_n,\rho_k)$，ρ_k 遍表一切正有理数。这一共是可数多个开球。設 x 是E中任意点，而G是E中任意开集。如果 $x\in G$，那末（習題一，3）x 是G的內点，从而存在一实数 $\rho>0$，使 $S(x,\rho)\subset G$，由于$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\cdots\}$在$E$中稠，必存在一点 x_m，使 $\rho(x,x_m)<\rho/4$，再取有理数 ρ_k 使 $\rho/4<\rho_k<\rho/2$，于是 $x\in S(x_m,\rho_k)\subset S(x,\rho)\subset G$。如果$\{G_\iota\}_{\iota\in J}$是$E$的一个开复盖，那末对每个 $x\in E$，存在 G_ι 使 $x\in G_\iota$ 依上述，存在一个 x_m 及 ρ_k，使 $x\in S(x_m,\rho_k)\subset G_\iota$ 記此 G_ι 为 $G_{\iota(m,k)}$，从而$(G_{L(m,k)})$是$\{G_\iota\}_{\iota\in J}$中的可数多个集，將$(G_{\iota(m,k)})$排成 $G_1, G_2, \cdots, G_n, \cdots$。如果从$(G_n)$中不能选出有穷多个集形成 E 的开复盖。那末必存在一点 $y_n\in E\setminus\bigcup_{k=1}^{n}G_k(n=1,2,\cdots)$。依列

紧性的假定，可取出 (y_n) 的子列 $(y_{n'})$ 使 $(y_{n'})$ 收斂于 E 中一点 y_0，它是 G_m 的內点，所以存在 n_0，当

$$n'>n_0 \Longrightarrow y_{n'}\in G_m.$$

取 $n''=\max(n_0, m)$，則 $y_{n'}\in G_m$ 对一切 $n'>n''$，这与 $y_{n'}$ 的定义矛盾。

充分性：設 E 是紧的距离空間。于是对于每个 $\varepsilon>0$，$\{S(x,\varepsilon)\mid x\in\in E\}$ 組成 E 的开复盖，从而依紧性可取出有穷多个点 $x_1, \cdots, x_n$，使 $\{S(x_i,\varepsilon)\mid i=1, 2, \cdots, n\}$ 是 E 的开复盖。这就是說，$(x_1, \cdots, x_n)$ 是 E 中的 ε 网。設 (x_n) 是 E 中任意基本列。那末，如果 (x_n) 在 E 中不收斂，对于每个 $x\in E$，必存在正数 δ_x，使在球 $S(x;\delta_x)$ 中沒有点列 (x_n) 中的点，因为否則 x 便成为 (x_n) 的一个子列 (x_{n_k}) 的極限，而由于 (x_n) 是基本列，(x_n) 也便收斂于 x，与假定矛盾。由于 E 是紧的，存在有穷多个点 $z_1, \cdots, z_k$ 及有穷多个正数 $\delta_i=\delta_{z_i}(1\leqslant i\leqslant k)$，使

$$E=\bigcup_{i=1}^{k} S(z_i;\delta_i),$$

于是諸点 x_n 就不可能屬于 E 了，得出矛盾。由此知 E 是完备的。从而得知 E 是列紧的(定理 1)。

習 題 三

1. 証明距离空間 E 中的完全有界集 M 必是有界的。举例說明逆習題不成立。在 E 是 n 維欧氏空間时这兩概念等价。

2. 泛函数 $f(x)$（由空間 E 到实数域 R 上的映象叫做泛函数）叫做上(下)半連續是指 $\lim x_n=x_0 \Longrightarrow \overline{\lim} f(x_n)\leqslant f(x_0)(\underline{\lim} f(x_n)\geqslant f(x_0))$。証明在列紧空間上，上(下)半連續的有穷函数必有有穷的上(下)界，并能达到其上(下)确界。

3. 証明：如 $f(t,x)$ 在区域 G 上連續且有界，$(t_0, x_0)\in G$，則常微分方程 $\dfrac{dx}{dt}=f(t,x)$ 至少有一条积分曲綫經过 (t_0, x_0)。(利用 Arzela 定理)。

4. 求証距离空間中每个紧集必含在一个球中，并且是閉集。

5. 求証紧集的閉子集仍是紧集。

6. 求証如果 A 是距离空間 E 中的紧集，而 $x\in E$，那末必存在一点 $y\in A$，使

$$\rho(x,y)=\rho(x,E).$$

7. 求証如果 A, B 是距离空間 E 中的紧集，那末必存在 $x\in A, y\in B$，使

$$\rho(A, B)=\rho(x, y).$$

8. 如果 E, E_1 是距离空間，A 是 E 中紧集，T 是由 E 到 E_1 中的連續映象，那末 TA 是 E_1 中的紧集。

9. 求証紧距离空間必是完备的。

10. 求証定义在紧距离空間 E 并在任意距离空間 E_1 中取值的連續映象 T 是一致連續的，换句話説，对于任意 $\varepsilon>0$，必可选擇 $\delta>0$，使

$$\rho(x, y)<\delta\Longrightarrow\rho_1(Tx, Ty)<\varepsilon,$$

这里 ρ, ρ_1 各是 E, E_1 中的距离。

11. 求証在紧距离空間中第一綱集的补集必是稠集。

第二章　Fréchet 空間与 Banach 空間

§1. Frechet 空間与 Banach 空間的定义与实例

定义 1. 設有集 E(其中元以 x,y,a,b 等表示),实或复数域 K(讀如 *Kappa*,其中元以 α,β,λ,μ 等表示),集合 E 叫做綫性空間是指:对于任意 $x,y\in E$ 有确定的元 $z\in E$ 与之对应,用等式 $z=x+y$ 表示这对应关系,而这运算叫做加法运算;对于任意 $\alpha\in K$,及 $x\in E$,有确定的元 $u\in$ $\in E$ 与之对应,用等式 $u=\alpha x$ 表示这对应关系,而这运算叫做数乘法运算,且滿足:

(I) 加法运算使 E 成为加法群,即

1) $x+y=y+x$

2) $x+(y+z)=(x+y)+z$

3) 存在元 $\Theta\in E$,使 $x\in E$ 总有 $x+\Theta=x$。[Θ 称为零元]

4) 对 $x\in E$,存在 $-x\in E$ 使 $x+(-x)=\Theta$ [$-x$ 称为 x 对于 x 的逆元]。

(II) 数乘法运算具有性質

1) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$

2) $1\cdot x=x$

(III) 加法运算与数乘法运算具有关系

1) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

2) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

定义 2. 实或复数域 K 上的綫性空間 E 叫做賦准范的(簡称 (F^*)型的),是指存在由 E 到实数域 R 中的一个映象 $x\to\|x\|$,滿足下列

条件(x, y 表 E 中任意元，$\alpha_k \in K$):

1) $\|x\| \geqslant 0$ 且 $\|x\|=0 \Longleftrightarrow x=\Theta$;

2) $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$(三角形不等式);

3) $\|-x\|=\|x\|$ 并且 $\lim\limits_{\alpha_n \to 0} \|\alpha_n x\|=0$, $\lim\limits_{\|x_n\| \to 0} \|\alpha x_n\| \to 0$.

这时，$\|x\|$ 叫做元 x 的准范数。准范数叫做范数，是指在上面三个条件中，3)换成

3') $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|(\alpha \in K, x \in E)$。

如果賦准范的綫性空間上的准范数是范数，那末空間叫做賦范綫性空間(簡称(B^*)型的空間)。

例 1. 令 $C(\Omega)$ 表示紧距离① 空間 Ω 上一切实或复値連續函数全体組成的綫性空間，其中加法与数乘法定义成:

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t),\ (\alpha x)(t)=\alpha x(t)(t \in \Omega).$$

令
$$\|x\|=\max_{t \in \Omega}|x(t)|.$$

由于紧空間上的連續函数必有界且达到極大値，所以对于每个 $x \in C(\Omega)$, $\|x\|$ 是有定义的，并且滿足 1) 2) 3'), 从而 $C(\Omega)$ 是賦范綫性空間。

常用的特例有下列兩种: $\Omega=[0,1]$(看作数値綫上的子空間，这时我們常簡写成 $\boldsymbol{C}$ 代替 $\boldsymbol{C}[0,1]$; $\Omega=\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots, 0\right)$, 看作数直綫中的子空間，这时我們令 $x\left(\frac{1}{n}\right)=\xi_n$, $x(0)=\xi_0$, 从而 $x \in C(\Omega)$ 实际是一数列 $(\xi_n)_{n=0,1,2,\cdots}$, 滿足 $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ n \geqslant 1}} \xi_n=\xi_0$, 即这时 $C(\Omega)$ 是 K 中一切收斂列的全体，表示成(c)，其中范数是

① 对于 Ω 是紧(T_2)型空間时，以下的討論仍成立。

$$\|x\| = \max_n |\xi_n|.$$

例 2. 設$(\Omega, \mathfrak{B})$是一可測空間①,并設$\Omega \in \mathfrak{B}$, 这里Ω是抽象空間，$\mathfrak{B}$是Ω中子集組成的一个 Boole σ-代数②。令$V(\Omega, \mathfrak{B})$表示$(\Omega, \mathfrak{B})$上一切全加法有穷实或复値的集函数全体所組成的空間，其中加法与数乘法定义成$(\mu, \nu \in V, A \in \mathfrak{B}, \alpha \in K)$:

$$(\mu+\nu)(A) = \mu(A) + \nu(A),$$

$$(\alpha\mu)(A) = \alpha\mu(A).$$

令

$$\|\mu\| = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| \,\middle|\, E_i \in \mathfrak{B}, E_i \cap E_j = \phi \ (i \neq j), \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega, 1 \leqslant i \leqslant n \right\}.$$

可証$\|\mu\| < +\infty$不难看出$\|\mu\|$是V上的范数，而V是賦范綫性空間。

例 3. 設$(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$是測度空間，且$\mu(\Omega) < \infty$, $S(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$是其上一切殆遍有穷并且可測的实或复値函数的全体①，其中加法与数乘法定义如例 1, 殆遍相等的函数看作相等,并且令

$$\|x\| = \int_{\Omega} \frac{|x(t)|}{1+|x(t)|} \mu(dt).$$

因$\dfrac{\alpha}{1+\alpha}$是α的增函数$(\alpha \geqslant 0)$, 而

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\beta}{1+\beta} \geqslant \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta},$$

---

① 关于測度論的知識，參看附录，或其他一些标准書，例如 P. Halmos, measure Theory, 或 A. C. Zaanen, Linear Analysis, Part 1, 或 M. Loève: Probability Theory, Part 1, 或 M. E. Munroe: Introduction to Measure and Integration, Chap. II.

② Ω的子集組成的 Boole σ-环$\mathfrak{B}$, 具有$\Omega \in \mathfrak{B}$, 則$\mathfrak{B}$称为 Boole σ-代数，Boole σ-环的定义見附录。

所以不难驗明 $S(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ 是賦准范綫性空間。常用的特例乃是 $\Omega = [0, 1]$, μ 为平常 Lebesgue 測度的情形。我們簡記成 $S \equiv S[0, 1]$。

又一特例乃是令 $\Omega = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$, 而 $\mu(\{n\}) = \frac{1}{2^n}$, 从而 $\mu(\Omega) = 1$。这时 S 是由一切数列 (ξ_n) 組成: $x(n) = \xi_n (n = 1, 2, \cdots)$, 而范数是

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\xi_n|}{1 + |\xi_n|}.$$

这时空間 $S(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ 表示成 (s)。

例 4. 設 $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ 是 σ-有穷測度空間，卽 Ω 可以表示成 $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 使 $E_n \in \mathfrak{B}$ 且 $\mu(E_n) < \infty (n = 1, 2, \cdots)$。令 $L^p \equiv L^p(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$, $(p \geqslant 1)$ 表示可測且 p 次冪有和的一切函数(实值或复值)全体組成的綫性空間。定义加法与数乘法如例 1。由于不等式

$$(|\alpha| + |\beta|)^p \leqslant 2^p(|\alpha|^p + |\beta|^p)$$

可知 L^p 是綫性空間。如果令

$$\|x\| = \left[\int_{\Omega} |x(t)|^p \mu(dt)\right]^{\frac{1}{p}},$$

那末不难看出 L^p 是賦范綫性空間，但这里殆遍相等的函数被看作相等，而三角形不等式在这里不过是所謂 Minkowski 不等式：对于 $x, y \in L^p$,

$$\left[\int_{\Omega} |x(t) + y(t)|^p \mu(dt)\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\int_{\Omega} |x(t)|^p \mu(dt)\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_{\Omega} |y(t)|^p \mu(dt)\right]^{\frac{1}{p}}. \qquad (1)$$

对于 $p = 1$, 这不等式是显然的。設 $p > 1$, 取 q 使 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$。令

$x\in L^p$, $y\in L^q$, 我們先証 Hölder 不等式

$$\left|\int_\Omega x(t)y(t)\mu(dt)\right|\leqslant\left[\int_\Omega |x(t)|^p\mu(dt)\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_\Omega |y(t)|^q\mu(dt)\right]^{\frac{1}{q}}. \quad (2)$$

令 $\alpha_0=\left(\int_\Omega |x(t)|^p\mu(dt)\right)^{1/p}$, $\beta_0=\left(\int_\Omega |y(t)|^q\mu(dt)\right)^{1/q}$, 無妨設 $\alpha_0\neq 0\neq\beta_0$, 因为在二者任一等于 0 的情形不等式是显然的。又無妨設 $x(t)\geqslant 0$, $y(t)\geqslant 0$, 因为借不等式

$$\left|\int_\Omega x(t)y(t)\mu(dt)\right|\leqslant\int_\Omega |x(t)y(t)|\mu(dt)$$

一般的情形就可推得。注意 $\frac{1}{p}r^p+\frac{1}{q}-r$ 对于 $r\geqslant 0$ 在 $r=1$ 处达到其最小値 0。所以

$$r\leqslant\frac{1}{p}r^p+\frac{1}{q}\ (r\geqslant 0).$$

令 $r=\alpha\beta^{-\frac{1}{p-1}}$, 則得

$$\alpha\beta\leqslant\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}\qquad(\alpha,\beta\geqslant 0).$$

这时等号适用的条件乃是 $r=1$, 卽 $\alpha=\beta^{\frac{1}{p-1}}$, 代入

$$\alpha=\frac{1}{\alpha_0}x(t),\ \ \beta=\frac{1}{\beta_0}y(t),$$

并按 μ 在 Ω 上积分，便得(2)。

为了証 Minkowski 不等式，仍考虑 $p>1$ 的情形，并設 $x(t)\geqslant 0$, $y(t)\geqslant 0$, 那末利用 Hölder 不等式可知

$$\int_\Omega (x(t)+y(t))^p\mu(dt)=\int_\Omega (x(t)+y(t))^{p-1}x(t)\mu(dt)+$$
$$+\int_\Omega (x(t)+y(t))^{p-1}y(t)\mu(dt)\leqslant$$
$$\left(\int_\Omega (x(t)+y(t))^{q(p-1)}\mu(dt)\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_\Omega x(t)^p\mu(dt)\right)^{\frac{1}{p}}+$$
$$+\left(\int_\Omega (x(t)+y(t))^{q(p-1)}\mu(dt)\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_\Omega y(t)^p\mu(dt)\right)^{\frac{1}{p}},$$

注意 $q(p-1)=p$, 从而得出(1)来。注意在(1)中等号适用的条件乃是在上述推理处两回使用 Hölder 不等式都是等号适用，从而不难看出这条件是存在常数 λ, 使 $x(t)=\lambda y(t)$殆遍成立。

常使用的特例有兩种：其一是令 Ω 为平常 m 維欧几里得空間，μ 是平常 Lebesgue 测度，而所考虑的 L^p 表示成 $L^p(R^m)$; 其二是取 $\Omega=$ $=(1, 2, \cdots, n, \cdots)$, $\mu(\{n\})=1(n=1, 2, \cdots)$, 这时 $L^p(\Omega, \mu)$中的元实际是一数列 $x=(\xi_n)(n=1, 2, \cdots)$, 滿足

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p<\infty,$$

而范数是
$$\|x\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

这时空間表示成(l^p)。

例 5. 設 $M(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$表示测度空間$(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$上一切殆遍有界的实或复値可测函数按函数的加法与数乘法(如例1)所組成的綫性空間，这里殆遍相等的函数看作相同。令

$$\|x\|=\operatorname*{vrai\ max}_{t\in\Omega}|x(t)|^{①},$$

① 符号 Vrai max. 是 Vrai maximum (法蘭西語)的縮写，意为"真極大"。

即 $$\|x\| = \inf\{\alpha \mid \mu(\{t \mid |x(t)| > \alpha,\ t \in \Omega\}) = 0\}.$$

不难看出M是賦范綫性空間。

值得注意，如 $\mu(\Omega) < \infty$，且 $x \in M(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$，那末 $x \in L^p(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ 对任意 $p \geqslant 1$ 成立，且

$$\lim_{p\to\infty}\left[\int_\Omega |x(t)|^p \mu(dt)\right]^{\frac{1}{p}} = \operatorname{vrai}\max_t |x(t)|. \tag{3}$$

事实上，首先，

$$\left[\int_\Omega |x(t)|^p \mu(dt)\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \operatorname{vrai}\max_t |x(t)| \ (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}}.$$

令 $E_\varepsilon = \{t \mid |x(t)| \geqslant \operatorname{vrai}\max_t |x(t)| - \varepsilon\}\ (\varepsilon > 0)$，那末

$$[\operatorname{vrai}\max_t |x(t)| - \varepsilon]\, \mu(E_\varepsilon)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_\Omega |x(t)|^p \mu(dt)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

所以(3)成立。为此，当 $\mu(\Omega) < \infty$ 时，常把 $M(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$表示成 $L^\infty(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$。

特别当 $\Omega = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$，$\mu(\{n\}) = 1$ 时，令 $x(n) = \xi_n$，則 $M(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$是有界数列 $x = (\xi_n)$組成的綫性空間，其范数是

$$\|x\| = \sup_n |\xi_n|.$$

这时空間常用(m)表示。

例 6. 令 $C(-\infty, \infty)$表示$(-\infty, \infty)$上一切連續(实或复值)函数按函数的加法与数乘法組成的綫性空間，令

$$\|x\|_k = \sup_{-k \leqslant t \leqslant k} |x(t)| \text{（其中 } k \text{ 为正整数），}$$

而 $$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|x\|_k}{1 + \|x\|_k}.$$

不难看出按准范数$\|x\|$，$C(-\infty, \infty)$是賦准范綫性空間。

例 7. $C^{(k)}[0,1]$ 表定义在 $[0,1]$ 上有 (k) 阶連續导函数的函数全体，定义函数的加法与数乘法如例 1，定义

$$\|x\|=\sum_{m=0}^{k}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x^{(m)}(t)|,\ \text{这里}\ x^{(0)}(t)=x(t).$$

不难看出按范数 $\|x\|$，$C^{(k)}[0,1]$ 是賦范綫性空間。

注：1) 賦范綫性空間必是賦准范綫性空間，因为 3) 显然由定义 1 的 3′) 推出。

2) 准范数 $\|x\|$ 决定一个距离 $\rho(x,y)=\|x-y\|$，这由定义 1 中的 1) 2) 3) 可看出。

定义 3. 如果賦准范綫性空間按距离 $\|x-y\|$ 是完备的。那末它叫做 Fréchet（或(F)型）空間。同样，如果賦范綫性空間按距离 $\|x-y\|$ 是完备的那末它叫做 Banach（或(B)型）空間。

例：1) 在 $C(\Omega)$ 中，按距离

$$\|x-y\|=\max_{t\in\Omega}|x(t)-y(t)|$$

的收斂就是在 Ω 上的一致收斂。由于連續函数列的一致收斂極限仍是連續函数，可知 $C(\Omega)$ 按上述距离是完备的，从而是 Banach 空間。

2) $V(\Omega,\mathfrak{B})$ 是 Banach 空間。事实上，設 $\{\mu_n\}$ 是 V 中的基本列，即对每个 $\varepsilon>0$，存在 $n_0=n(\varepsilon)$，使

$$m,n\geqslant n_0\Longrightarrow\|\mu_m-\mu_n\|<\varepsilon.$$

依 V 中范数的定义，对于任意 $E\in\mathfrak{B}$，对于 $m,n\geqslant n_0$

$$|\mu_m(E)-\mu_n(E)|\leqslant\|\mu_m-\mu_n\|<\varepsilon,\tag{4}$$

从而 $\{\mu_n(E)\}$ 是个基本数列，所以它的極限存在，表示成 $\mu(E)$，这个 μ 是 $\mathfrak{B}$ 上的数值函数。由 (4) 得知对于任意 Ω 的有穷分割：$\Omega=$

$$=\bigcup_{i=1}^{k}E_i\cap E_j=\phi\,(i\neq j),\ E_i\in\mathfrak{B},\ \text{必然}$$

$$\sum_{i=1}^{k}|\mu_m(E_i)-\mu_n(E_i)|\leqslant\|\mu_m-\mu_n\|<\varepsilon.$$

令 $m\to\infty$, 得当 $n\geqslant n_0$ 时,

$$\sum_{i=1}^{k}|\mu(E_i)-\mu_n(E_i)|\leqslant\varepsilon. \tag{5}$$

分割既是任意的,在上不等式中取对各有穷分割的上界,得

$$\|\mu-\mu_n\|\leqslant\varepsilon \quad (n\geqslant n_0) \tag{6}$$

μ 的加法性由 μ_n 的加法性取極限容易看出。注意

对于 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$, $E_i\cap E_j=\phi$, $(i\neq j)$, $E\in\mathfrak{B}$, $E_i\in\mathfrak{B}$

$$\left|\mu\left(\bigcup_k E_k\right)-\sum_{k=1}^{m}\mu(E_k)\right|\leqslant\left|\mu\left(\bigcup_k E_k\right)-\mu_n\left(\bigcup_k E_k\right)\right|+$$

$$+\left|\mu_n\left(\bigcup_k E_k\right)-\sum_{k=1}^{m}\mu_n(E_k)\right|+\left|\sum_{k=1}^{m}\mu_n(E_k)-\sum_{k=1}^{m}\mu(E_k)\right|.$$

先取 $n\geqslant n_0$, 从而

$$\left|\mu\left(\bigcup_k E_k\right)-\mu_n\left(\bigcup_k E_k\right)\right|\leqslant\|\mu-\mu_n\|\leqslant\varepsilon,\ \left|\mu_n\left(\bigcup_{k=1}^{m}E_k\right)-\right.$$

$$\left.-\mu\left(\bigcup_{k=1}^{m}E_k\right)\right|\leqslant\varepsilon(\text{一切 } m)。$$

n_0 既固定,由于 μ_{n_0} 的全加法性,可取 m 足够大,使

$$\left|\mu_{n_0}\left(\bigcup_k E_k\right)-\sum_{k=1}^{m}\mu_{n_0}(E_k)\right|<\varepsilon.$$

于是当 m 足够大,

$$\left|\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)-\sum_{k=1}^{m} \mu(E_k)\right|<3\varepsilon.$$

ε 既是任意的，可得 μ 的全加法性。由(6)可知 $\mu\in V(\Omega, \mathfrak{B})$。于是証明了 V 的完备性。

3) $S(\Omega)$是 Fréchet 空間。設 $\lim\limits_{n, m\to\infty}\|x_n-x_m\|=0$。选取子列 $\{x_{n_k}\}$，使集 $M_k=\{t\mid t\in\Omega, 2^{-k}\leqslant|x_{n_{k+1}}(t)-x_{n_k}(t)|\}$满足 $\mu(M_k)\leqslant 2^{-k}$。这是可能的，因为一般对于 $x\in S(\Omega)$，对于任意$\delta>0$，集 $M_\delta(x)=\{t\mid t\in\Omega, |x(t)|\geqslant\delta\}$ 满足

$$\frac{\delta}{1+\delta}\mu(M_\delta(x))\leqslant\|x\|\leqslant\mu(M_\delta(x))+\frac{\delta}{1+\delta}\mu(CM_\delta(x)),$$

从而 $\|y_n\|\to 0\ (n\to\infty)\Longleftrightarrow$ 对每个$\delta>0$ $\mu(M_\delta(y_n))\to 0\ (n\to\infty)$，即按 S 中距离的收斂就是所謂按測度收斂，于是注意：

$$x_{n_k}(t)=x_{n_1}(t)+\sum_{j=1}^{k-1}(x_{n_{j+1}}(t)-x_{n_j}(t)),$$

当 $t\notin\bigcup\limits_{j=l}^{\infty} M_j$ 时，

$$\left|\sum_{j=l}^{k-1}(x_{n_{j+1}}(t)-x_{n_j}(t))\right|\leqslant\sum_{j=l}^{k-1}2^{-j}\leqslant 2^{1-l},$$

$$\mu\left(\bigcup_{j=l}^{\infty} M_j\right)\leqslant\sum_{j=l}^{\infty}2^{-j}\leqslant 2^{1-l}$$

所以
$$\mu\left(\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{j=l}^{\infty} M_j\right)=0$$

所以 $\{x_{n_k}(t)\}$ 殆遍(μ)收斂于一極限函数 $x_\infty(t)$，这函数显然是可測的。因殆遍收斂蘊涵按測度收斂，所以

$$\lim_{k\to\infty}\|x_{n_k}-x_\infty\|=0.$$

于是

$$\lim_{m\to\infty}\|x_m-x_\infty\|\leqslant\lim_{m,k\to\infty}\|x_m-x_{n_k}\|+\lim_{k\to\infty}\|x_{n_k}-x_\infty\|=0,$$

即　　$\|x_m-x_\infty\|\to 0\ (m\to\infty)$，証明了 S 的完备性。

4) $L^p(\Omega,\mathfrak{B},\mu)(p\geqslant 1)$是 Banach 空間。設 $\lim\limits_{n,m\to\infty}\|x_n-x_m\|=0$,

可取 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$，使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\|<\infty$ 令

$$y_m(t)=|x_{n_1}(t)|+\sum_{k=1}^{m}|x_{n_{k+1}}(t)-x_{n_k}(t)|\in L^p(\Omega),$$

不难看出函数列$\{y_m(t)\}$对殆一切 t 有有穷的極限 $\lim\limits_{m\to\infty}y_m(t)$。由三角形不等式及 Lebesgue-Fatou 定理可以看出

$$\int_\Omega\lim_{m\to\infty}y_m(t)^p\mu(dt)\leqslant\lim_{m\to\infty}\|y_m\|^p\leqslant\left(\|x_{n_1}\|+\sum_{k=1}^{\infty}\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\|\right)^p.$$

由此可知殆遍有穷的極限 $x_\infty(t)=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}(t)\in L^p(\Omega)$存在，而

$$\|x_\infty-x_{n_k}\|\leqslant\sum_{i=k}^{\infty}\|x_{n_{i+1}}-x_{n_i}\|,$$

从而 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_\infty$(按 L^p的尺度)。与前例一样可以看出

$$\lim_{m\to\infty}\|x_m-x_\infty\|=0,$$

而 $L^p(\Omega,\mathfrak{B},\mu)$的完备性得証。注意由上述証明可知由 P 次幂平均收斂的函数列可取一子列殆遍收斂于同極限。

(5) $M(\Omega,\mathfrak{B},\mu)$ 是 Banach 空間。証明不难，从略。

(6) $C(-\infty,\infty)$ 是 Fréchet 型空間。不难看出 $C(-\infty,\infty)$

收斂乃是指在每个有穷区間上的一致收斂，从而完备性不难导出。

注：有穷維空間。

1）这 Ω 是由 n 个点組成的散（从而紧）空間，表示成 $\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$，而 $C(\Omega)$ 中每点卽一 n 維矢量 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，范数是

$$\|x\|=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|.$$

如果在 $M(\Omega,\mathfrak{B},\mu)$ 的情形，$\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$，$\mu(\{k\})=\frac{1}{n}(1\leqslant k\leqslant n)$，$\mathfrak{B}$ 表示 Ω 的一切子集的全体，那末也得出上面的特例。这一空間表示成 (m_n)。

2）仍設 $\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$，$\mu(\{k\})=1(1\leqslant k\leqslant n)$，$L^p(\Omega,\mathfrak{B},\mu)$ $(1\leqslant p<\infty)$ 中的元也是 n 維矢量 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，其范数是

$$\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\right)^{1/p}.$$

这个空間表示成 (l_n^p)。

注意 (m_n)，$(l_n^p)(p\geqslant 1)$ 都是一切 n 維矢量（实或复）所組成的 Banach 空間，卽它們由同样多的元組成，只是范数不同而已！

定理 1. 在賦准范綫性空間 E 中，$x\to\|x\|$ 是由 E 到 K 中的連續映象，并且 $(\alpha,x)\to\alpha x$ 是由 $K\times E$ 到 E 中的連續映象。

証 准范数的連續性容易从三角形不等式推得的关系

$$\big|\,\|x\|-\|y\|\,\big|\leqslant\|x-y\|$$

导出。αx 的連續性在賦范空間的情形很容易証明。在一般賦准范的情形，注意

$$\|\alpha x-\alpha_n x_n\|\leqslant\|\alpha x-\alpha_n x\|+\|\alpha_n x-\alpha_n x_n\|.$$

上不等式右边第一項当 $\alpha_n\to\alpha$ 时趋于零，这由定义 2 得知。为了証明第二項趋于零，只須証

(7) $|\alpha|\leqslant M<\infty$，$x_n\to\Theta\Longrightarrow\alpha x_n\to\Theta$ 对 $|\alpha|\leqslant M$ 一致成立。为此，令 $P_n(\alpha)=\|\alpha x_n\|$，且因

$$P_n(\alpha+\beta)\leqslant P_n(\alpha)+P_n(\beta),$$

从而 $|P_n(\alpha)-P_n(\beta)|\leqslant P_n(\alpha-\beta)$，卽 P_n 是 K 上連續函数，因为 $\lim\limits_{\alpha_n\to 0}\|\alpha_n x\|=0$。又依定义 2，由于 $x_n\to\Theta$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(\alpha)=0$ 对每个 α 成立。依 Егоров 定理在 K 上(卽数直綫或数平面)存在可測子集 A，使 mes A(卽 A 的 Lebesgue 測度)>0，而在 A 上 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(\alpha)=0$ 一致成立。注意 Lebesgue 測度按坐标的平移是連續的①，卽

$$\text{mes}((A+\sigma)\ominus A)\to 0\ (\sigma\to 0),$$

这里 $A\ominus B$ 表示集 A,B 的对称差 $(A\cup B)\setminus(A\cap B)\equiv(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$。于是存在正数 σ_0，使

$$|\sigma|\leqslant\sigma_0\Longrightarrow\text{mes}((A+\sigma)\ominus A)<\frac{1}{2}\text{ mes }A,$$

特别由此可知 $\text{mes}((A+\sigma)\cap A)>0$。因此对每个滿足 $|\sigma|\leqslant\sigma_0$ 的 σ，必存在 $\alpha,\alpha'\in A$，使 $\sigma=\alpha-\alpha'$。于是因 $P_n(\sigma)\leqslant P_n(\alpha)+P_n(\alpha')$ 与 A 的取法可知对于一切滿足 $|\sigma|\leqslant\sigma_0$ 的 σ，$\lim\limits_{n\to\infty}P_n(\sigma)=0$ 一致成立。取正整数 k，使 $k\sigma_0\geqslant M$，于是 $\|k\sigma x_n\|\leqslant k\|\sigma x_n\|=kP_n(\sigma)$，所以对于 $|\alpha|\leqslant M\leqslant k\sigma_0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n\left(\frac{1}{k}\alpha\right)=0$ 对 $|\alpha|\leqslant M$ 一致成立。因为 $0\leqslant P_n(\alpha)\leqslant kP_n\left(\frac{1}{k}\alpha\right)$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(\alpha)=0$。从而(7)得証。②

注：由此可知定义 2 中的条件 3)等价于

$$\|x\|=\|-x\|,\ \text{且}\ \alpha_n\to\alpha,\ x_n\to x\Longrightarrow\alpha_n x_n\to\alpha x.$$

事实上，

$$\|\alpha_n x_n-\alpha x\|\leqslant\|\alpha_n x_n-\alpha_n x\|+\|(\alpha_n-\alpha)x\|$$

不等式右边第一項按(7)一致收斂于 0，而第二項按 3)收斂于 0。

定义 4. 賦准范(或賦范)綫性空間 E 叫做等价 (équivalent) 于賦

① 見 P. R. Halmos：測度論 §61. 定理 I。

② 以上証明是屬于角谷靜夫的，参看吉田耕作[18]，10 頁(本章 §8 参考文献)。

准范(或賦范)綫性空間 E_1, 是指存在由 E 到 E_1 上的一个代数同構 φ: 即一对一映象 φ, 使

$$\varphi(\alpha x+\beta y)=\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y),$$

并且这同構 φ 是保距(保范)的:

$$\|\varphi x\|=\|x\| \quad (x\in E).$$

这时 φ 叫做等价映象。

注: 等价空間的例將在以后举出。

注意在前面的許多例中，有許多并不是以函数为它的元的（象 $C(\Omega)$那样)，而是以函数类为其元，例如在 S, L^p, M 中都是以函数的等价类（即凡殆遍相等的函数看作一类）为元的。一般，設 E 是綫性空間，其上定义一个实値函数 $\|x\|$, 滿足定义 2 中准范数(或范数)的一切性質，但不假定 $\|x\|=0\Longrightarrow x=\Theta$。我們由 E 出發可以作出一个賦准范(賦范)的綫性空間来。为此，我們引入商空間的概念。

定理 2. 設 E 是数域 K 上的綫性空間，E 上有一非負値函数 $\|x\|$, 滿足定义 2 中的条件 2) 3)(或 2) 3′))。設 A 是 E 的一个綫性子空間，(即 E 的一个子集，使 $x,y\in A$, $\alpha\in K\Longrightarrow\alpha x\in A$, $x+y\in A$), 并且滿足下列条件: $x_n\in A$, $\|x_n-x\|\to 0(n\to\infty)\Longrightarrow x\in A$(即 A 是閉的)。利用 $x\sim y(A)\Longleftrightarrow x-y\in A$ 規定 E 中一个等价关系，按这等价关系的一切等价类全体組成一个綫性空間 E/A, 在其上

$$\|\dot{x}\|=\inf_{x\in\dot{x}}\|x\| \quad (\dot{x}\in E/A) \tag{8}$$

是滿足 2) 3)(相应地 2) 3′))的非負値函数。如果 A 包含一切滿足 $\|x\|=0$ 的元 x, $\|\dot{x}\|$ 是准范数(相应地是范数)，使 E/A 成为賦准范（賦范)綫性空間，叫做 E 按 A 的商空間。

証: 不难証明

$x\sim x(A)$; $x\sim y(A)\Longrightarrow y\sim x(A)$; $x\sim y(A)$, $y\sim z(A)\Longrightarrow x\sim z(A)$, 从而$\sim$确是等价关系，并且如果定义 $\dot{x}=\{y\,|\,y\sim x(A),\ y\in E\}$,

并且

$$\dot{x}+\dot{y}=\widehat{x+y}^{\bullet},\quad \alpha\dot{x}=\widehat{\alpha x}^{\bullet},$$

则这些等价类 $\dot{x}$ 形成一綫性空間 E/A。注意

$$\|\dot{x}+\dot{y}\|=\inf_{\substack{x\in\dot{x}\\ y\in\dot{y}}}\|x+y\|\leqslant\inf_{x\in\dot{x}}\|x\|+\inf_{y\in\dot{y}}\|y\|=\|\dot{x}\|+\|\dot{y}\|.$$

如果$\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$，那末由(8)看出$\|\alpha\dot{x}\|=|\alpha|\,\|\dot{x}\|$。如果 $\|x\|$ 是滿足定义 1 的 3)的，那末取定一个 $x\in\dot{x}$，則当 $\alpha_n\to 0$ 时，

$$\|\alpha_n\dot{x}\|\leqslant\|\alpha_n x\|\to 0\ (n\to\infty).$$

設 $\|\dot{x}_n\|\to 0$ 依(8)可取 $z_n\in\dot{x}_n$，使

$$\|z_n\|<\|\dot{x}_n\|+\frac{1}{n},$$

从而 $\|z_n\|\to 0$。于是 $\|\alpha\dot{x}_n\|\leqslant\|\alpha z_n\|\to 0$。所以得知 $\|\dot{x}\|$ 也滿足定义 1 的 3)。

如 $\|x\|=0\Longrightarrow x\in A$，那末当 $\dot{x}\neq\dot{\Theta}$ 时，必存在 $x\in\dot{x}$，$x\notin A$。如果 $\|\dot{x}\|=0$，依(8)存在 $x_n\in\dot{x}$，使 $\|x_n\|\to 0$，但 x_n 可表示成 $x-z_n$，$z_n\in A$，从而 $\|x-z_n\|\to 0$，而依关于 A 的假定，$x\in A$，得出矛盾。所以这时 $\|\dot{x}\|$ 是准范数(或相应地是范数)。

注： 特别我們証明了定理 2 前注中所叙述的事实，即如果 E 是綫性空間，其上有一非負值函数 $\|x\|$ 滿足定义 2 中的 2) 3)（或 2) 3′)），那末 $A=\{x\,|\,\|x\|=0,x\in E\}$ 是閉綫性子空間，因为

$$\|x\|=0,\ \|y\|=0\Longrightarrow\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|=0,$$

$$\|x_n\|=0,\ \|x_n-x\|\to 0\Longrightarrow\|x\|\leqslant\|x-x_n\|+\|x_n\|\to 0,$$

$$\text{从而 }\|x\|=0,$$

$$\|x\|=0\Longrightarrow\|\alpha x\|=0,$$

最后一結果乃是因为令 $x_n=x$，則 $\|x_n\|\to 0$，故依定义 1 的 3) $\|\alpha x\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|\alpha x_n\|=0$，于是依定理 2，$E/A$ 是賦准范(或相应地是賦范)綫性空間。注意在这情形下，如果 $x\sim y(A)$，那末 $x=y+z$，$z\in A$，即 $\|z\|=0$，从而

$\|x\|\leqslant\|y\|$，同理，$\|y\|\leqslant\|x\|$，即 $\|x\|=\|y\|$，所以这时 $\|\dot{x}\|=\|x\|$ ($\dot{x}\in E/A$)。

系：如果在定理 2 中，E 是按 $\|x\|$ 完备的，即由 $\|x_n-x_m\|\to 0(n, m\to\infty)$ 可知存在 $x\in E$，使 $\|x_n-x\|\to 0$ $(n\to\infty)$，那末商空間 E/A 也是完备的，从而当 $\|x\|=0\Longrightarrow x\in A$ 时，E/A 是 Fréchet 型(或相应地，Banach 型空間)。

証：設在商空間 E/A 中，$\|\dot{x}_n-\dot{x}_m\|\to 0$ $(n, m\to\infty)$，取$(\dot{x}_n)$的子列$(\dot{x}_{n_k})$使 $\sum\limits_k\|\dot{x}_{n_{k+1}}-\dot{x}_{n_k}\|<\infty$。取任意 $z_1\in\dot{x}_{n_1}$；取 $z_2\in\dot{x}_{n_2}$，滿足$\|z_2-z_1\|<2\|\dot{x}_{n_2}-\dot{x}_{n_1}\|$，或 $\frac{1}{2^2}$如前者等于 0；再取 $z_3\in\dot{x}_{n_3}$，滿足 $\|z_3-z_2\|<\max(2\|\dot{x}_{n_3}-\dot{x}_{n_2}\|, \frac{1}{2^3})$，等等。于是$\{z_n\}$是$E$中基本列，依$E$的完备性，存在 $x\in E$，使 $\|z_n-x\|\to 0$。令 $\dot{x}$ 为按 A 含 x 的等价类，可知$\|\dot{x}_{n_k}-\dot{x}\|\leqslant\|z_k-x\|\to 0$。証完。

定理 3. 每个赋准范(相应地，赋范)綫性空間 E 必等价于一个 Fréchet 型(相应地，Banach 型)空間 $\hat{E}$ 中的稠綫性子空間，換句話說，必存在一个由 E 到$\hat{E}$中的映象 φ，使 $\varphi(\alpha x+\beta y)=\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y)$，而且 $\|\varphi(x)\|=\|x\|$。

注：$\hat{E}$叫做 E 的完备化。下面証明中完备化的方法正是 Cauchy 对实数所采用者。

証：令 E_1 表示E中一切基本列(x_n)[即 $\|x_n-x_m\|\to 0$ $(n, m\to\infty)$]的全体。定义

$$(x_n)+(y_n)=(x_n+y_n),\quad \alpha(x_n)=(\alpha x_n),$$

不难看出 E_1 是綫性空間。令 $\|(x_n)\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|$ 則因为 $|\|x_n\|-\|x_m\||\leqslant|x_n-x_m|$，可知这里的極限确存在。如果$\|x\|$是范数，可以看出$\|(x_n)\|$滿足定义 2 的 2) 3′)。如果 $\|x\|$ 是准范数，那末不难証明 3)也成立。由一般距离空間的完备化定理可知，如果 E_0 表示E中一切零列(x_n)的

全体: $\|x_n\|\to 0\ (n\to\infty)$, 那末$E$等距于商空間$E_1/E_0$中一个稠子集，这等距由映象$\varphi$实現，其中$\varphi(x)$表示由$(x_n)$ $[x_n=x$, 一切$n]$决定的等价类。由于定义 2 的 2), 3)(或 3')知当$\|x_n\|\to 0$, $\|y_n\|\to 0$时，就有$\|x_n+ +y_n\|\to 0$, $\|\alpha x_n\|\to 0$, 可知E_0是E_1的綫性子空間。E_0是E_1閉子空間，因为如果 $\|(x_n^{(k)})-(x_n)\|\to 0\quad (k\to\infty)$, $(x_n^{(k)})\in E_0$,

那末
$$\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\|x_n^{(k)}-x_n\|=0,$$
即对每个$\varepsilon>0$, 可取k_0, 使$k\geqslant k_0$时
$$\lim_{n\to\infty}\|x_n^{(k)}-x_n\|<\varepsilon.$$
特别可取$n(k_0)=n(\varepsilon)$, 使$n\geqslant n(k_0)$时
$$\|x_n^{(k)}-x_n\|<\varepsilon.$$
于是因
$$\|x_n\|\leqslant\|x_n^{(k_0)}-x_n\|+\|x_n^{(k_0)}\|,$$
先取k_0, 使$n\geqslant n(k_0)$时上式右边第一項$<\varepsilon$, 再取n', 使$n\geqslant n'(k_0)$时$\|x_n^{(k_0)}\|<\varepsilon$, 后者可能，是因为$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n^{(k_0)}\|=0$。从而$(x_n)$是零列。由此可知$\varphi$不仅是等距的(即$\|\varphi x\|=\|x\|$),并且是綫性的，即$\varphi(\alpha x+\beta y)= =\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y)$。証完。

除了作商空間，也可借作积空間得出新的賦准范綫性空間。

定义 5. 設E, E_1都是賦准范(賦范)綫性空間。定义积空間$E\times \times E_1$由一切元偶$\{x, y\}(x\in E, y\in E_1)$組成，其中运算与准范数定义成
$$\{x_1, y_1\}+\{x_2, y_2\}=\{x_1+x_2, y_1+y_2\},$$
$$\alpha\{x, y\}=\{\alpha x, \alpha y\},$$
$$\|\{x, y\}\|=\|x\|+\|y\|.$$

定理 4. 两賦准范(賦范)綫性空間E, E_1的积空間$E\times E_1$仍是賦准范(相应是賦范的)綫性空間。如果E, E_1是完备的，$E\times E_1$也是完备的。

証: 定义 2 的 1) 2)都是不待証的。3')也是容易的。今証 3)。只須看一下$\|\{x_n, y_n\}\|\to 0\Longrightarrow\|\alpha\{x_n, y_n\}\|=\|\{\alpha x_n, \alpha y_n\}\|=\|\alpha x_n\|+\|\alpha y_n\|$

$\to 0$, 因为这时 $\|x_n\|+\|y_n\|\to 0$, 其余不难看出。

如果 E, E_1 是完备的，設 $\|\{x_n, y_n\}-\{x_m, y_m\}\|\to 0$ $(n, m\to\infty)$, 那末 $\|x_n-x_m\|\to 0$, $\|y_n-y_m\|\to 0(n, m\to\infty)$。設 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y$, 那末 $\|\{x_n, y_n\}-\{x, y\}\|=\|x_n-x\|+\|y_n-y\|\to 0$, 从而 $E\times E_1$ 的完备性証完。

注意当我們談到綫性空間結構与距离空間結構的結合时，很自然想到的仍是一个更广义的結合，即一綫性空間 E, 其上賦有距离 $\rho(x, y)$, 使 E 同时是距离空間，幷使 $(x, y)\to x+y$, $(\alpha, x)\to\alpha x$ 各是由 $E\times E$ 到 E 中，由 $K\times E$ 到 E 中的連續映象。这种空間叫做距离綫性空間。賦准范綫性空間的定义要求得比这还多，因为除这里所說的一切(即定义 2 中的 3))外，还要求

$$\rho(x, y)=\|x-y\|=\rho(x-y, \Theta),$$

也就是說 $\rho(x+z, y+z)=\rho(x, y)$, 这叫做距离的不变性，这种距离也叫做 (F) 距离。S. Banach 在他的經典性著作 Théorie des opérations linéaires 中提出了問題：即一个距离綫性空間是否一定可以改賦一个等价距离，使得新距离是(F)型的[見上引的書，232 頁]。这問題的答案是肯定的，特别完备的距离綫性空間必可改賦一个等价的距离，使它成为 Fréchet 空間，見 V. L. Klee, Jr.: Invariant metrics in groups (Solution of a problem of Banach), Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 484—487。至于賦准范綫性空間与賦范綫性空間的关系，讀者在学習拓扑綫性空間时，將会了解得更清楚。

習 題 一

1. 求証 $l^p(p>0)$ 是 Fréchet 空間（在 $p\geqslant 1$ 时取 $\|x\|=\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, 在 $0<p<1$ 时取 $\|x\|=\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p$)。

2. 設$V[a,b]$表示$[a,b]$上一切囿变，右連續实値函数全体按平常函数的运算組成的綫性空間。定义

$$\|x\|=|x(a)|+\underset{a\leqslant t\leqslant b}{\mathrm{var}}\, x(t),$$

这里 $\underset{a\leqslant t\leqslant b}{\mathrm{var}}\, x(t)$表示 $x(t)$ 在区間$[a,b]$中的全变分:

$$\underset{a\leqslant t\leqslant b}{\mathrm{var}}\, x(t)=\sup \sum_{i=1}^{n}|x(t_i)-x(t_{i-1})|,$$

这里上确界是按 $[a,b]$ 的一切有穷分割 $\mathscr{P}$: $a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$ 而取的。求証 $V[a,b]$ 是 Banach 空間。考察 $V[a,b]$ 与一般的 $V(\Omega,\mathfrak{B})$的关系。

3. 設M_0是集Ω上一切有界函数的全体。設运算就是平常函数的运算，而令

$$\|x\|=\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|,$$

那末M_0是 Banach 空間。

4. 設$H^p(0<p\leqslant 1)$表示$[a,b]$上一切滿足 Hölder 条件

$$|x(t_1)-x(t_2)|\leqslant M|t_1-t_2|^p$$

的函数全体按平常运算組成的綫性空間。令

$$\|x\|=|x(0)|+\sup_{a\leqslant t_1<t_2\leqslant b}\left|\frac{x(t)-x(t_2)}{(t_1-t_2)^p}\right|,$$

那末H^p是 Banach 空間。

5. Fréchet 空間中元列(x_n)叫做有界列，是指

$$\theta_n\in K,\quad \Theta_n\to 0\Longrightarrow \theta_n x_n\to\Theta$$

求証

1) 为了(x_n)是有界列必須且只須对于任意 $\varepsilon>0$, 存在θ_0使$|\theta|\leqslant|\theta_0|\Longrightarrow\|\theta x_n\|<\varepsilon$ $(n=1,2,\cdots)$。

2) 如(x_n)是有界列，則$\sup\limits_n\|x_n\|<+\infty$。

3) 在 Banach 空間中 2) 的逆命題也成立，但在 Fréchet 空間中 2) 的逆命題不必成立。

6) 設Γ表示$[0,1]$上可测实函数列 $y=(\eta_n(t))(n=1,2\cdots)$的全体，加法与数乘法定义如例 1, 令

$$\|y\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\int_0^1\frac{|\eta_n(t)|}{1+|\eta_n(t)|}dt.$$

求証Γ是 Fréchet 空間。

7. 設B_p表示$(-\infty,\infty)$上一切p次冪在每个有穷区間上可积分的函数 $x(t)$全体按平

常函数运算組成的綫性空間，令

$$\|x\|=\overline{\lim_{T\to\infty}}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

求証当 $p\geqslant 1$ 时，B_p 是 Banach 空間，叫做 Besikowitch 空間 [J. Mazurkiewicz, C. R. 208, 1527–8]。

8. 設 E_ι $(\iota\in J)$ 是一族 Banach空間(J 是具任意势的标号集)。設 $E=\{(x_\iota)\mid x_\iota\in E_\iota(\iota\in J),\ \sup\limits_{\iota\in J}\|x_\iota\|<\infty\}$。在 E 中令

$$(x_\iota)+(y_\iota)=(x_\iota+y_\iota)\quad(\iota\in J),$$
$$\alpha(x_\iota)=(\alpha x_\iota)(\iota\in J),$$
$$\|(x_\iota)\|=\sup_{\iota\in J}\|x_\iota\|,$$

求証 E 是 Banach 空間。注意这空間与習題 2 中空間 M_0 的关系。

9. 設 $E_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是 Banach 空間，在积綫性空間 $\prod\limits_{i=1}^{n} E_i$ 中定义

$$\|x\|=\max\{\|x_1\|_{E_1},\cdots,\|x_n\|_{E_n}\},$$

或

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p{}_{E_i}\right)^{\frac{1}{p}}\quad(1\leqslant p<\infty),$$

这里 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。求証在兩种情形下积空間都是 Banach 空間。

10. 設 $L=L[0,1]$, $V=V[0,1]$, 而对每个 $x(t)\in L$, 令

$$(Tx)(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau,$$

那末 T 是把 L 映在 V 中一切絕对連續函数全体組成的子空間之上的等价映象。

11. 設 $\psi(t)$ 是实变数 t 的实函数，定义在$[0,+\infty)$上，滿足下列条件：

a) $\psi(0)=0$;

b) $\psi(t)$是 t 的增函数；

c) $\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t)=\alpha$(有穷)；

d) $\psi(t)$有在$[0,+\infty)$上連續的一阶导函数 $\psi'(t)$，且 $\psi'(t)$是 t 的减函数。求証 $\psi(u+v)\leqslant\psi(u)+\psi(v)(u,\ v\to 0)$，并且对于一測度空間$(\Omega,\mathfrak{B},\mu)(\mu(\Omega)<+\infty)$ 上一切殆遍有穷可測函数全体 $S(\Omega,\mathfrak{B},\mu)$中，定义

$$\|x\|=\int_\Omega\psi(|x(t)|)\mu(dt),\quad(x\in S(\Omega,\mathfrak{B},\mu)).$$

求証 $S(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$是 Fréchet 型空間。

12. 設$C^{(m)}$是$[0,1]$上一切具連續m阶導函数的函数$x(t)$的全体。設$C^{(m)}$中运算乃是平常的函数运算，而

$$\|x\| = \sum_{p=0}^{m} \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x^{(p)}(t)|.$$

求証$C^{(m)}$是 Banach 空間。設C_m表示$m+1$个 Banach 空間$C[0,1]$按第6題的第二种范数($P=1$)所作积空間:

$$\|(x_1, x_2, \cdots, x_{m+1})\| = \sum_{i=1}^{m+1} \|x_i\| \quad (x_i \in C[0,1], 1\leqslant i\leqslant m+1).$$

求証$C^{(m)}$等价于C_m中的一个閉綫性子空間。

13. 設E是 Banach 空間，L是E中閉綫性子空間，$x_0 \in E$，且 $\operatorname{dist}(x_0, L) \equiv \inf_{x\in L} \|x_0 - x\| = d > 0$，那末

$$L_0 \equiv \{\alpha x_0 + y \mid \alpha \in K, y \in L\}$$

是E中閉綫性子空間。

14. 設E是 Banach 空間，S_n是一串遞减的閉球:

$$S_n \equiv \{x \mid x \in E, \|x_n - c_n\| \leqslant \rho_n\}, \quad c_n \in E (n=1,2,\cdots),$$

而$S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \cdots$。求証

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \neq \phi.$$

15. 求証有穷維空間E上按任意范数的收斂必等价于按坐标收斂；即如$x_k = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(k)} e_i (k=0,1,2,\cdots)$，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$是空間的基(即$E$中一組綫性無关元，使$E$中任意元可表示成$e_1, \cdots, e_n$的綫性組合：$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$)，那末 $\|x_k - x_0\| \to 0 \ (k\to\infty) \Longleftrightarrow \xi_i^{(k)} \to \xi_i^{(0)}$ $(k\to\infty, i=1,2,\cdots n)$。

§2. 綫性算子与綫性泛函数

定义 1. 由某賦准范綫性空間E中某集$\mathfrak{D}$到賦准范綫性空間E_1中的映象T叫做算子，$\mathfrak{D}$叫做T的定义域，表示成$\mathfrak{D}(T)$，而$\{y \mid y \in E_1, \exists x \in \mathfrak{D}(T), y = Tx\} \equiv \mathfrak{W}(T)$叫做$T$的值域。算子$T$叫做加法的，指

$$T(x+y) = Tx + Ty \quad (x, y \in \mathfrak{D}(T));$$

T叫做齐性的，指

$$T(\alpha x)=\alpha Tx \quad (x\in\mathfrak{D}(T),\ \alpha\in K).$$

加法齐性算子叫做綫性的。由一般距离空間上映象的連續性的定义，可以定义算子 T 为連續的，指

$$x_n\to x_0(\text{在}\mathfrak{D}(T)\text{中})\Longrightarrow Tx_n\to Tx_0(\text{在 } E_1 \text{ 中})。$$

算子叫做有界的，是指存在常数 α，使

$$\|T_x\|\leqslant\alpha\|x\| \quad (x\in\mathfrak{D}(T)).①$$

特别如果象空間 E_1 是 K，那末算子 T 叫做泛函数，平常用 f, g，等表示。算子 T 叫做稠定的，指 $\overline{\mathfrak{D}(T)}=E$，即 $\mathfrak{D}(T)$ 在 E 中稠。又特别如果 E 是 K，那末 T 叫做抽象函数，平常用 t 表示 $\mathfrak{D}(T)$ 中的元，从而用 $x(t)$ 表抽象函数：对每个 $t\in\mathfrak{D}$，$x(t)$ 是 E_1 中的元。

注 在数学的各部門中，以及在数学物理提出的种种問題中，有着大量的各种算子的例。現在举出一些下面常要談到的有用的例。不用說，平常数学分析中所謂"函数"正是 $E=E_1=K$ 时算子的特例。以后我們將看到对于算子也存在着与平常数学分析平行的一些理論。

例 1. 設 E 与 E_1 各是有窮維——n 維和 m 維的 Banach 空間(范数可以是 § 1 中所举的任何一种)。这时 E, E_1 中的元各可表示成 n, m 数組：

$$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n),\ y=(\eta_1,\cdots,\eta_m),\ (\xi_i,\ \eta_j\in K,\ 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m).$$

設 $f_j(1\leqslant j\leqslant m)$ 是 m 个 n 变数函数，那末

$$\eta_j=f_j(\xi_1,\cdots,\xi_n) \quad (1\leqslant j\leqslant m)$$

是由 E 到 E_1 中的算子，T: $y=Tx$。它的定义域 $\mathfrak{D}(T)$ 是 $f_j(1\leqslant j\leqslant m)$ 在 K^n 中定义域的交。由于有窮維空間范数所决定的收斂等价于按坐标收斂(§ 1 習題一，13)，可知为了 T 連續，必須且只須每个 f_j 是平常連續函数。

① 在不同空間中准范数一般是不同的，但在一般討論中如果沒有混淆可能，我們都用 $\|x\|$ 表示它而不加說明。

特別当每个 f_j 是一次齐次函数(按 Euler 意义)[①] 时，相应的算子 T 是齐性的，又当每个 f_j 是代数中所謂一次齐式

$$f_j(\xi_1, \cdots, \xi_n)=\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\xi_k \quad (1\leqslant j\leqslant m)$$

时，相应的 T 定义在全 E 上，并是連續性算子。

特別 E 上的綫性齐式乃是 E 上的綫性泛函数。

例 2. 在 $L^p(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ 中，如果 $p>1$, 并且

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1,$$

那末依 §1 的 Hölder 不等式(2), 对于每个 $y\in L^q(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$,

$$f(x)=\int_\Omega x(t)y(t)\mu(dt) \quad (x\in L^p)$$

是定义在全 L^p 上的加法齐性泛函数。仍用 Hölder 不等式可以証明 f 是連續綫性泛函数。

特別取 $\Omega=\{1, 2, 3, \cdots, \cdots\}$, $\mu(\{k\})=1 \quad (k=1, 2, \cdots)$, 那末

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i, \ x=(\xi_i)\in l^p, \ y=(\eta_i)\in l^q,$$

是 l^p 上的連續綫性泛函数。

例 3. 設測度空間$(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$, $K(s, t)$是按測度空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ 与它自己的积測度空間[②]中的可測函数，并且

$$\iint_{\Omega\times\Omega}|K(s, t)|^2(\mu\times\mu)(dsdt)<+\infty.$$

由 Hölder 不等式不难看出

① 見例如 А. Я. Хинчин: 数学分析簡明教程 § 93。

② 測度空間的积測度空間的定义見附录，或 Halmos: 測度論 § 35。

$$y=Tx:\ (Tx)(s)=\int_{\Omega}K(s,t)x(t)\mu(dt)$$

是由 $L^2(\Omega,\mathfrak{B},\mu)$到它自己之中的連續綫性算子，它也是有界的：

$$\|Tx\|^2=\int_{\Omega}\mu(ds)\left|\int_{\Omega}K(s,t)x(t)\mu(dt)\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant\iint_{\Omega\times\Omega}|K(s,t)|^2(\mu\times\mu)(dsdt)\cdot\|x\|^2,$$

这里
$$\|x\|^2=\int_{\Omega}|x(t)|^2\mu(dt).$$

这个算子叫做 Hilbert－Schmidt 型积分算子，在綫性积分方程理論中是很基本的①。

特别当 $L^2(\Omega,\mathfrak{B},\mu)$特殊化成 l^2 时，相应算子 T 可以表示成

$$\eta_i=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}\xi_j\quad(i=1,2,\cdots),$$

这里 $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^2<+\infty$,

即这时算子用無窮陣(α_{ij})表示出来。

例 4. 在微分方程理論中有大量的微分算子，例如

$$y=Tx:\ y(t)=\frac{d}{dt}x(t)$$

是定义在 $C[0,1]$上并在 $C[0,1]$ 中取值的綫性算子。它是有界的，因为

$$\|Tx\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|y(t)|\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|+\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x'(t)|=\|x\|.$$

又考察

① 在积分方程理論中考察的，还假定 $K(s,t)=K(t,s)$。見 Петровский, И. Г.：积分方程理論講义。

$$y=Tx:\quad y(s,t)=\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)x(s,t).$$

設 M 是 $L^2(R^2)$[R^2 表二維欧几里得空間，其上定义有平常 Lebesgue 測度]中一切具有連續二阶偏导函数并滿足边界条件 $x(s,t)|_\Gamma=0$ (Γ 是 R^2 中某一平滑閉曲綫)的函数 $x(s,t)$的全体，那末，T是定义在M上的綫性算子。

又与 Schrödinger 方程关联的微分算子

$$y=Tx:\quad y(\xi,\eta,\zeta,t)=-\frac{h^2}{2\mu}\nabla^2 x+u(\xi,\eta,\zeta,t)x(\xi,\eta,\zeta,t).$$

这里 ∇^2 表示 Laplace 算子

$$\nabla^2 x=\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial \zeta^2}$$

是定义在 $L^2(R^3)$ 中具二阶連續偏导函数所形成的綫性子空間上的綫性算子(t 看成固定，u 表示有界連續函数)。

例 5. 在变分法中常考察定义在 $C^{(n)}$[見 §1, 習題 9]上的泛函数

$$f(x)=\int_0^1 F(t,x(t),x'(t),\cdots,x^{(n)}(t))dt.$$

F 是 $n+2$ 个变量的連續函数，这是非綫性的。

例 6. 在很多实用問題中提出了非綫性积分方程的問題，其中出現了非綫性积分算子。例如 Урысон 算子

$$y=Tx:\quad y(s)=\int_a^b K(s,t,x(t))dt,$$

$K(s,t,u)(a\leqslant s,t\leqslant b,-\infty<u<\infty)$是三变量函数，并且对 $a\leqslant s,t\leqslant b$, $|u|\leqslant\alpha(\alpha>0)$ 是三变量的連續函数。那末 T 是定义在 $C[a,b]$ 中球 $S(\alpha)=\{x|x\in C,\|x\|\leqslant\alpha\}$ 上的算子。又如 Hammerstein 型算子

$$y=Tx:\quad y(s)=\int_a^b K(s,t)\varphi(t,x(t))dt,$$

这里，例如可設

$$\int_a^b\int_a^b K^2(s,t)ds\,dt<+\infty,\quad K(s,t)=K(t,s),$$

而 $\varphi(t,u)$ 是两个变量 t,u 的連續函数($a\leqslant t\leqslant b,\ -\infty<u<\infty$)。那末 T 是定义在 $L^2[a,b]$ 中某子空間上的算子。这些算子的定义区域与連續性的研究往往不是很簡單的①。

例 7. 在概率論中，我們考察滿足特殊条件 $\mu(\Omega)=1$ 的測度空間 $(\Omega,\mathfrak{B},\mu)$[叫做概率空間]。可測函数 $x(\omega)(\omega\in\Omega)$叫做随机变量(即 $x(\omega)\in S(\Omega,\mathfrak{B},\mu)$)，$\Omega$中可測集表示事件，事件的概率就是相应可測集的測度。如果特别 $x(\omega)\in L^1(\Omega,\mathfrak{B},\mu)$。那末

$$E(x)\equiv\int_\Omega x(\omega)\,\mu(d\omega),$$

叫做随机变量 x 的中值(平均值，又叫数学期望值)。这 $E(x)$是定义在 S 的綫性子空間 L^1 上的綫性泛函数。这个泛函数不是連續的。例如設 $\Omega=[0,1]$，μ 表平常 Lebesque 測度，取

$$x_n(t)=\begin{cases} n^2t & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{n}\\ 2n-n^2t & \dfrac{1}{n}\leqslant t\leqslant\dfrac{2}{n}\\ 0 & \dfrac{2}{n}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

則 $x_n(t)\to 0\ (n\to\infty)$，但 $E(x_n)=1$，$E(x_0)=0$ 所以 $E(x)$不連續。

此外，也常考察下列泛函数，

$$M^{(p)}(x)\equiv\int_\Omega (x(\omega))^p\mu(d\omega)\equiv E(x^p),$$

---

① 例如，見 Красносельский, M. A.：非綫性积分方程理論中的拓扑方法，第一章。

$$\overline{M}^{(p)}(x)\equiv\int_{\Omega}|x(\omega)|^{p}\mu(d\omega)\equiv E(|x|^{p}),$$

$$\overline{M}_0^{(p)}(x)=\int_{\Omega}|x(\omega)-E(x)|^{p}\mu(d\omega)=E(|x-E(x)|^{p}),$$

$$M_0^{(p)}(x)=\int_{\Omega}(x(\omega)-E(x))^{p}\mu(d\omega)=E((x-E(x))^{p}),$$

$$V(x)=M_0^{(2)}(x),\quad \sigma(x)=\sqrt{V(x)}.$$

$M^{(p)}(x)$ 叫做矩量，$\overline{M}^{(p)}(x)$ 叫做絕对矩量，$V(x)$叫做分散，$\sigma(x)$ 叫做标准偏差，$\overline{M}^{(p)}(x)$，$\overline{M}_0^{(p)}(x)$定义在 S 的子空間 $L^p(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ 之上。特别如 $x, y\in L^2(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$，那末

$$C(x, y)=E((x-E(x))(y-E(y))$$

存在(Hölder 不等式)，叫做随机变量 x, y 的共变量，而

$$r(x, y)\equiv\frac{C(x, y)}{\sqrt{V(x)V(y)}}.$$

叫做 x, y 的相关系数。

定义在 R 中区間$[a, b]$或全 R 上而在概率空間 $S(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$中取值的抽象函数 $x(t)\equiv x(t, \omega)$[当 t 固定时是測度空間$(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$上的殆遍有穷可測函数，而当 ω 固定时是 t 的函数]叫做随机函数或随机过程(fonction aléafoire, processus stochastique)。这是描述很多自然現象以及一些社会現象(如电話及其他公众事業中的大量現象)的数学工具，从而具有重大的实用价值。

例 8. 在插值理論中，我們借 Lagrange 插值公式求出一个逼近已知連續函数的多項式：設 $x(t)\in C[a, b]$，那末

$$y=Lx:\ y(t)=\sum_{k=1}^{n}x(t_k)l_k(t),$$

这里 $a\leqslant t<t_2<\cdots<t_n\leqslant b$，

$$l_k(t)=\frac{(t-t_1)\cdots(t-t_{k-1})(t-t_{k+1})\cdots(t-t_n)}{(t_k-t_1)\cdots(t_k-t_{k-1})(t_k-t_{k+1})\cdots(t_k-t_n)}\quad(1\leqslant k\leqslant n),$$

这 L 是由 $C[a, b]$ 到它自己之中的綫性算子。它是有界的，因为令

$$\alpha=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\sum_{k=1}^{n}|l_k(t)|\quad(<\infty)$$

那末

$$\|Lx\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\sum_{k=1}^{n}x(t_k)l_k(t)\right|\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|x(t)\right|.$$

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}\sum_{k=1}^{n}|l_k(t)|\leqslant\alpha\|x\|.$$

例 9. 在近似方法中，常借机械求积公式求定积分的近似值。例如用

$$\int_0^1 p(t)x(t)dt\cong\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x(t_k)(0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n\leqslant 1)$$

求上式左边积分的近似值，这里設 $p(t)$ 是連續函数且在 $[0,1]$ 中常大于 0, $x(t)\in C[0,1]$。显然上式左边右边都是 $C[0,1]$ 上的有界綫性泛函数：

$$\left|\int_0^1 p(t)x(t)dt\right|\leqslant\int_0^1 p(t)dt\cdot\|x\|,$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x(t_k)\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n}|\alpha_k|\cdot\|x\|.$$

例 10. 在三角級数理論中考察 Fejer 和

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k(x, t).$$

这里 $S_k(x, t)$ 表示以 2π 为周期的連續函数 $x(t)$ 的 Fourier 級数

$$\frac{1}{2}\alpha_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k \cos kt+\beta_k \sin kt),$$

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t) \cos kt\, dt, \qquad \beta_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t) \sin kt\, dt$$

的第 k 部分和:

$$S_k(x, t)=\frac{1}{2}\alpha_0+\sum_{m=1}^{k}(\alpha_m \cos mt+\beta_m \sin mt).$$

不难看出

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[x(t+2\tau)+x(t-2\tau)]\left(\frac{\sin^n \tau}{\sin \tau}\right)^2 d\tau,$$

从而 σ_n 是由 $C_{2\pi}$ 到它自己之中的綫性算子，这里 $C_{2\pi}$ 表示 $(-\infty, \infty)$ 上以 2π 为周期的連續函数全体按范数

$$\|x\|=\max_{-\infty<t<\infty}|x(t)|$$

組成的 Banach 空間[讀者請驗証]。σ_n 是有界的，因为

$$\|\sigma_n(x)\|\leqslant \frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin^n \tau}{\sin \tau}\right)^2 d\tau\cdot\|x\|=\|x\|.$$

例 11. 設 $x(t)\in L'(-\infty, \infty)$，而

$$y=Tx, \quad y(s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}x(t)dt, \ (-\infty<s<+\infty),$$

那末 T 是定义在 $L'(-\infty, \infty)$ 上并在 $C(-\infty, \infty)$[§ 1, 定义 1 下例 6] 中取值的綫性算子，因为

$$|y(s)|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt=\|x\|,$$

$$|y(s+\sigma)-y(s)|=|\int_{-\infty}^{\infty}x(t)(e^{i\sigma t}-1)e^{ist}dt|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)||e^{i\sigma t}-1|dt\leqslant 2\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|\left|\sin\frac{\sigma t}{2}\right|dt\leqslant$$

$$\leqslant 2\int_{-\infty}^{-\beta}|x(t)|dt+2\int_{\beta}^{\infty}|x(t)|dt+\sigma\beta\int_{-\beta}^{\beta}|x(t)|dt$$

先取 β 足够大，使[由于 $x(t)$ 的有和性]上式右边第一項 $<\frac{\varepsilon}{2}$($\varepsilon>0$ 是預定的)，然后再取 σ 足够小，使右边第二項 $<\frac{\varepsilon}{2}$，从而可知 $y(s)$ 的連續性。这 T 就是所謂 Fourier 变式。

注意 由綫性代数得知由有穷維(n 維)綫性空間 E 到有穷維(m 維)綫性空間 E_1 中的綫性算子必可借一組基表示成長方陣①:

$$y=Tx:\ y=(\eta_i)\quad 1\leqslant i\leqslant m,\ x=(\xi_i)\quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

$$\eta_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j(1\leqslant i\leqslant m).$$

因此 T 一定是連續的：$\xi_j^{(n)}\to\xi_j(n\to\infty,1\leqslant j\leqslant n)$ 时

$$\eta_j^{(n)}\equiv\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j^{(m)}\to\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j\equiv\eta_i(n\to\infty,1\leqslant i\leqslant m).$$

这就是說，对有穷維情形說[無論范数如何，見[§1 習題 12]，綫性算子必是連續的，从而我們在綫性代数中并不提出"連續綫性算子"这一概念，但下面將看到，在無穷維情形則不然。

下面將看到算子的連續性，有界性，齐性等等的关系。

定理 1. 設 E,E_1 都是賦范綫性空間，定义在 $\mathfrak{D}(T)\subset E$ 中并在 E_1

① 見例如 И. М. Гельфанд, 綫性代数学 §9。

中取值的綫性算子 T 是連續的必要充分条件乃是 T 为有界的①。

証 1) 設 T 是有界的，那末存在 $\alpha>0$, 使对一切 $x\in\mathfrak{D}(T)$, $\|Tx\|\leqslant\alpha\|x\|$, 从而对于 $x, x_n\in\mathfrak{D}(T)$ 有

$$\|Tx_n-Tx\|=\|T(x_n-x)\|\leqslant\alpha\|x_n-x\|,$$

即 $x_n\to x\Longrightarrow Tx_n\to Tx$。

2) 設 T 不是有界的。那末对每个自然数 n, 存在元 $x_n\in\mathfrak{D}(T)$, 使 $\|Tx_n\|>n\|x_n\|$, 令 $y_n=\dfrac{x_n}{\sqrt{n}\,\|x_n\|}$, 那末 $\|y_n\|=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, 从而 $y_n\to\Theta$。如果 T 連續，那末 $Ty_n\to\Theta$, 但另一方面

$$\|Ty_n\|=\left\|\frac{Tx_n}{\sqrt{n}\,\|x_n\|}\right\|>\sqrt{n},$$

得出矛盾。証完。

系 为了由 $\mathfrak{D}(T)\subset E$ 到 E_1 (E, E_1 都是賦范綫性空間) 中的綫性算子 T 具有連續的逆算子 $\overset{-1}{T}$, 必須且只須存在 $\gamma>0$, 使对于一切 $x\in\mathfrak{D}(T)$,

$$\|Tx\|\geqslant\gamma\|x\|.$$

証 由定理不难推出。

注 对于由賦范綫性空間 E 到賦范綫性空間 E_1 中的有界綫性算子 T, 滿足 $\|Tx\|\leqslant\alpha\|x\|$ (一切 $x\in E$) 的諸正数 α 的下确界用 $\|T\|$ 表示：

$$\|T\|=\inf\{\alpha\mid\|Tx\|\leqslant\alpha\|x\|, (x\in E)\}. \tag{1}$$

不难看出，

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|. \tag{2}$$

事实上，由于 $\|Tx\|\leqslant\|T\|\|x\|$, 得

$$\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|\leqslant\|T\|\ (\text{或}\ \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|\leqslant\|T\|)$$

---

① 所以叫做有界，是指在 E 的單位球 $\{x\mid x\in E, \|x\|\leqslant 1\}$ 上，T 的值有界：$\|Tx\|\leqslant\alpha$。由此知若綫性算子 T 有界，則必存在 $\alpha>0$, 使对任意 $x\in E$ 有 $\|Tx\|\leqslant\alpha\|x\|$。

另一方面，由 $\|T\|$ 的定义知，对任意 $\varepsilon>0$, 存在 x' 使

$$\|Tx'\|>(\|T\|-\varepsilon)\|x'\| \quad 即 \quad \left\|T\frac{x'}{\|x'\|}\right\|>\|T\|-\varepsilon$$

因为 $\left\|\frac{x'}{\|x'\|}\right\|=1$, 从而

$$\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|>\|T\|-\varepsilon \ (或 \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|>\|T\|-\varepsilon)$$

由于 ε 是任意的。所以得

$$\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|\geqslant\|T\| \ (或 \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|\geqslant\|T\|).$$

定理 2. 由賦范綫性空間 E 到 Banach 空間 E_1 中的一切連續綫性算子的全体 $\mathfrak{S}(E,E_1)$① 按算子的加法与乘法:

$$(T_1+T_2)x=T_1x+T_2x, \quad x\in E,$$
$$(\alpha T_1)x=\alpha(T_1x), \quad x\in E,$$

(这里 $T_1, T_2\in\mathfrak{S}(E,E_1)$, $\alpha\in K$) 与(1)中定义的范数是一 Banach 空間。

証 $\mathfrak{S}(E,E_1)$ 是綫性空間，不难驗明，其中零元 Θ_1 乃是所謂零算子:

$$\Theta_1x=\Theta \ (一切\ x\in E,\ \Theta\ 是\ E\ 中的零元)。$$

$\|T\|$ 滿足范数的三个条件 (§1 的定义 1), 也不难驗明。現在只須証明 $\mathfrak{S}(E,E_1)$ 按这范数是完备的。为此，設

$$\lim_{n,m\to\infty}\|T_n-T_m\|=0. \tag{3}$$

对每个 $x\in F$,

$$\|T_nx-T_mx\|=\|(T_n-T_m)x\|\leqslant\|T_n-T_m\|\|x\|\to 0, \ (n, m\to\infty).$$

这就是說，$\{T_nx\}_{n=1,2,\cdots}$ 是 E_1 中的基本列，依 E_1 的完备性(!), T_nx 在 E_1 中收斂于一元，表示成 Tx。于是 T 是定义在 E 中并在 E_1 中取值的算子。它的加法齐性由 T_n 的相应性質看出，由(3)可知

$$|\|T_n\|-\|T_m\||\leqslant\|T_n-T_m\|\to 0,$$

---

① 有时表示成 $(E\to E_1)$。

从而数列 $\{\|T_n\|\}$ 收斂，即

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n\|<\infty$$

存在。于是对每个 x,

$$\|Tx\|=\lim_{n\to\infty}\|T_nx\|\leqslant(\lim_{n\to\infty}\|T_n\|)\cdot\|x\|$$

从而 T 是由 E 到 E_1 中的有界綫性算子。由(3)，对每个 $\varepsilon>0$ 可取 $n_0=$ $=n(\varepsilon)$ 足够大，使

$$n\geqslant n_0\Longrightarrow\|T_n-T_m\|<\varepsilon.$$

为此，对于每个满足 $\|x\|\leqslant 1$ 的 $x\in E$,

$$\|T_nx-T_mx\|\leqslant\varepsilon\|x\|\leqslant\varepsilon.$$

固定 x，令 $m\to\infty$，得出

$$\|T_nx-Tx\|\leqslant\varepsilon\quad(\|x\|\leqslant 1).$$

依(2)，既然已知 $T\in\mathfrak{C}(E,E_1)$，从而 $T_n-T\in\mathfrak{C}(E,E_1)$ 得知

$$\|T_n-T\|\leqslant\varepsilon\quad(n\geqslant n_0).$$

这就是說 $\|T_n-T\|\to 0(n\to\infty)$，从而 $\mathfrak{C}(E,E_1)$ 的完备性証完。

注 在 $\mathfrak{C}(E,E_1)$ 中，可以考察兩种收斂：一致收斂，这时所謂 T_n 一致收斂于 T，是指 $\|T_n-T\|\to 0(n\to\infty)$；强斂，这时所謂 T_n 强斂于 T，是指对于每个 $x\in E$，$\|T_nx-T_x\|\to 0(n\to\infty)$。以后將更遇到其他收斂。

系 特别取 $E_1=K$，可知：賦范綫性空間 E 上一切連續綫性泛函数的全体 $E^*\equiv\mathfrak{C}(E,K)$ 按定理 2 中定义的运算与(1),(2)規定的范数，也就是說按范数

$$\|f\|=\sup_{\|x\|=1}|f(x)|,$$

所成一 Banach 空間，叫做空間 E 的共軛空間。

注 到目前为止，我們尙不知 E 上除 $f(x)\equiv 0$(一切 $x\in E$)外是否确有連續綫性泛函数存在。在下面的一节中，我們証明，对于賦范綫性空間，答案是肯定的，并且我們將定出一些重要的具体賦范綫性空間的共軛空間来，現在只定出几个上面討論过的綫性泛函数或綫性算子的

范数来。

例 1. 考察由 m_n 到 m_n 中的綫性算子

$$y=Tx;\quad \eta_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j(1\leqslant i\leqslant n),\ y=(\eta_i),\ x=(\xi_j),$$

不难看出
$$\|T\|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_{ik}|.\tag{4}$$

設
$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_{ik}|=\sum_{k=1}^{n}|\alpha_{i_0k}|.\tag{5}$$

令①
$$\xi_k=\operatorname{sgn}\alpha_{i_0k},\ (1\leqslant k\leqslant n).$$

特别取 $x=(\xi_k)$

那末
$$\|x\|=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|=1,$$

而
$$\|Tx\|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\operatorname{sgn}\alpha_{i_0j}\right|=\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{i_0j}|.$$

由此得知
$$\|T\|\geqslant\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{i_0j}|.$$

結合上面的(4)(5),得出

$$\|T\|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_{ik}|.\tag{6}$$

例 2. 考察 Lagrange 插值算子(定义在 $C[a, b]$ 中):

---

① 函数 $\operatorname{sgn} t$ 的定义是

$$\operatorname{sgn} t=\begin{cases}1 & \text{如 } t>0\\ 0 & \text{如 } t=0\\ -1 & \text{如 } t<0.\end{cases}$$

$$Lx=\sum_{i=1}^{n}x(t_i)l_i(t),\ a\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n\leqslant b.$$

前面已經証明，

$$\|L\|\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}\sum_{k=1}^{n}|l_k(t)|.$$

既然在有窮閉区間上連續函数达到它的極大値，所以存在 $t_0\in[a,b]$，使

$$\sum_{k=1}^{n}|l_k(t_0)|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\sum_{k=1}^{n}|l_k(t)|.$$

今取 $x_0(t)\in C[a,b]$，使

$$x_0(t_k)=\operatorname{sgn} l_k(t_0),\ 1\leqslant k\leqslant n.$$

那末

$$Lx_0=\sum_{k=1}^{n}l_k(t_0)\operatorname{sgn} l_k(t_0)=\sum_{k=1}^{n}|l_k(t_0)|=$$

$$=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\sum_{k=1}^{n}|l_k(t)|,\ \|x_0\|=1,$$

从而

$$\|L\|\geqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}\sum_{k=1}^{n}|l_k(t)|,$$

結合上面的結果，知

$$\|L\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\sum_{k=1}^{n}|l_k(t)|.$$

例 3. $\frac{d}{dt}$ 看作定义在 $L^2[0,1]$中一切具連續且平方有和的第一阶导函数的函数全体 $\mathfrak{D}(T)$ 上的綫性算子，是無界的，因为例如令 $x(t)=\sin n\pi t$，則

$$\|x(t)\|=\sqrt{\int_0^1|x(t)|^2dt}=\sqrt{\frac{1}{2}},$$

但 $x'(t)=n\pi\cos n\pi t$, 从而

$$\|x'(t)\|=\sqrt{\int_0^1 n^2\pi^2\cos^2 n\pi t dt}=n\pi\sqrt{\frac{1}{2}}$$

从而如 $Tx=\frac{d}{dt}x(t)$, 那末

$$\|T\|\geqslant n\pi \quad (n=1,2,\cdots),$$

从而 $\|T\|$ 不存在。

注 值得注意由此可以作出定义在全空間 E 上的無界綫性算子的例来，事实上，$\mathfrak{D}(T)$ 是 $L^2[0,1]$ 的綫性子空間，用超穷归納法可以作 $L^2[0,1]$ 的一个 Hamel 基：卽一族元，使 $L^2[0,1]$ 中任意一元，是这一族元的有穷綫性組合，并且这一族元是綫性無关的。我們还可使这一 Hamel 基的一部分組成 $\mathfrak{D}(T)$ 的 Hamel 基。在 $\mathfrak{D}(T)$ 上，令 $Tx=\frac{d}{dt}x(t)$, 而在 $L^2[0,1]$ 的 Hamel 基中不属于 $\mathfrak{D}(T)$ 的元处令 $Tx=\Theta$, 那末 T 是定义在全 $L^2[0,1]$ 上的綫性算子，但依上述 T 不是有界的①。

習 題 二

1. 求証，如 E,E_1 是賦范綫性空間，而 T 是由 E 到 E_1 中的連續加法算子，那末 T 必是齐性的。

2. 設 T 是由 $l_n^{(1)}$ 到自己中的綫性算子

$$y=Tx:\quad \eta_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j \quad (1\leqslant i\leqslant n),$$

求証

$$\|T\|=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|\alpha_{ij}|.$$

3. 設 T 表由 $C[a,b]$ 到它自己之中的綫性算子：

$$y=Tx:\quad y(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)dt.$$

---

① 見江澤堅：关于 Hilbert 空間上的有界算子和封閉算子，东北人民大学，自然科学学报 1955 年第一期 359－361 頁。

求証,如 $K(s,t)$ 是 (s,t) 的連續函数,則

$$\|T\|=\max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b |K(s,t)|dt.$$

4. 設

$$f(x)=\sum_{i=1}^n a_i x(t_i),\quad a\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n\leqslant b,$$

而 $a_1,\cdots,a_n$ 是固定的数。求証 f 是 $C[a,b]$ 上的綫性泛函数并且

$$\|f\|=\sum_{i=1}^n |a_i|.$$

5. 設無穷陣 $(a_{ij})(i,j=1,2,\cdots)$ 满足

$$\sup_i \sum_{k=1}^\infty |a_{ik}|<+\infty.$$

如果把

$$y=Tx;\quad \eta_i=\sum_{k=1}^\infty a_{ik}\xi_k\ (i=1,2,\cdots),$$

$$y=(\eta_i),\quad x=(\xi_k)$$

看成是由(m)到(m)中的綫性算子,那末

$$\|T\|=\sup_i \sum_{k=1}^\infty |a_{ik}|.$$

6. 設 $K(s,t)$ 是$[a,b]\times[a,b]$上的可測函数并且

$$\int_a^b |K(s,t)|ds,$$

对 $[a,b]$ 中殆一切 s 存在且殆遍有界。令

$$y=Tx:\ y(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)dt,$$

把T看作是由 $L[a,b]$ 到自己中的綫性算子,那末

$$\|T\|=\operatorname{vrai\,max}_{a\leqslant t\leqslant b}\int_a^b |K(s,t)|ds.$$

7. 把

$$y=Tx:\ y=(\eta_i),\ y=(\xi_i),\ \eta_i=\sum_{k=1}^n a_{ik}\xi_k$$

看成是由 l_n^2 到 l_n^2 中的綫性算子,并且設 $a_{ik}=a_{ki},(1\leqslant i,k\leqslant n)$ 那末

$$\|T\| = |\lambda_n|,$$

这里 λ_n 是陣(a_{ik})的按絕对值最大的固有值[參看 И. М. Гельфанд 綫性代数学第一章 §10]。

如不設 (a_{ik}) 是对称陣，那末令 A 表示陣$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}a_{ij}\right)$，而 λ_n 表示对称陣 A 的按絕对值最大的固有值，則 $\lambda_n \geqslant 0$ [Гельфанд 前引書 §15 輔定理 1, 2]

而
$$\|T\| = \sqrt{\lambda_n}.$$

8. 設 $K(s,t)=K(t,s)$ 是 $a\leqslant s,t\leqslant b$ 中的連續函数或只設

$$\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2 ds\,dt < +\infty.$$

考察算子
$$y=Tx:\ y(s)=x(s)-\int_a^b K(s,t)x(t)dt.$$

把 T 看作由 $L^2[a,b]$ 到它自己之中的綫性算子，利用积分方程理論[例如 Петровский 的講义]証明

$$\|T\| = \sup_i \left|1-\frac{1}{\lambda_i}\right|,$$

这里 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots$ 表示 $K(s,t)$ 的特征值(即 T 的固有值的倒数)。

若不設 $K(s,t)$ 对称，仿習題 7 求出 T 的范数。

9. 把

$$y(s)=\int_0^1 K(s,t)x(t)dt,\ y=Tx$$

看成由 $L^2[0,1]$ 到自己之中的綫性算子，設

$$K(s,t)=K(t,s),\quad \int_0^1\int_0^1 K(s,t)^2 ds\,dt < +\infty$$

求証
$$\|T\| = \frac{1}{|\lambda_1|},$$

这里 λ_1 表示 $K(s,t)$ 的依絕对值最小的特征值。

§3. 連續綫性泛函数的存在，共軛空間

对綫性空間 E，可利用 Hamel 基作出不等于 0 的綫性泛函数来。但对于賦准范綫性空間，不一定能有非零的(即不恒为 0 的)連續綫性泛函数。事实上，下面將証明 $S[0,1]$ 上就沒有非零綫性連續泛函数。我們不在这里討論非零連續綫性泛函数存在的充分必要条件。在这里

只証明賦范綫性空間上一定具有按一确定意义"足够多"的連續綫性泛函数；更确切地說，对于空間中任意元 $x_0 \neq \Theta$，必存在連續綫性泛函数 f，使 $f(x_0) \neq 0$。这一結果具有丰富的应用，是 Banach 空間理論中重要基本定理之一。

定义 1. 綫性空間 E 上的泛函数 $p(x)$ 叫做次加法的，是指

$$p(x+y) \leqslant p(x)+p(y) \quad (x, y \in E).$$

泛函数 $p(x)$ 叫做正齐性(相应地齐性的)，指对于每个实数 $\alpha \geqslant 0$ (相应地对于每个 $\alpha \in K$)，

$$p(\alpha x)=\alpha p(x), \quad (x \in E).$$

例 准范数是次加法泛函数。范数是正齐性泛函数。正齐性的准范数就是范数；

定理 1 (Hahn-Banach)：設在实綫性空間 E 的实綫性子空間 E_1 上定义有一个綫性泛函数 $f_1(x)$，滿足

$$f_1(x) \leqslant p(x) \quad (x \in E_1), \tag{1}$$

这里 $p(x)$ 是 E 上一个次加法正齐性泛函数。那末必存在定义在全 E 上的綫性泛函数 $f(x)$，滿足下列兩要求：

1) $x \in E \Longrightarrow f(x) \leqslant p(x)$;

2) $x \in E_1 \Longrightarrow f(x)=f_1(x)$.

証 这 $f(x)$ 叫做 $f_1(x)$ 在全 E 上的延拓。定理也叫做 Hahn-Banach-Ascoli 定理。S. Banach 早在 1923 年 [sur le probléme de la mesure, Fund math. 4 (1923)] 論不变測度的存在时就已在特殊形式下得出綫性泛函数的延拓。一般的定理互相独立地由 Hahn, Banach, Ascoli 等得出。①

① 請參看 H. Hahn: Über lineare gleichungs systeme in linearen Räumen, J. für Math(crelle)157(1927), 214—229, S. Banach: Sur les fonctionnelles lineaires, Studia math, 1(1929), 211—216, 223—239; G. Ascoli, Sugli spazi lineari metrici e le loro varieta lineari, Ann, mat, pura appl, 10(1932), 33—81, 203—232。

証　設 $x_0\in E\setminus E_1$，考察由 E_1 与 x_0 張成的綫性子空間

$$E_0=\{\alpha x_0+y\mid -\infty<\alpha<\infty,\ y\in E_1\}.$$

設 $y',y''\in E_1$，依(1)，

$$f_1(y')-f_1(y'')=f_1(y'-y'')\leqslant p(y'-y'')=$$
$$=p((y'+x_0)-(y''+x_0))\leqslant p(y'+x_0)+p(-y''-x_0),$$

由此

$$-p(-y''-x_0)-f_1(y'')\leqslant p(y'+x_0)-f_1(y').$$

令

$$m=\sup_{y\in E_1}\{-p(-y-x_0)-f_1(y)\},\ M=\inf_{y\in E_1}\{p(y+x_0)-f_1(y)\},$$

那末 m，M 都是有穷的，并且 $m\leqslant M$。取一数 r，使 $m\leqslant r\leqslant M$。

令

$$f(\alpha x_0+y)=\alpha r+f_1(y)\quad(-\infty<\alpha<\infty,\ y\in E_1),\tag{2}$$

那末由于 $x_0\notin E_1$，E_0 每个元一意表示成 αx_0+y 的形狀，从而(2)一意規定了 E_0 上一个綫性泛函数。今証

$$f(\alpha x_0+y)\leqslant p(\alpha x_0+y)\quad(-\infty<\alpha<\infty,\ y\in E_1).\tag{3}$$

当 $\alpha=0$ 时，这乃是(2)与(1)的直接后果。設 $\alpha>0$，依 r 的定义，

$$r\leqslant p\left(\frac{y}{\alpha}+x_0\right)-f_1\left(\frac{y}{\alpha}\right),$$

从而

$$\alpha f_1\left(\frac{y}{\alpha}\right)+\alpha r\leqslant \alpha p\left(\frac{y}{\alpha}+x_0\right),\ \text{即}\ f_1(y)+\alpha r\leqslant p(y+\alpha x_0)$$

再考 $\alpha<0$，同理，

$$-p\left(-\frac{y}{\alpha}-x_0\right)-f_1\left(\frac{y}{\alpha}\right)\leqslant r.$$

从而

$$(-\alpha)p\left(-\frac{y}{\alpha}-x_0\right)\geqslant \alpha r+\alpha f_1\left(\frac{y}{\alpha}\right),$$

即

$$p(y+\alpha x_0)\geqslant f_1(y)+\alpha r.$$

从而(3)得証。

設 $\mathfrak{F}_p$ 表示 f_1 的一切滿足条件

$$f(x)\leqslant p(x)\quad(x\in\mathfrak{D}(f))$$

的延拓的全体，即

$$\mathfrak{D}(f)\supset E_1 \text{ 且 } x\in E_1\Longrightarrow f(x)=f_1(x).$$

对于 $f_1, f_2\in\mathfrak{F}_p$, 規定 $f_1\succ f_2$, 表示 $\mathfrak{D}(f)_1\supset\mathfrak{D}(f_2)$ 幷且 $x\in\mathfrak{D}(f_2)\Longrightarrow f_1(x)=f_2(x)$。那末 $\mathfrak{F}_p$ 成为一个序集。設 M 是 $\mathfrak{F}_p$ 的一个全序子集，令

$$\mathfrak{D}=\bigcup_{f\in M}\mathfrak{D}(f) \text{ 而 } \varphi(x)=f(x) \text{ 如 } x\in\mathfrak{D}(f),$$

那末由于 M 是全序的，φ 在 $\mathfrak{D}$ 上一意确定。幷且是以 $\mathfrak{D}$ 为定义域的綫性泛函数。幷且 $\varphi\in\mathfrak{F}_p$, $\varphi(x)\leqslant p(x)(x\in\mathfrak{D})$。这就是說按上述序 φ 是 M 的上端且 $\in\mathfrak{F}_p$。依 Zorn 輔定理 $\mathfrak{F}_p$ 有一極大元，表示成 f_0。如 $\mathfrak{D}(f_0)\subsetneqq E$。依定理証明，存在 $\psi\in\mathfrak{F}_p$, 使 $x\in\mathfrak{D}(f_0)\Longrightarrow\psi(x)==f_0(x)$, 且 $\mathfrak{D}(\psi)\supsetneqq\mathfrak{D}(f_0)$, 与 f_0 的極大性矛盾。所以 f_0 定义在全空間 E 上，定理証完。

定义 2. 綫性空間上非負次加法泛函数 $p(x)$ 叫做对称的，是指

$$p(\alpha x)=|\alpha|p(x),$$

綫性空間中的子集 A 叫做对称，是指 $x\in A$ 且 $|\alpha|=1\Longrightarrow\alpha x\in A$。

注 1) 对称泛函数一定是正齐性的。范数是对称的。

2) 如果 $p(x)$ 是綫性空間 E 上的对称非負值次加法泛函数，那末 $A\equiv\{x|x\in E,\ p(x)=0\}$ 是綫性子空間。事实上，$p(x)=0$, $p(y)=0\Longrightarrow 0\leqslant p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)=0$, $p(\alpha x)=|\alpha|p(x)=0$, 从而 A 是綫性子空間。

3) 如果 $p(x)$ 是綫性空間 E 上的对称非負值次加法泛函数，那末 $A\equiv\{x|p(x)\leqslant r, x\in E\}$ 是对称凸集，这里 r 是某正的常数。注意所謂 A 是凸集，是指 $x, y\in A$, $0<\lambda<1\Longrightarrow\lambda x+(1-\lambda)y\in A$。証明也是容易的(讀者請自己补足)，特别，依[①]賦范綫性空間中的球 $\{x|\|x\|\leqslant\alpha\}$ 是对称凸集。

① 見 Г. А. Сухомлиноб: О продолжении линейных функционолов в комплексном и кватерниовном линейном пространстве, мат. сб. 3 (45) (1938), 353—358. 与 H. Bohnenblust and A. Sobczyk: Extensions of functionals on complex linéar Spucis' Bull. Amer math soc. 44(1938)91—93。

定理 2. 設 $p(x)$ 是复綫性空間 E 上的对称非負值次加法泛函数，$f_1(x)$ 是定义在 E 的一个綫性子空間 E_1 上的綫性泛函数，滿足

$$|f_1(x)| \leqslant p(x) \quad (x \in E_1). \tag{4}$$

那末存在一个定义在全 E 上的綫性泛函数 $f(x)$，使

$$|f(x)| \leqslant p(x) \quad (x \in E),$$

并且

$$x \in E_1 \Longrightarrow f(x) = f_1(x).$$

注 仿定理 1 的情形，f 仍叫做 f_1 在全 E 上的延拓。这是在复綫性空間情形定理 1 的对应定理。注意复空間情形与实空間情形不同，例如加法泛函数的实齐性乃是連續性的后果，但它的复齐性却不能从連續性推出。例如在复数域 K 上的一維綫性空間（可以等同于复数平面）中 $f(z)=\bar{z}$（表示复数 z 的共軛数）是連續加法泛函数，但 $f(z)$ 不是复齐性的，因为例如 $f(iz)=\overline{iz}=-i\bar{z}\neq i\bar{z}=if(z)$ 如 $z\neq 0$。定理 2 独立地由 Сухомгинов 与 Bohnenblust–Sobczyk 証明①。

証 把 E 看成实綫空間，令

$$f_1(x) = \varphi(x) + i\psi(x),$$

这里对每个 $x \in E_1$，$\varphi(x)$，$\psi(x)$ 各表示 $f_1(x)$ 的实与虚部分。不难驗明 φ，ψ 是 E_1 上的实綫性泛函数，E_1 也看成是实綫性子空間。虽然

$$i[\varphi(x) + i\psi(x)] = if_1(x) = f_1(ix) = \varphi(ix) + i\psi(ix),$$

从而

$$\varphi(ix) = -\psi(x) \quad (x \in E_1) \tag{5}$$

由假定(4)，$\varphi(x) \leqslant p(x)$ $(x \in E_1)$，从而依定理 1，φ 可以延拓成全 E 上的实綫性泛函数 $\varphi_0(x)$，滿足 $x \in E \Longrightarrow \varphi_0(x) \leqslant p(x)$。令

$$f(x) = \varphi_0(x) - i\varphi_0(ix) \quad (x \in E). \tag{6}$$

不难看出，

$$x \in E_1 \Longrightarrow f(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix) = \varphi(x) + i\psi(x) = f_1(x).$$

由(6)知

---

① 見前頁。

$$f(ix)=\varphi_0(ix)-i\varphi_0(-x)=\varphi_0(ix)+i\varphi_0(x)=if(x),$$

从而不难看出 f 是复齐性的。剩下要証明 f 滿足

$$x\in E\Longrightarrow|f(x)|\leqslant p(x).$$

如果 $f(x)=0$, 那末不待証了。如果 $f(x)\neq 0$, 令 $\vartheta=\arg f(x)$。那末

$$|f(x)|=e^{-i\vartheta}f(x)=f(e^{-i\vartheta}x)=\varphi_0(e^{-i\vartheta}x)\leqslant p(e^{-i\vartheta}x)=p(x),$$

这里引用了 $\varphi_0(e^{-i\vartheta}x)$ 是 $f(e^{-i\vartheta}x)=|f(x)|$ 的实数部分这一事实。証完。

定理 3(足够多的綫性泛函数的存在)：設 $\|x\|$ 是(实或复)綫性賦范空間上的范数(或更一般，拟范数，即滿足 §1 定义 1 中的 2) 3′)，但只 $\|x\|\geqslant 0$, $\|\Theta\|=0$, 而不設 $\|x\|=0\Longrightarrow x=\Theta$)。对于任意元 $x_0\in E$, 必存在 E 上綫性泛函数 $f(x)$, 滿足

$$f(x_0)=\|x_0\|, \tag{7}$$

$$x\in E\Longrightarrow|f(x)|\leqslant\|x\|. \tag{8}$$

注　由(8)知 f 是有界。从而是連續綫性泛函数。更确切地說，由(8)知 $\|f\|\leqslant 1$, 而由(7)知 $\|f\|\geqslant 1$, 从而 $\|f\|=1$。

証　令 $E_1=\{\alpha x_0\,|\,\alpha\in K\}$ 那末 E_1 是 E 中的綫性子空間。定义

$$f_1(\alpha x_0)=\alpha\|x_0\|\quad(\alpha\in K).$$

那末 f_1 是 E_1 上的綫性泛函数并且滿足

$$|f_1(x)|=\|x\|\quad(x\in E_1)$$

把 $\|x\|$ 看成次加法泛函数，由定理 1 (实情形)或定理 2 (复情形)可知 f_1 在 E 上有一延拓，換句話說，存在定义在全 E 上的綫性泛函数 f, 使

$$x\in E_1\Longrightarrow f(x)=f_1(x),$$

$$f(x)\leqslant\|x\|\text{(实情形)或 }|f(x)|\leqslant\|x\|\text{(复情形)}。$$

特别 $f(x_0)=f_1(x_0)=\|x_0\|$。对实的情形，$f(-x)\leqslant\|-x\|=\|x\|$, 从而 $|f(x)|\leqslant\|x\|$, 証完。

注　定理 3 的几何意义是有趣的，首先注意，在实的情形，把定理中的 $\|x\|$ 換成任意一个非負值次加法正齐性泛函数，而在复的情形，把

$\|x\|$ 換成任意一个对称非負值次加法泛函数，定理仍是成立的。但在实的情形，令 $A=\{x|x\in E, p(x)\leqslant r\}$，这里 $r>0$ 是任意固定的数。設 x_0 是集 A 的一个境界点，即滿足 $p(x_0)=r$。設 π 是 E 中由方程 $f(x)=r$ 决定的超平面。于是 x_0 在 π 之上。因 $f(x)\leqslant p(x)<r$，所以 A 位于超平面 π 的一側。这种通过凸集 A 的一个境界点且使凸集在它的一側的超平面叫做 A 的承托超平面，于是定理 3（实情形）的几何意义乃是：过凸集 A 的每个境界点 x_0 可以作 A 的一个承托超平面。我們也可以用凸集 $\{x|x\in E, p(x-a)<r\}$ 代替 A。这样实际上对空間 E 中任意具內点的凸集 A 成立。

再設 x_1 不在 A 中，也不在 A 的境界上。令 $\tau=\dfrac{r}{p(x_1)}$，$x_2=\tau x_1$，那末 $p(x_2)=r$，故 x_2 是 A 的境界点。令 $f(x)=r$ 表示凸集 A 的过 x_2 点的承托超平面，从而 $f(x_2)=r$。那末

$$f(x_1)=f\left(\frac{x_2}{\tau}\right)=\frac{1}{\tau}f(x_2)=\frac{r}{\tau}=p(x_1)>r.$$

这就是說，A 与 x_1 在超平面 $f(x)=r$ 的不同側。这时我們說超平面隔离点 x_1 与集 A。

以上几何解釋乃是平常欧几里得空間中直观結果的推广。我們將在論拓扑綫性空間时詳細論述这类几何結果。

在前节中已經証明賦范綫性空間 E 上一切連續綫性泛函数全体 E^* 按泛函数的加法与数乘法以及泛函数的范数

$$\|f\|=\sup_{\|x\|=1}|f(x)|$$

形成一个 Banach 空間，依定理 3，如果 $\dim E>0$，那末 $\dim E^*>0$，即 E^* 必含有非零元。

系 1：如 E_1 是賦范綫性空間 E 的綫性子空間，而 f_0 是 E_1 上有界綫性泛函数，那末存在 E 上有界綫性泛函数 f，滿足 $x\in E_1\Longrightarrow f(x)=f_0(x)$。并且 $\|f\|=\|f_0\|$。

証　只須在定理 1 或 2 中令 $p(x)=\|f_0\|\cdot\|x\|$。

系 2: 設 E_1 是賦范綫性空間 E 的綫性子空間，$x_0 \in E$，而 $\operatorname{dist}(x_0, E_1) = \inf\limits_{x \in E_1} \|x_0 - x\| = \delta > 0$，那末必存在 $f \in E^*$，使 $\|f\| = \frac{1}{\delta}$，而 $f(x_0) = 1$，$x \in E_1 \Longrightarrow f(x) = 0$。

証 令
$$E_0 = \{x' + \alpha x_0 \mid x' \in E_1, \alpha \in K\},$$
那末 E_0 是 E 的綫性子空間。

令
$$f_1(x' + \alpha x_0) = \alpha \quad (x' \in E_1, \alpha \in K),$$
那末 f_1 是一意确定的綫性泛函数，定义在 E_0 上，并且
$$x \in E_1 \Longrightarrow f_1(x) = 0, \text{ 而 } f_1(x_0) = 1.$$
注意
$$\|x' + \alpha x_0\| = |\alpha| \left\| \frac{x'}{\alpha} + x_0 \right\| \geqslant |\alpha| \delta,$$
从而由
$$|f_1(x' + \alpha x_0)| = |\alpha| \leqslant \frac{1}{\delta} \|x' + \alpha x_0\|$$
得知 $\|f_1\|_{E_0} \leqslant \frac{1}{\delta}$（$\|f_1\|_{E_0}$ 表示 f_1 作为 E_0 上的綫性有界泛函数的范数）。另一方面，由 δ 的定义可以取 $x_n \in E_1$，使
$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x_0\| = \delta.$$
于是
$$|f_1(x_n - x_0)| = |f_1(x_0)| = 1 \leqslant \|f_1\|_{E_0} \|x_n - x_0\|,$$
从而令 $n \to \infty$，得 $\|f_1\|_{E_0} \geqslant \frac{1}{\delta}$，于是提出
$$\|f_1\|_{E_0} = \frac{1}{\delta}.$$
依系 1，所要求的 $f \in E^*$ 的存在得証。

系 3: 为了 $x_0 \neq \Theta$ 属于賦范綫性空間 E 中任意子集 M 所張成的閉綫性子空間（即含 M 的最小閉綫性子空間），必須且只須对于每个 $f \in E^*$，$f(x) = 0$（一切 $x \in M$）$\Longrightarrow f(x_0) = 0$。

証 容易看出，从略。

定理 4(Asoli–Mazur): 設 P 是实賦范綫性空間 E 中的凸集。如果 P 在 E 中是閉集，那末对于任意 $x_0 \notin P$，必存在 $f_0 \in E^*$，使
$$\sup_{x \in P} f_0(x) < f_0(x_0).$$

証　必要时可以作一平移，無妨設 $\Theta\in P$ 設

$$\inf_{x\in P}\|x-x_0\|=\alpha,$$

因 P 是閉集，而 $x_0\notin P$，所以 $\alpha>0$。令

$$P_1\equiv\bigcup_{x\in P}\bar{S}\left(x;\frac{\alpha}{2}\right),$$

这里 $\bar{S}\left(x;\frac{\alpha}{2}\right)\equiv\left\{y\,|\,y\in E,\ \|x-y\|\leqslant\frac{\alpha}{2}\right\}$。那末 P_1 是凸集，因为如果 $x_0\in P_1$, $y_0\in P_1$，那末必存在元 $x, y\in P$，使

$$\|x-x_0\|\leqslant\frac{\alpha}{2},\qquad \|y-y_0\|\leqslant\frac{\alpha}{2},$$

从而当 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 时，

$$\|\lambda x_0+(1-\lambda)y_0-\lambda x-(1-\lambda)y\|\leqslant\lambda\|x_0-x\|+(1-\lambda)\|y-y_0\|\leqslant\frac{\alpha}{2},$$

而且 $\lambda x+(1-\lambda)y\in P$。因 $\Theta\in P_1$, $x_0\notin P_1$，所以 P_1 必有一形狀如 $x_1\equiv\beta x_0(0<\beta<1)$ 的边界点，只須取

$$\beta=\sup\{\lambda\,|\,0\leqslant\lambda\leqslant1,\ \lambda x_0\in P_1\}$$

就够了，因为 P_1 是凸集。令

$$p(x)\equiv\inf\left\{\rho\,|\,\rho>0,\ \frac{x}{\rho}\in P_1\right\},$$

那末 $p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$，并且因

$$\frac{x}{\rho}\in P_1,\ \frac{y}{\sigma}\in P_1\Longrightarrow\frac{x+y}{\rho+\sigma}=\frac{\rho}{\rho+\sigma}\frac{x}{\rho}+\frac{\sigma}{\rho+\sigma}\frac{y}{\sigma}\in P_1,$$

从而不难看出　　$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$.

又因 $\bar{S}\left(\Theta,\frac{\alpha}{2}\right)\subset P_1$，可知 $p(x)\leqslant\frac{2}{\alpha}\|x\|$。

如果 $x\in P_1$，那末 $p(x)\leqslant1$，并且

$$p(x_0)=\frac{1}{\beta}p(x_1)=\frac{1}{\beta}>1.$$

对于綫性子空間

$$E_1=\{x\,|\,x=\gamma x_1,\ -\infty<\gamma<+\infty\},$$

$f(\gamma x_1)=\gamma$ 是定义在 E_1 上的綫性泛函数，并且在 E_1 上 $f_1(x)\leqslant p(x)$。

依 Hahn-Banach 定理，f_1 有一在全 E 上的延拓 f_0，使 $f_0(x)\leqslant p(x)$ $(x\in E)$。特别

$$f_0(x)\leqslant\frac{2}{\alpha}\|x\|,$$

从而 $f_0\in E^*$，并且

$$\sup_{x\in P}f_0(x)\leqslant\sup_{x\in P_1}f_0(x)\leqslant\sup_{x\in P_1}p(x)\leqslant 1<\frac{1}{\beta}=f_0(x_0).$$

系　設 P 是实賦范綫性　E 中的凸集，为了 P 是閉集，必須且只須下列条件成立：

$$x_n\in P,\ \lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)\ \ (f\in E^*)\Longrightarrow x_0\in P_0$$

証　如果定理中条件成立，那末当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 时，

$$f\in E^*\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0),\tag{1}$$

从而 $x_0\in P$，卽 P 是閉集。反之，如果 P 是閉集，而 $x_n\in P$，(1)成立，但 $x_0\notin P$，依前定理，$\exists f_0\in E^*$，使

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}f_0(x_n)\leqslant\sup_{x\in P}f_0(x)<f_0(x_0),$$

与(1)矛盾。

定理 5.　設 E 是賦范綫性空間，那末 E 必等价于 E^{**}(卽共軛空間 E^* 的共軛空間)的一个綫性子空間，如果 E 是备的(卽 E 是 Banach 空間)，那末 E 等价于 E^{**} 中一个閉綫性子空間。

証　对于任意 $x\in E$，定义

$$\varphi_x(f)=\overline{f(x)}\quad(f\in E^*).$$

那末

$$\varphi_x(\alpha f)=\overline{(\alpha f)(x)}=\overline{\alpha f(x)}=\bar{\alpha}\varphi_x(f),\quad(\alpha\in K f\in E^*)$$

$$\varphi_x(f+g)=\overline{(f+g)(x)}=\overline{f(x)}+\overline{g(x)}=\varphi_x(f)+\varphi_x(g)(f,g\in E^*)$$

$$|\varphi_x(f)|=|\overline{f(x)}|\leqslant\|x\|\|f\|,$$

从而 $\varphi_x\in E^{**}$ 且 $\|\varphi_x\|\leqslant\|x\|$。故 $x\to\varphi_x$ 是由 E 到 E^{**} 中的映象 τ，而 τ

显然是加法齐性的:

$$\varphi_{x+y}(f)=\overline{f(x+y)}=\overline{f(x)}+\overline{f(y)}=\varphi_x(f)+\varphi_y(f),$$
$$\varphi_{\alpha x}(f)=\overline{f(\alpha x)}=\overline{\alpha}\overline{f(x)}=\overline{\alpha}\varphi_x(f)=(\alpha\varphi_x)(f).$$

τ 是一对一的，因为 $\varphi_x(f)\equiv\varphi_y(f)\Longrightarrow f(x)=f(y)$ 对每个 $f\in E^*$ 成立，即 $f(x-y)=0$ 对每个 $f\in E^*$ 成立，而依定理 3, $x=y$。又依定理 3, 对每个 $x_0\in E$, $\exists f_0\in E^*$ 使 $\|f_0\|=1$, $|f_0(x_0)|=\|x_0\|$, 从而 $\|\varphi_{x_0}\|=$ $=\sup\limits_{\|f\|=1}|\varphi_{x_0}(f)|=\sup\limits_{\|f\|=1}|f(x_0)|\geqslant\|x_0\|$, 即 $\|\varphi_{x_0}\|=\|x_0\|$, 故 τ 是等价。如果 E 是 Banach 空間，而 $\|\varphi_{x_n}-\varphi_{x_m}\|\to0(n,m\to\infty)$, 那末 $\|x_n-x_m\|\to$ $\to0$。从而依 E 的完备性，$\exists_{x_0}\in E$, 使 $\|x_n-x_0\|\to0\ (n\to\infty)$, 但这样必然 $\|\varphi_{x_n}-\varphi_{x_0}\|\to0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_{x_n}=\varphi_{x_0}\in\tau(E)$, 即 $\tau(E)$ 在 E^{**} 中是閉的。

注 由定理 5 可以得出賦范綫性空間可以完备化成 Banach 空間的新証明：只要取 $\tau(E)$ 在 E^{**} 中的閉包就够了。

定理 5 往往表达成 $E\subset E^{**}$, 意思只是指 E 等价于 E^{**} 的一个子空間。于是發生問題，如 E 是 Banach 空間，是否 E 能够 $=E^{**}$? 下面看到这一般不成立。

定义 3. Banach 空間 E 叫做自反的，是指 $E=E^{**}$ 即 E 等价于 E^{**}。

注 以后將对自反的空間作进一步的研究，本节暫不詳論。

下面將举几个共軛空間的例。

例 1. $E=C(\Omega)$, Ω 为紧 (T_2) 型空間。

在 $C(\Omega)$ 中，我們引入下列半序綫性空間理論中(見第五章)的符号。对于 $x, y\in C(\Omega)$,

$$(x\vee y)(t)=\max(x(t), y(t)),$$
$$(x\wedge y)(t)=\min(x(t), y(t)),\quad t\in\Omega,$$
$$x^+(t)=\max(x(t), 0),$$
$$x^-(t)=\max(-x(t), 0),$$

不难看出

$$x\vee y\in C(\Omega),\quad x\wedge y\in C(\Omega),\quad x^+=x\vee 0,\quad x^-=-x\vee 0,$$
$$x+y=(x\vee y)+(x\wedge y),\quad x=x^+-x^-.$$

設 $f\in C(\Omega)^*$, 令

$$f^+(x)=f^+(x^+)-f^+(x^-),\quad f^+(z)=\sup_{0\leqslant z'\leqslant z}f(z'),$$

这里在 $C(\Omega)$ 中, $x_1\leqslant x_2$ 意味着 $t\in\Omega\Longrightarrow x_1(t)\leqslant x_2(t)$。我們先証明 $f^+\in C(\Omega)^*$ 并且 $x\geqslant 0\Longrightarrow f^+(x)\geqslant 0$。事实上，設 $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$, $x_1+x_2\geqslant y\geqslant 0$, 那末 y 可以表示成 $y=y_1+y_2$, $0\leqslant y_1\leqslant x_1$, $0\leqslant y_2\leqslant x_2$。如此；只須令 $y_1=y\wedge x_1$, $y_2=y-y_1=y-(y\wedge x_1)=(y\vee x_1)-x_1\leqslant x_2+x_1-x_1=x_2$。从而依定义，$f^+(x_1+x_2)\leqslant f^+(x_1)+f^+(x_2)$。又如 $x_1\geqslant y_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant y_2\geqslant 0$, 那末 $x_1+x_2\geqslant y_1+y_2\geqslant 0$, 从而

$$f^+(x_1+x_2)\geqslant f(y_1)+f(y_2)$$

所以
$$f^+(x_1+x_2)\geqslant f^+(x_1)+f^+(x_2),$$

于是容易証明 f^+ 的加法性。因 $f(0)=0$, 故 $x\geqslant 0\Longrightarrow f^+(x)\geqslant 0$ 由 f^+ 的定义直接看出。f^+ 是有界的，因为如果 $x\geqslant 0$

$$|f^+(x)|\leqslant\sup_{0\leqslant x'\leqslant x}|f(x')|\leqslant\sup_{0\leqslant x'\leqslant x}\|f\|\|x'\|\leqslant\|f\|\,\|x\|.$$

而对一般的 $x\in C(\Omega)$

$$|f^+(x)|=|f^+(x^+)-f^+(x^-)|\leqslant\|f\|\|x^+\|+\|f\|\,\|x^-\|\leqslant\alpha\|f\|\,\|x\|.$$

于是，因有界加法泛函数必是齐性的，$f^+\in C(\Omega)^*$。下面把满足条件 $x\geqslant 0\Longrightarrow f(x)\geqslant 0$ 的有界綫性泛函数表示成 $f\geqslant 0$。規定 $f\geqslant g$, 表示 $f-g\geqslant 0$, $f,g\in C(\Omega)^*$。不难看出这样在 $C(\Omega)^*$ 上規定了一个次序。今証明对于 $f\in C(\Omega)^*$,

$$f^+\geqslant f,\ f^+\geqslant 0,\ \text{且}\ g\in C(\Omega)^*\ \text{而}\ g\geqslant f,\ g\geqslant 0\Longrightarrow g\geqslant f^+.$$

只須証最后关系。事实上，令 $x\in C(\Omega)$, $x\geqslant 0$, $0\leqslant x'\leqslant x$, 那末

$$g(x)=g(x')+g(x-x')\geqslant f(x')+0=f(x'),$$

从而 $g(x)\geqslant f^+(x)$。如此，我們可以写成 $f^+=f\vee 0$

令 $f^-=(-f)^+=(-f)\vee 0$。不难看出，$f^+-f=(f\vee 0)-f=(f-f)\vee(0-f)=0\vee(-f)=f^-$[在 $C(\Omega)^*$ 中一般 $f\vee g$ 表示按上面决定的次序 f 与 g 二元之上端，即 $\geqslant f$ 与 g 之最小元]。即

$$f=f^+-f^-(f\text{ 的 Jordan 分解}).$$

由此，为了找出 $C(\Omega)^*$ 中的一切元，只須找出其中的正元。即 $C(\Omega)$上一切正綫性有界泛函数(即滿足 $x\geqslant 0\Longrightarrow f(x)\geqslant 0$)就够了。

設 $x\in C(\Omega)$。我們对集 $A\subset\Omega$ 用 $x(A)\geqslant a$ 表示，对每个 $t\in A$, $x(t)\geqslant a$。对于每个紧集 $F\subset\Omega$, 令

$$\Gamma(F)=\inf_{x(F)\geqslant 1,\quad x\in C(\Omega)} f(x).$$

我們証明：

i) $F_1\subset F_2$, (F_1, $F_2\subset\Omega$ 且为紧子集)$\Longrightarrow\Gamma(F_1)\leqslant\Gamma(F_2)$;

ii) $\Gamma(F_1\cup F_2)\leqslant\Gamma(F_1)+\Gamma(F_2)$;

iii) $F_1\cap F_2=\Phi\Longrightarrow\Gamma(F_1\cup F_2)=\Gamma(F_1)+\Gamma(F_2)$.

因为紧(T_2)空間必是正規的，如果 F_1, F_2 是兩个不相交閉集，那末必有在 $h\in C(\Omega)$, 使 $h(F_1)=0$, $h(F_2)=1$, $0\leqslant h(\Omega)\leqslant 1$。对于任意 $\varepsilon>0$, $\exists x\in C(\Omega)$, $x(F_1\cup F_2)\geqslant 1$, $\Gamma(F_1\cup F_2)+\varepsilon\geqslant f(x)$。令

$$x_1=(1-h)x,\quad x_2=hx,$$

那末

$$x_1(F_1)=x(F_1)\geqslant 1,\quad x_2(F_2)=x(F_2)\geqslant 1,$$

从而

$$\Gamma(F_1\cup F_2)+\varepsilon\geqslant f(x)=f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)\geqslant\Gamma(F_1)+\Gamma(F_2).$$

$\varepsilon>0$ 既是任意的，可得

$$\Gamma(F_1\cup F_2)\geqslant\Gamma(F_1)+\Gamma(F_2).$$

但(ii)不难驗証，从而(iii)也得証。

今对任意开集 $G\subset\Omega$, 令

$$\bar{\Gamma}(G)=\sup\{\Gamma(F)\mid F\text{ 紧 }F\subset G\}.$$

对任意集 $A\subset\Omega$, 令

$$\varphi(A)=\inf\{\bar{\Gamma}(G)\mid G\text{ 开},\ G\supset A\}.$$

今証 φ 是 Carathéodory 外測度，即

iv) $A\subset B\Longrightarrow\varphi(A)\leqslant\varphi(B)$;

v) $\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(A_k)$;

vi) $\bar{A}\cap\bar{B}=\Phi\Longrightarrow\varphi(A\cup B)=\varphi(A)+\varphi(B)$.

又

vii) $\varphi(A)=\inf\{\varphi(G)\mid G\text{ 开 }G\supset A\}$.

証 依定义 $\varphi(G)=\bar{\Gamma}(G)$, 从而 $\varphi(A)=\inf\{\varphi(G)\mid G\text{ 开}, G\supset A\}$。首先注意 $\bar{\Gamma}$ 满足(i)与(ii), 事实上，(iv)是显然的。今考虑(v), 設 G_k 是开集，而紧集 $F\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}G_k$, 那末必存在自然数 n, 使 $F\subset\bigcup_{k=1}^{n}G_k$。于是

$$\bar{\Gamma}(F)\leqslant\bar{\Gamma}\left(\bigcup_{k=1}^{n}G_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\bar{\Gamma}(G_k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\bar{\Gamma}(G_k)$$

所以取对一切 $F\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}G_k$ 的上端，得

$$\bar{\Gamma}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}G_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\bar{\Gamma}(G_k).$$

对任意 $\varepsilon>0$, 取 $G_k\supset A_k$, 使 G_k 为开集且 $\bar{\Gamma}(G_k)\geqslant\varphi(A_k)\geqslant\bar{\Gamma}(G_k)-\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$, 于是依剛才所記得的結果，

$$\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)\leqslant\bar{\Gamma}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}G_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\bar{\Gamma}(G_k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(A_k)+\varepsilon.$$

而既然 $\varepsilon>0$ 是任意的，(v)得証。如 $\bar{A}\cap\bar{B}=\Phi$, 可取开集 G_1, G_2, 使 $G_1\supset A$, $G_2\supset B$, $G_1\cap G_2=\Phi$, 从而(vi)由(iii)不难推出。

φ 既是 Carathéodory 外測度，对任意集 A 满足

$$\varphi(A)=\varphi(A\cap M)+\varphi(A\cap CM)$$

的集 $M\subset\Omega$ 的全体是关于 φ 可测的，并且这些 φ- 可测集組成 σ- 代数。如果能証 Ω 中片开集 $\{t|x(t)>\alpha\}(x\in C(\Omega),\ \alpha>0$, 任意)为 φ-可测由这些开集生成的最小 Boole σ- 代数，即一切 Baire 集全体，是 φ-可测的。为此，只須証：如果 $A\subset\{t|x(t)>\alpha\}$, $B\subset\{t|x(t)\leqslant\alpha\}$, $\alpha>0$, $x\in C(\Omega)$, 那末 $\varphi(A\cup B)=\varphi(A)+\varphi(B)$。令

$$A_n=\left\{t\,|\,t\in A,\ x(t)>\alpha+\frac{1}{n}\right\},$$

那末

$$A=A_n\cup\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty}\left(A_{n+\nu}\setminus A_{n+\nu-1}\right)\right). \tag{10}$$

依(v), $$\varphi(A)\leqslant\varphi(A_n)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi(A_{n+\nu}\setminus A_{n+\nu-1}).$$

但 $\nu\neq\mu\Longrightarrow$

$$\overline{(A_{n+2\nu}\setminus A_{n+2\nu-1})}\cap\overline{(A_{n+2\mu}\setminus A_{n+2\mu-1})}=\Phi,$$

依(vi), 对每个 n,

$$\varphi(A_{2n})\geqslant\varphi\Big(\bigcup_{k=1}^{n}(A_{2k}\setminus A_{2k-1})\Big)=\sum_{k=1}^{n}\varphi(A_{2k}\setminus A_{2k-1}),$$

同理 $$\varphi(A_{2n+1})\geqslant\sum_{k=1}^{n}\varphi(A_{2k+1}\setminus A_{2k}),$$

而因 $\varphi(A_{2n}),\ \varphi(A_{2n+1})\leqslant\varphi(\Omega)<\infty$[取 $x_0(t)\equiv 1\ (t\in\Omega)$, 那末 $\varphi(\Omega)=\Gamma(\Omega)=f(x_0)<\infty$, $\therefore\varphi(\Omega)\leqslant\|f\|$], 从而(10)右边的級数收斂。从而对任意 $\varepsilon>0$, 可以选适当的 n, 使

$$\varphi(A_n)+\varepsilon\geqslant\varphi(A).$$

因 $A_n\subset A$, $\bar{A}_n\cap B=\Phi$, 所以依(vi),

$$\varphi(A\cup B)\geqslant\varphi(A_n\cup B)=\varphi(A_n)+\varphi(B)\geqslant\varphi(A)-\varepsilon+\varphi(B),$$

$\varepsilon>0$ 既是任意的，得 $\varphi(A\cup B)\geqslant\varphi(A)+\varphi(B)$，从而与(v)結合，便得 $\varphi(A\cup B)=\varphi(A)+\varphi(B)$，于是証明了 φ 是使 Ω 中一切 Baire 集可测的正則 Carathéodory 外測度。

对任意紧集 $F\subset\Omega$，我們証 $\varphi(F)=\Gamma(F)$。取开集 $G\supset F$，則 $\overline{\Gamma}(G)\geqslant\Gamma(F)$，从而 $\varphi(F)\geqslant\Gamma(F)$。反之，对任意 $\varepsilon>0$，可取 $x\in C(\Omega)$，$x(F)\geqslant1$，$f(x)\leqslant\Gamma(F)+\varepsilon$。开集 $G\equiv\{t|x(t)>\frac{1}{1+\varepsilon},\ t\in\Omega\}$ 含 F，并且 $(1+\varepsilon)x(\bar{G})\geqslant1$。取紧集 $F_1\subset G$，使 $\overline{\Gamma}(G)\leqslant\Gamma(F_1)+\varepsilon$ 于是

$$\varphi(F)\leqslant\overline{\Gamma}(G)\leqslant\Gamma(F_1)+\varepsilon\leqslant\Gamma(\bar{G})+\varepsilon\leqslant f((1+\varepsilon)x)+\varepsilon=$$
$$=(1+\varepsilon)f(x)+\varepsilon\leqslant(1+\varepsilon)(\Gamma(F)+\varepsilon)+\varepsilon.$$

$\varepsilon>0$ 既是任意的，可知 $\varphi(F)\leqslant\Gamma(F)$。$\therefore\varphi(F)=\Gamma(F)$。

現在証明 $f\in C(\Omega)^*$ 且 $f\geqslant0\Longrightarrow f$ 可表示成

$$f(x)=\int_\Omega x(t)\varphi(dt),\quad x\in C(\Omega),\tag{11}$$

并且 $\|f\|=\varphi(\Omega)$，已知 $\varphi(\Omega)<\infty$。对于已知的 $x\in C(\Omega)$ 及 $\varepsilon>0$，取

$$l_1=\min_{t\in\Omega}x(t)<l_2<\cdots<l_{n-1}<\max_{t\in\Omega}x(t)=l_n,$$

而
$$l_{i+1}-l_i<\varepsilon\qquad(1\leqslant i\leqslant n-1),$$

并且 $\varphi(\{t|x(t)=l_i\})=0\ (2\leqslant i\leqslant n)$。因 $\varphi(\Omega)<\infty$ 及 φ 的全加法性可知使 $\varphi\{t|x(t)=l\})>0$ 的 l 値至多有可数無穷多个，从而上述諸 l_i 的选取是可能的。令

$$A_k=\{t|l_k\leqslant x(t)<l_{k+1}\},$$

依积分的定义，及 $\varphi(F)=\Gamma(F)$（F 紧）知

$$\int_\Omega x(t)\varphi(dt)\geqslant\sum_{i=1}^{n-1}l_i\varphi(A_i)=\sum_{i=1}^{n-1}l_i\varphi(\bar{A}_i)=\sum_{i=1}^{n-1}l_i\Gamma(\bar{A}_i).$$

对各个 $\bar{A}_i$，取 $x_i\in C(\Omega)$，使 $x_i(\bar{A}_i)\geqslant1$，$\Gamma(\bar{A}_i)\geqslant f(x_i)-\frac{\varepsilon}{n}$。如假定 $x(t)\geqslant0\ (t\in\Omega)$，則 $l_1\geqslant0$。从而在 Ω 上遍处。

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n-1} l_i x_i(t)+\varepsilon \geqslant x(t).$$

由于 $f\geqslant 0$, 可知(1 表示在 Ω 上恒等于 1 的函数)：

$$\int_\Omega x(t)\varphi(dt)\geqslant \sum_{i=1}^{n-1} l_i\Gamma(\bar{A}_i)\geqslant \sum_{i=1}^{n-1} l_i\left\{f(x_i)-\frac{\varepsilon}{n}\right\}\geqslant$$

$$\geqslant f\left(\sum_{i=1}^{n-1} l_i x_i\right)-\varepsilon \max_{t\in\Omega} x(t)\geqslant f(x-\varepsilon\cdot 1)-$$

$$-\varepsilon\|x\|=f(x)-\varepsilon f(1)-\varepsilon\|x\|.$$

$\varepsilon>0$ 旣是任意的，得

$$\int_\Omega x(t)\varphi(dt)\geqslant f(x). \tag{12}$$

如 $x(t)$ 不 $\geqslant 0$, 可取适当正数 δ, 使 $x(t)+\delta 1\geqslant 0$, 从而，由于

$$\int_\Omega \delta\varphi(dt)=\delta\int_\Omega \varphi(dt)=\delta\varphi(\Omega)=\delta\Gamma(\Omega)=\delta f(1),$$

可知(12)对任意 $x\in C(\Omega)$ 成立。但用 $-x$ 代替 x, (12)变成

$$-\int_\Omega x(t)\varphi(dt)\geqslant -f(x).$$

从而

$$f(x)\geqslant\int x(t)\varphi(dt),$$

于是証得(11)

由于

$$|f(x)|\leqslant\int_\Omega |x(t)|\varphi(dt)\leqslant \max_{t\in\Omega}|x(t)|\int_\Omega \varphi(dt)=\|x\|\varphi(\Omega).$$

所以 $\|f\|\leqslant\varphi(\Omega)$, 但前面已經注意到 $\varphi(\Omega)\leqslant\|f\|$。从而

$$\|f\|=\varphi(\Omega).$$

反之，对于任意使 Ω 中一切 Baire 集可测的正則 Carathéodory 外测度

φ, (11)給出 $C(\Omega)$上一个正有界綫性泛函数这是不难看出的。

最后，我們不难看出，$C(\Omega)^*$ 可以看成是使 Ω 中一切 Baire 集可測的正則 Carathéodory 外測度之差 φ(即一般正則測度)所組成，其关系是

$$f(x)=\int_{\Omega} x(t)\ \varphi(dt) \quad (x \in C(\Omega)). \tag{13}$$

可以証明，

$$\|f\|=\|\varphi\|=\sup\{\varphi(M)-\varphi(M') \mid M \cap M'=\Phi,\ M,\ M' \in \mathfrak{B}^*\},$$

$\mathfrak{B}^*$ 表示 Ω 中一切 Baire 集全体組成的 σ 代数。事实上，$C(\Omega)^*$ 可以看成是 $V(\Omega, \mathfrak{B}^*)$ 的子空間，我們留得以后有了半序綫性空間理論的工具后再来証明。

由此推出 $\Omega=[0, 1]$ 或 $\Omega=\left\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots, 0\right\}$ 的特殊情形是有趣的。但直接的証明更値得注意。这里只陈述結果如下[①]:

为了 $f(x)$ 是 $C[0, 1]$ 上的有界綫性泛函数，必須且只須存在一个唯一决定的右連續的囿变函数 $g(t)$, 使

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\, dg(t) \qquad (x \in C),$$

并且这时

$$\|f\|=\operatorname*{var}_{0\leqslant t\leqslant 1} g(t).$$

換句話說，$C[0, 1]^*=V[0, 1]$。

又$(c)^*=(l_1)$換句話說，(c)上的綫性泛函数可以一意表示成

$$f(x)=\gamma_0\xi_0+\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\xi_k, \quad x=(\xi_k)_{k=1,2,\cdots}, \xi_0=\lim_{k\to\infty}\xi_k,$$

$$\|f\|=|\gamma_0|+\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k|<\infty.$$

① 証明見一般标准的泛函分析入門書，例如 Люстерник-Соболев, 泛函数分析概要第三章。

例 2. $E=L^p(\Omega,\mathfrak{B},\mu)$, $p\geqslant 1$。这里設 $\Omega=\bigcup_{i=1}^{\infty}M_i$, $0<\mu(M_i)<$ $<\infty(i=1,2,\cdots)$。令

$$M^{(n)}=\bigcup_{i=1}^{n}M_i,$$

如可测集 $N\subset M^{(n)}$, 那末 N 的特征函数 $x_N(t)$必 $\in L^p$。設 $f\in(L^p)^*$, 而令

$$\psi_n(N)=f(x_N),$$

不难看出 Ψ_n 是全加法集函数，(事实上，$N=\bigcup_{k=1}^{\infty}N_k$, $N_k\cap N_j=\Phi(k\neq$ $\neq j)$, 于是 $x_N=\sum_{i=1}^{\infty}x_{N_i}$, 这里無穷和按 L^p 收斂，所以 $f(x_N)$是 N 的全加法集函数)。并且是絕对連續的，因为 $\mu(N)=0\Longrightarrow x_N(t)=0$ 殆遍，从而 $f(x_N)=0$。依 Radon-Nikodym 定理(見附录)，存在 $z_n(t)\in$ $\in L^1(M^{(n)})$, 使对于每个 $N\in M^{(n)}$:

$$\psi_n(N)=\int_N z_n(t)\mu(dt).$$

令

$$z(t)=z_n(t)\qquad(t\in M^{(n)})$$

$z(t)$殆遍一意决定，并且

$$f(x_N)=\int_N z(t)\mu(dt)\quad(N\subset M^{(n)})(n=1,2,\cdots),$$

設 $x(t)$ 是單函数，并且对某 n, $\{t\,|\,x(t)\neq 0\}\subset M^{(n)}$, 那末

$$f(x)=\int_\Omega z(t)x(t)\ \mu(dt)$$

对任意 $x\in L^p(\Omega,\mathcal{B},\mu)$, 令

$$x_n(t)=\begin{cases}x(t) & \text{如 } |x(t)|\leqslant n \text{ 且 } t\in M^{(n)},\\ 0 & \text{如 } |x(t)|>n \text{ 或 } t\notin M^{(n)}.\end{cases}$$

那末 $x_n(t)$ 在 $M^{(n)}$ 之外 $=0$ 并且遍处按絕对值 $\leqslant n$, 从而可找到一串單函数 $\{x_{n,m}(t)\}_{m=1,2,\cdots}$, 一致收斂于 $x_n(t)$。又因 z 在 $M^{(n)}$ 上有和，依 Lebesgue 定理。

$$f(x_n)=\lim_{m\to\infty}f(x_{n,m})=\lim_{m\to\infty}\int x_{n,m}(t)z(t)\mu(dt)=$$

$$=\int_\Omega \lim_{m\to\infty}x_{n,m}(t)z(t)\mu(dt)=\int x_n(t)z(t)\mu(dt).$$

因 $|x_n-x|^p\leqslant|x|^p$, 而 $|x|^p$ 有和，且 $x_n\to x(p.p.)$。所以 $\int|x_n-x|^p\mu(dt)\to 0$, 从而 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$。令 $\operatorname{sgn} z(t)=\beta(t)$, 那末

$$\|x\|\geqslant\|x_n\beta\|,$$

所以
$$\|f\|\|x\|\geqslant|f(|x_n|\beta)|=\int_\Omega|x_n(t)||z(t)|\mu(dt).$$

再用 Fatou 輔理，得

$$\|f\|\|x\|\geqslant\varliminf\int|x_n(t)||z(t)|\mu(dt)\geqslant$$

$$\geqslant\int\lim|x_n(t)||z(t)|\mu(dt)=\int|x(t)||z(t)|\mu(dt).$$

即 $x(t)z(t)\in L'$。利用 $f(x_n)$ 的表現并取極限，得

$$f(x)=\int_\Omega x(t)z(t)\mu(dt),\ x\in L^p(\Omega,\beta,\mu).$$

今証 $z(t)\in L^q(\Omega,\beta,\mu)$, 其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。事实上，令

$$\alpha_n(t)=\begin{cases} z(t) & \text{如 } |z(t)|\leqslant n \text{ 且 } t\in M^{(n)},\\ 0 & \text{如 } |z(t)|>n \text{ 或 } t\notin M^{(n)},\end{cases}$$

那末 $\alpha_n\in L^q(\Omega,\beta,\mu)$, 并且对任意 $x\in L^p$,

$$\|f\|\|x\|\geqslant|f(|x|\beta)|=\int|x(t)||z(t)|\mu(dt)\geqslant$$

$$\geqslant\int|x(t)||\alpha_n(t)|\mu(dt). \qquad (14)$$

特别令
$$|x(t)|=|\alpha_n(t)|^{q/p},$$
那末利用 Hölder 不等式是等式的情形，得上不等式右边 $=\|x\|\|\alpha_n\|$，从而
$$\|f\|\geqslant\|\alpha_n\|=\left(\int_\Omega|\alpha_n(t)|^q\mu(dt)\right)^{1/q}.\qquad(p>1).$$

如果 $p=1$，則 $q=\infty$，上式換成
$$\|f\|\geqslant\|\alpha_n\|=\operatorname*{vrai\,max}_{t\in\Omega}|\alpha_n(t)|.\tag{15}$$

为了从(14)得出这式，只須先設
$$A_\varepsilon=\{t\,|\,|\alpha_n(t)|>\operatorname*{vrai\,max}_{t\in\Omega}|\alpha_n(t)|-\varepsilon\},$$
从而 $\mu(A_\varepsilon)>0$，而取 $x=x_{A_\varepsilon}$，則(14)变成
$$\|f\|\mu(A_\varepsilon)\geqslant\mu(A_\varepsilon)[\operatorname*{vrai\,max}_{t\in\Omega}|\alpha_n(t)|-\varepsilon],$$
而因 $\varepsilon>0$ 是任意的，得出(15)来。令 $n\to\infty$，并利用 Fatou 定理可知 $z\in L^q$，且 $\|f\|\geqslant\|z\|$。反之，$\|f\|\leqslant\|z\|$ 由 Hölder 不等式直接得出，从而
$$\|f\|=\|z\|=\|z\|_q.$$

任意 $z\in L^q$ 必决定 L^p 上一个有界綫性泛函数
$$f(x)=\int_\Omega x(t)z(t)\mu(dt).$$

这仍由 Hölder 不等式得出。于是得証
$$(L^p)^*=L^q,\quad\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1.\qquad(1\leqslant p<\infty).$$

例 3. 如果测度空間(Ω,β,μ)是非原子的。即如 $\mu(A)>0$，A 必有子集 B，使 $0<\mu(B)<\frac{\mu(A)}{n}$（任意自然数 n），Fréchet 空間 $S(\Omega,\beta,\mu)$ $(\mu(\Omega)<+\infty)$上沒有非零連續綫性泛函数。因平均收斂蘊涵按测度收斂，并且 $L(\Omega,\beta,\mu)\subset S(\Omega,\beta,\mu)$，所以如 $f\in S^*$，f 限制在 L 上成为 $L^*=M(\Omega,\beta,\mu)$中的元。于是存在 $\alpha(t)\in M$，使对每个 $x\in L$，

$$f(x)=\int_{\Omega} x(t)\alpha(t)\mu(dt)$$

因 L 在 S 中按 S 的距离是稠集，从而如 $f\neq 0$, $f(x)=\int x(t)\alpha(t)\mu(dt)$ 不能对一切 $x\in L$ 为 0。对某一 $\varepsilon>0$, 必然 $A_\varepsilon=\{t|\alpha(t)\geqslant\varepsilon\}$ 的测度 $\mu(A_\varepsilon)=\delta>0$, 否則可使 $A'_\varepsilon=\{t|\alpha(t)\leqslant-\varepsilon\}$ 的測度 >0, 情形也一样处理。对于任意自然数 n, A_ε 必有測度在 $\frac{\delta}{n}$ 与 $\frac{\delta}{n-1}$ 之間的可測子集，令 $x_n(t)$ 表这子集的特征函数。令 $y_n(t)=nx_n(t)$, 那末在 S 中，$\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n\|=$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\int\frac{|y_n(t)|}{1+|y_n(t)|}\mu(dt)\to 0$, 但

$$\varlimsup_{n\to\infty} f(y_n)=\varlimsup_{n\to\infty}\int_{\Omega} y_n(t)\alpha(t)\mu(dt)\geqslant\delta\varepsilon>0,$$

得出矛盾。因此，$S^*=\{\Theta\}$。

这例說明，与 Banach 空間不同，Fréchet 空間上面不一定有非零綫性連續泛函数，注意上面設(Ω,β,μ)为非原子的。如它是原子的，例如 $\Omega=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$, $\mu(\{n\})=\frac{1}{2^n}$。那末相应的空間(s)上有非零連續綫性泛函数[見習題]

注 前面已經看到，如 $1<p<\infty$, 那末 $(L^p)^*=L^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。于是 $1<q<\infty$, 从而 $(L^q)^*=L^p$, 即

$$(L^p)^{**}=L^p \qquad (1<p<\infty),$$

这就是說，L^p 是自反空間。但可以証明 $C[0,1]$ 不是自反空間①。特别值得注意的乃是 L^2: $(L^2)^*=L^2$, 即它不仅与它的"第二次共軛空間"相同，而且与它的第一次共軛空間相同。这种共軛空間叫做自共軛的。显然，自共軛空間必是自反的，但自反空間不必是自共軛的。我們將在第三章詳論 L^2 的屬性。

有了共軛空間，可以引入綫性算子的共軛算子的概念。

---

① 見Люстерник-Соболев 泛函数分析概要第三章，§ 23。

定义 4. 設 T 是定义在賦范綫性空間 E 的稠綫性子集 $\mathfrak{D}(T)$ 上的并在賦范綫性空間 E_1 中取値的綫性算子。設对于每个 $x\in\mathfrak{D}(T)$ 及 $f\in E_1^*$。由

$$f(Tx)=f^*(x)$$

决定一个 $f^*\in E^*$，那末由 f 到 f^* 的映象 T^* 是由 E_1^* 到 E^* 中的綫性算子。叫做 T 的伴算子。

注 首先，f^* 由 f 一意决定，因为 $f^*(x)=f_1^*(x)(x\in\mathfrak{D}(T))\Longrightarrow$ $\Longrightarrow f^*=f_1^*$，因 $\mathfrak{D}(T)$ 在 E 中稠，并且 f, f_1 是連續的。T^* 的加法性容易看出。

定理 6. 設 T 是由 E 到 E_1(E, E_1 都是賦范綫性空間)的有界綫性算子。那末对每个 $f\in E_1^*$，决定一个 $f^*\in E^*$，滿足

$$f(Tx)=f^*(x),$$

并且 $T^*:f\to f^*$ 是由 E_1^* 到 E^* 中的有界綫性算子，使

$$\|T^*\|=\|T\|, (\alpha T)^*=\bar{\alpha}T^*(\alpha\in K).$$

証 T^* 是加法算子，不待証。因

$$\|f(Tx)\|\leqslant\|f\|\|T\|\|x\|$$

可知 f^* 确是有界綫性泛函数，$\therefore f^*\in E^*$，并且 $\|f^*\|\leqslant\|f\|\|T\|$。这就是說 T^* 有界并且 $\|T^*\|\leqslant\|T\|$。由 T^* 又可决定一个由 E^{**} 到 E_1^{**} 中的有界綫性算子 T^{**}，使 $\|T^{**}\|\leqslant\|T^*\|$。但 E 可看成 $\subset E^{**}$，而因

$$(T^{**}\varphi)(f)=\varphi(T^*f), \varphi\in E^{**}, f\in E_1^*.$$

$\therefore$ 对每个 $x\in E$，令 $\varphi_x(f^*)=f^*(x)(f^*\in E^*)$，則

$$(T^{**}\varphi_x)(f)=\varphi_x(T^*f)=(T^*f)(x)=f(Tx),$$

从而

$$T^{**}\varphi_x=Tx,$$

但 $\|\varphi x\|=\|x\|$，所以

$$\|T\|\leqslant\|T^{**}\|.$$

合并上述結果，得 $\|T\|=\|T^*\|$。注意

$$f(\alpha Tx)=\alpha f(Tx)=\bar{\alpha}(T^*f)(x)=[(\alpha T)^*f](x),$$

可知 $(\alpha T)^*=\bar{\alpha}T^*$。

注 設 T 是由賦范綫性空間 E 到賦范綫性空間 E_0 中的有界綫性算子，而 T^* 是它的共軛算子，那末 T^{**} 是 T 的延拓，这里我們把 E 看成是 E^{**} 的子空間。

事实上，已知 $\|T^{**}\|=\|T^*\|=\|T\|$。如果 $x\in E$,

$$X_x(f)=f(x)\quad (f\in E^*),$$

那末 $X_x\in E^{**}$。令 $Y=T^{**}(X_x)\in E_0^{**}$，于是对于任意 $g\in E_0^*$，$T^*g\in E^*$，所以

$$Y(g)=(T^{**}(X_x))(g)=X_x(T^*g)=(T^*g)(x)=g(Tx),$$

这就是說，$Y=Y_y$, $y=Tx\in E_0$:

$$Y_y(g)=g(y)\quad (g\in E_0^*).$$

如果把 x 与 X_x, y 与 Y_y 等同，可知 T^{**} 是 T 的延拓。

例 1. 設 $K(s, t)$ 是二变量 (s, t) 的可測函数并且

$$\int_0^1\int_0^1 |K(s, t)|^2\, ds\, dt<+\infty$$

令由 $L^2[0, 1]$ 到自己之中的有界綫性算子 T 定义成

$$(Tx)(s)=\int_0^1 K(s, t)x(t)dt.$$

依前述，$L^2(0, 1]$ 是自共軛的。从而对每个 $f\in(L^2)^*$, $\exists y\in L^2$, 使

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\bar{y}(t)\, dt.$$

于是

$$f(Tx)=\int_0^1 \bar{y}(s)\, ds\int_0^1 K(s, t)x(t)\, dt=$$

$$=\int_0^1 x(t)\, dt\,\overline{\int_0^1 \overline{K(s, t)}y(s)\, ds}=(T^*f)(x),$$

从而 T^* 是由 L^2 到自己之中的綫性有界算子，使

$$(T^*y)(t)=\int_0^1 \overline{K(s,t)}y(s)\,ds.$$

例 2. 設 T 表示由 (l_n^2) 到它自己之中的綫性有界算子，設

$$y(\eta_1,\cdots,\eta_n),\quad x=(\xi_1,\cdots,\xi_n),$$

那末 $y=Tx$ 表示成

$$\eta_i=\sum_{j=1}^{n}\tau_{ij}\xi_j.$$

$\tau_{ij}\in K(i,j=1,\cdots,n)$。依前述，$(l_n^2)$ 是自共軛的，即它上面的每个有界綫性泛函数 $f(x)$ 可以表示成

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\bar{\alpha}_i\xi_i,\quad (\alpha_i)=a\in(l_n^2).$$

于是
$$f(Tx)=\sum_{i=1}^{n}\bar{\alpha}_i\sum_{j=1}^{n}\tau_{ij}\xi_j=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\tau_{ij}\bar{\alpha}_i\right)\xi_j=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\overline{\sum_{i=1}^{n}\bar{\tau}_{ij}\alpha_i}=(T^*f)(x),$$

从而
$$T^*f=(\beta_i):\quad \beta_j=\sum_{i=1}^{n}\bar{\tau}_{ij}\alpha_i\qquad (j=1,\cdots,n).$$

換句話說 T^* 也是一个 n 行陣，它的元 $\tau_{ij}^*=\bar{\tau}_{ji}$，卽 T^* 的陣由 T 的陣每元取复数共軛并轉置而成。

Hahn-Banach 定理的应用：

例 3. Banach 極限：設 $(x_\delta)(\delta\in\Delta)$ 是实数定向列，定义这些定向列的加法与数乘法如下：如 $x=(x_\delta)$, $y=(y_\delta)$，那末

$$x+y=(x_\delta+y_\delta),$$

$$\alpha x=(\alpha x_\delta).$$

于是这些实数定向列(定向半序集 Δ 固定)形成一个綫性实空間 E。对于每个 $x=(x\delta)$，令

$$p(x)=\overline{\lim_{\delta}}\, x_\delta=\inf_{\delta_0}\sup_{\delta>\delta_0} x_\delta.$$

那末不难看出 $p(x)$ 是次加法的正齐性泛函数。注意

$$-p(-x)=\underline{\lim_{\delta}}\, x_\delta=\sup_{\delta_0}\inf_{\delta>\delta_0} x_\delta.$$

由 Hahn-Banach 定理。[从綫性子空間 $\{\Theta\}$ 出發] 知存在定义在全空間 E 上的綫性泛函数 $f(x)\equiv\mathop{\mathrm{Lim}}_{\delta} x_\delta$，滿足下列条件:

$$\underline{\lim_{\delta}}\, x_\delta\leqslant\mathop{\mathrm{Lim}}_{\delta} x_\delta\leqslant\overline{\lim_{\delta}}\, x_\delta, \tag{16}$$

并且
$$\mathop{\mathrm{Lim}}_{\delta}(\alpha x_\delta+\beta y_\delta)=\alpha\mathop{\mathrm{Lim}}_{\delta} x_\delta+\beta\mathop{\mathrm{Lim}}_{\delta} y_\delta. \tag{17}$$

(16)是由 $f(x)\leqslant p(x)$ 及下面推理得出:

因 $f(x)\leqslant p(x)$，用 $-x$ 代替 x，得 $f(-x)\leqslant p(-x)$，或 $f(x)\geqslant -p(x)$。

如果按平常意义的極限存在，即

$$\underline{\lim_{\delta}}\, x_\delta=\overline{\lim_{\delta}}\, x_\delta=\lim_{\delta} x_\delta,$$

那末依(16) $\mathop{\mathrm{Lim}}_{\delta} x_\delta=\lim_{\delta} x_\delta$ 但 $\mathop{\mathrm{Lim}}_{\delta} x_\delta$ 对一般的数列 (x_δ) 也存在，从而 $\mathop{\mathrm{Lim}}_{\delta} x_\delta$ 叫做广义極限，或称 Banach 極限。这种極限在証明 Haar 測度存在时是有用的①。

Hahn Banach 定理应用是很广的，它是泛函分析的基本重要定理之一，本課程中我們將不断看到它的应用。往往要証明 Banach 空間 E 中兩元 x, y 相等时，只須証对于每个 $f\in E^*$，$f(x)=f(y)$，关于在泛函分析本身以外的应用，請參看 Banach 的經典性書第二章，关于它在偏

① 參看 S. Saks: Theory of the integral, 1937，中 Banach 写的一个附录。

微分方程方面的应用，参看例如 C. Miranda[11] § 29"广义边界条件"一节。关于在概率論方面的应用,例如可参看 E. Mourier[12]。

Hahn-Banach 定理也可以陈述如下。設 E 是賦范綫性空間,而 E_1 是它的綫性子空間，那末 E_1 上一个有界綫性泛函数 f_1 必可延拓成 E 上有界綫性泛函数,使

$$\|f\|=\|f_1\|_{E_1}\equiv \sup_{\substack{x\in E_1\\ \|x\|=1}} \|f_1(x)\|.$$

或簡單地說，f_1 可以保范地延拓到全空間 E 上去。很自然地引起几个問題,可以看作 Hahn-Banach 定理从几个不同角度的推广:首先,無妨設 E_1 是 E 的閉綫性子空間，因为綫性子空間 E_1 上的有界綫性泛函数一定可以按連續性延拓到 E_1 的閉包上去: $f(x)\equiv \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, $x\in \bar{E}_1\diagdown E_1$, $x_n\in E_1$。

1) f_1 到 E 上的延拓是否是一意的?一般不一定是一意的。例如考察 $E=(l_3^1)$,它上面的有界綫性泛函数可以表示成

$$f(x)=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\alpha_3\xi_3,\quad x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

如果 $f_1(x)$ 是閉綫性子空間 $E_1\equiv\{(\xi_1, \xi_2, 0)\,|\,\xi_1, \xi_2\in K\}$ 上的有界綫性泛函数,那末

$$f_1(x)=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2.$$

如果 $f(x)$ 是 $f_1(x)$ 的保范延拓,必須(且只須)

$$\max(|\alpha_1|, |\alpha_2|, |\alpha_3|)=\max(|\alpha_1|, |\alpha_2|),$$

而滿足这个等式的数 $\alpha_3\in K$ 不是一意的:只須取

$$|\alpha_3|\leqslant\max(|x_1|, |\alpha_2|).$$

A. E. Tayler [16] 曾証明: 如果 E^* 中單位球是严格凸的，換句話說，$\|x_1\|=\|x_2\|=1$, $x_1\neq x_2$; $0<\lambda<1\Longrightarrow\|\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\|<1$,那末 E 的任意閉綫性子空間 E_1 上的任意有界綫性泛函数。必可一意保范地延拓成全 E 上的有界綫性泛函数。反之，如果 E 是自反空間, E^* 中單位球严格凸也是上述一意延拓的必要条件。

2) Л. В. Канторович 于 1935 考慮了下列問題：是否可以把 Banach 空間 E 的閉綫性子空間 E_1 上的一切有界綫性泛函数 φ 延拓成 E 上的有界綫性泛函数 f，使这延拓是保范的，并且 $\varphi \to f$ 是由 E_1^* 到 E^* 中的綫性算子？Л. В. Конторович[7]找出充分必要条件为 E 是拟凸的，换句話說，必須且只須对于 E 中任意有穷多个元 $x_1, \cdots, x_n$ 及 x_0，必存在諸 x_i 之綫性組合 $\bar{x}_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i x_i$，使 $\|x_i - \bar{x}_0\| \leqslant \|x_i - x_0\| (1 \leqslant i \leqslant n)$，角谷靜夫于 1938([4]) 証明：为了 Banach 空間 E 是拟凸的，必須且只須 E 是內积空間，换句話說，E 上定义一个兩变量的函数 (x, y)，使

$$(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha(x_1, y) + \beta(x_2, y),$$

$$(x, y) = \overline{(y, x)},$$

$$(x, x) \geqslant 0 \text{ 并且 } (x, x) = 0 => K = \Theta,$$

$$(x, x) = \|x\|^2,$$

Канторович 这一問題也曾由 Bohnenblust 提出[3]。

3) 上述 Канторович 問題的一个自然推广乃是所謂 Murray 問題[13](实际上 Banach 在他的書[2]，234 頁中已經提到)：对于 Banach 空間 E 的一个閉綫性子空間 G，是否可以把由 G 到另一 Banach 空間 E_1 中的每个有界綫性算子 T 延拓成由全 E 到 E_1 中的有界綫性算子 T_0 [即找到由 E 到 E_1 中的有界綫性算子 T_0，使 $x \in G \Longrightarrow T_0 x = T_x$]，使 $\|T_0\|_E = \|T\|_G$，这里

$$\|T_0\|_E = \sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ x \in E}} \|T_0 x\|_{E_1}, \quad \|T\|_G = \sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ x \in G}} \|Tx\|_{E_1},$$

角谷靜夫于 1939 解答了这一問題[5]：为了上述 Murray 問題可解，即由 E 中任意閉綫性子空間 G 到另一个 Banach 空間 E_1(也是任意的)中的任意有界綫性算子 T 可以保范地延拓成由全 E 到 E_1 中的有界綫性算子，必須且只須 E 是內积空間。角谷靜夫指出，这定理等价于下列定理：为了对于 Banach 空間 E 的每个閉綫性子空間 G，存在一个由 E 到

G 上有界綫性算子 p，滿足 $\|p\|=1$，$p^2=p$（叫做范数的 1 的投影算子），必須且只須 E 是內积空間。

4）Hahn-Banach 定理的另一推广乃是如下的問題：$[E, \mathfrak{T}, f, p]$ 表示 (i) E 是实綫性空間，(ii) f 是定义在 E 的一个綫性子空間 $\mathfrak{D}(f)$ 上的綫性泛函数，(iii) p 是 E 上一个正齐性次加法泛函数，(iv) $x\in\mathfrak{D}(f)\Longrightarrow f(x)\leqslant p(x)$，(v) $\mathfrak{T}$ 表示由 $\mathfrak{D}(f)$ 到它自己之中的一族綫性算子，使 f 按 $\mathfrak{T}$ 中的每个算子 T 是不变的，即对每个 $x\in\mathfrak{D}(f)$，$f(Tx)=f(x)$。令 $\prec E, \mathfrak{T}, f, p\succ$ 表示 $\{F/[E, \mathfrak{T}, F, p]\ \mathfrak{D}(F)=E, x\in\mathfrak{D}(f)\Longrightarrow F(x)=f(x)\}$。如果 I 表示由 E 到它自己中的不变算子，那末 Hahn-Banach 定理意味着

$$[E, \{I\}, f, p]\Longrightarrow\prec E, \{E\}, f, p\succ\neq\phi.$$

一般在对于 $\prec E, \mathfrak{T}, f, p\succ$ 的研究方面，有 Agnew-morse[1], Woodbary [17], Dunfird, yood, U. L. Klee, Jr [9]，等人的工作。例如 Klee 得出下列結果：如果 $[E, \mathfrak{T}, f, p]$，那末下列三条件 (α)，(β)，(γ) 互相等价，而如此外 $\mathfrak{T}$ 是半群，即 $T_1, T_2\in\mathfrak{T}\Longrightarrow T_1T_2\in\mathfrak{T}$，且 $I\in\mathfrak{T}$，那末 (α)，(β)，(γ)，(δ) 都互相等价：

(α) $\prec E, \mathfrak{T}, f, p\prec\neq\phi$；

(β) 对每个有穷的 $\gamma\subset\mathfrak{T}$，$\prec E, \gamma, f, p\succ\neq\phi$；

(γ) $x\in\mathfrak{D}(f), T_i\in\mathfrak{T}, y_i\in E\Longrightarrow f(x)\leqslant p\left(x+\sum_{1}^{k}(T_i-I)y_i\right)$；

(δ) $\exists g\in\prec E, \{I\}f, p\succ$，使 $g(\delta Tx)=g(TSx)$ 且 $g(Tx)\leqslant p(x)$ 对每个 $x\in\mathfrak{D}(f)$ 及每个 $S, T\in\mathfrak{T}$ 成立。

5）Hahn-Banach 定理是关于綫性泛函数的延拓的；如果把綫性泛函数換成綫性算子，則發生下列問題：Banach 空間 E 叫做具有延拓性質，是指对于任意賦范綫性空間 $\mathfrak{X}$ 及 $\mathfrak{X}$ 的任意綫性子空間 L，由 L 到 E 中的每个連續性算子 T 至少有一个全 $\mathfrak{X}$ 上的延拓 T_0［即 T_0 是由 $\mathfrak{X}$ 到 E 中的綫性連續算子，使 $x\in L\Longrightarrow T_0x=Tx$］，使 $\|T_0\|=\|T\|$。

Hahn-Banach 定理意味着实数空間 R 具有延拓性質，L. Nachbin 于1950年[10]提出了寻求 Banach 空間，具有延拓性質的条件，特别得出，为了 E 具延拓性質，必須且只須对于任意含 E 为其賦范綫性子空間的每个賦范綫性空間 E_0，必存在一个由 E_0 到 E 上的投影 p[即有界綫性算子 p，滿足 $p^2=p$]，使 $\|p\|=1$。J. L. Kelley 于1952年[8]找出了具延拓性質的 Banach 空間的更好的特征，卽每个具延拓性質的 Banach 空間必等价于一个極端断紧 (T_2) 型空間 Ω 上实值連續函数全体所組成的 Banach 空間 $C(\Omega)$。

習 題 三

1. 試求出 (s) 上一切連續綫性泛函数。

2. 設 (C_0) 表示一切收斂于 0 的数列 $(\xi_n)=x$ 的全体組成的綫性空間，賦以范数 $\|x\|==\max\limits_n|\xi_n|$。求証 (C_0) 是 Banach 空間，求定出 (C_0) 的共軛空間。又求出 (C) 的共軛空間。

3. 求証：为了 Banach 空間 E 是自反的，必須且只須它的共軛空間 E^* 是自反的(Rus-ton)。

提示 利用 Hahn-Banach 定理。

4. 求証 Плеснер 定理[定理的陈述見 Люстерник-Соболев，汉譯本 199 頁]：如果 Banach 空間 E 不是自反的，那末 $E, E^*, E^{**}, E^{***}, \cdots$ 都是互不相同的空間(互不相同指互不等价)。

5. 求証 $L^p(p>1)$ 的單位球是严格凸的，但 L^1 的單位球不是严格凸的。

6. **(矩量問題)** 設 (x_n) 是賦范綫性空間 E 中的点列，(α_n) 是复数列，γ 是正数。为了存在 $f\in E^*$，使

$$f(x_n)=\alpha_n \quad (n=1,2,\cdots),$$

并且

$$\|f\|\leqslant\gamma,$$

必須且只須对于任意自然数 n 及任意一組复数 $\beta_1,\cdots,\beta_n$，必然

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\beta_i\alpha_i\right|\leqslant\gamma\left\|\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i\right\|$$

成立。

証 这叫做矩量問題的 Helly 定理，参看 F. Riesz, Untersuchungen über fysteme integrier barer Funktionen Math. Am, 69(1910), 449–497; E. Helly: über lineare

Funktional oferutionen, sitzber, Akad, Wiss, Wien, 121(1912)265—297, S. Banach 書，p. 57，这問題所以叫做矩量問題，导源于电力学，概率論提出的古典矩量問題：令 $E=C[0,1]$, $x_n(t)\equiv t^n(n=1,2,\cdots)$，給出实数列 (α_n)，問是否能找到單調增加函数 $g(t)$，使

$$\int_0^1 t^n dg(t)=\alpha_n, g(0)=0, g(1)=1?$$

把 $\int_0^1 x(t)dg(t)$ 看作 $C[0,1]$ 上的有界綫性泛函数 $f(x)$，就可以把問題陈述成上述一般 Banach 空間理論中的形式。

提示 引用 Hahn-Banach 定理。

由 Helly 定理导出無穷多变量的联立一次方程的一个結果：設 $1<p<\infty$，設無穷陣 (a_{ij}) 滿足

$$\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^p<\infty \quad (i=1,2,\cdots),$$

对于已知的复数列 (α_i)，考察联立一次方程

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j=\alpha_i \quad (i=1,2,\cdots), \tag{*}$$

为了方程(*)具有一組滿足条件

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^{\frac{p}{p-1}}\leqslant\gamma^{\frac{p-1}{p}}$$

的解 (ξ_j)，必須且只須对于每一組复数 $\beta_1\cdots,\beta_n$（n 是任意自然数），必然

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\beta_i\alpha_i\right|\leqslant\gamma\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{n}\beta_i a_{ij}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

成立。

7. 設 E 表示周長为 1 的圓周上定义的一切实值有界函数 $x(s)$ 的全体，s 表自圓周上某定点量起的弧長。按平常函数的运算，E 是綫性空間。对每个 $x\in E$，令

$$p(x)=\inf_{\substack{\alpha_i\in R\\ 1\leqslant i\leqslant n}}\ \sup_{-\infty<s<\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x(s+\alpha_k),$$

这里 $x(s+1)$ 看作 $=x(s)$，求証 $p(x)$ 是正齐性次加法泛函数。利用 Hahn-Banach 定理，由此推出下列結果：E 上存在一个綫性泛函数 $f(x)\equiv\int x(s)ds$（这样表示，并不意味着等于 Riemann 积分或 Lebesgue 积分），滿足下列条件：

(i) $\int [\alpha x(s)+\beta y(s)]ds=\alpha\int x(s)ds+\beta\int y(s)ds$;

(ii) $\int x(s)ds\geqslant 0$ 如果 $x(s)\geqslant 0$;

(iii) $\int x(s+s_0)ds=\int x(s)ds$;

(iv) $\int x(1-s)ds=\int x(s)ds$;

(v) $x(s)\equiv 1\ (0\leqslant s\leqslant 1)\Longrightarrow\int x(s)\,ds=1$.

求証 $\int x(s)\,ds$ 的值常介于 $x(s)$ 的上,下 Riemann 积分之間。

由此推出下列事实：令 $\mathfrak{R}$ 表示上述圓周上一切点集的全体，A_0 表示全圓周自己。求証存在由 $\mathfrak{R}$ 到 R 的一个映象 $A\to\mu(A)$，滿足下列条件：

(i) $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$，如果 $A\cap B=\phi$;

(ii) $\mu(A)\geqslant 0$;

(iii) $\mu(A)=\mu(B)$，如果存在 $s\in[0,1]$，使 $A+s=B$[这里 $A+s=\{t+s\mid t\in A\}$];

(iv) $\mu(A_0)=1$。

提示 只須令 $\mu(A)=\int\chi_A(s)\,ds$，χ_A 表示集 A 的特征函数。

注 見 Banach 書第二章，又参看本章开始处所引 Banach 1923 的那篇文章。

参考文献

[1] Agnew, R. P.—Morse, A. P.: Extension of linear functionals, with applications to limits integrals. measures and densities Ann. math. 42 (1938), 20—30.

[2] Banach, S. Théorie des opérations linéaires, 1932.

[3] Bohnenblust, F.: Convex regions and projections in Minkowski spaces, Ann. math. 39 (1938), 301—308.

[4] 角谷靜夫 (Kakutani, S.): Banach 空間に于ける linear functional を同时に扩張する問題，位相数学 1:2 (1938), 49—51.

[5] 角谷靜夫: Some characterizatuns of Enchidean space, Jap. T. math, 16 (1939), 93—97.

[6] 角谷靜夫: Concrete representatuns of abstrach (M)-spaces, Ann. math, 42 (1941), 994—1024.

[7] Канторович Л. В. Sur le prolongement des fonctionelles linéaires, ДАН СССР 1 (1935), 207—210.

[8] Kelley, J. L.: Banach spaces with the extension property, Traus.

Amer. math. Soc. 72 (1952), 323—326.

[9] Klee, V. L. jr. Invariant extension of linear functionals, Pac. J. math. 4 (1954), 37—46.

[10] Nachbin, L.: A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations, Trans. Amer. math. Soc. 68 (1950), 28—46.

[11] Miranda, C.: Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittics, 1955.

[12] Maurier, E.: Éléments aléatoires claus un espace de Banach, Ann. Inst. Henri Pouicasé.

[13] Murray, F. J. on cemplementary manifolds ni space Lp and lp, Trans. Ames. math. Soc. 41 (1937) 138—152.

[14] Silverman, R. J.: Means on semigrups and the Hahn-Banach extension property, Traus. Amer. math, Soc. 83 (1956), 222—237.

[15] Sobczyk, A.: On the extension of linear transformations.

[16] Tayler, A. E.: The extension of linear functionals, Duke math. J. 5 (1939), 538—547.

[17] Woodbury, M. A.: Invariant functionals and measures, Ball Amer. math. Soc. 56 (1950), 172, Abst. 168t.

[18] 吉田耕作 (Yosida, K.): 位相解析 I.

§4. Hilbert 空間

前面已經提及，有穷維空間可以賦以种种范数使它成为 Banach 空間。但平常欧几里得空間中很多命题还是不能在这种一般的有穷維 Banach 空間中得到相应的結果原。因在于欧几里得空間的一个特点乃是其上有一內积

$$(x, y)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\bar{\eta}_i,\quad x=(\xi_i),\quad y=(\eta_i),\quad (1\leqslant i\leqslant n),$$

借它可以定义矢量的直交①，为此，要得到欧几里得空間的無穷維类比，

① 关于这点，請参看一些綫性代数的書，例如 Ф. Р. Гантмахер, 矩陣論，Шилов, Г. Е. Введение в Теорию линейных пространств, 1952; И. М. Гельфанд: 綫性代数学; А. И. Мальцев, 綫代数基础; Courant, R.-Hilbert, D.: Methoden der mathematischen physik I(有英,俄譯本); В. И. Смирнов 高等数学教程第三卷第一部分; Halmos, R. P.: Finite dimensional vector spaces, wintner, A.: spektral theorie der unendlichen matrizen(1929) 等等。

一般的 Banach 空間是不够的。很自然的想法乃是把上述內积推广到無穷維空間上来。实际上，这早在 Banach 空間理論出現之前，D. Hilbert 在研究积分方程理論之际就已提出了这种帶有內积的無穷維空間。現在为了紀念他称做 Hilbert 空間。本节只討論作为 Banach 空間的特殊情形的 Hilbert 空間的簡單性質，而关于 Hilbert 空間理論的深入部分，特别是其中的綫性算子譜理論將在第三章詳論。

定义 1. 設 E 是数域 K 上的綫性空間，由 $E\times E$ 到 K 中的映象 $x, y\to(x, y)$ 叫做內积，是指

1) $(\alpha x, y)=\alpha(x, y)$;

2) $(x+y, z)=(x, z)+(y, z)$;

3) $(x, y)=\overline{(y, x)}$ （$\overline{\alpha}$ 表示 K 中 α 的共軛复数；如 K 是实数域，則 $\overline{\alpha}=\alpha$）;

4) $(x, x)\geqslant 0$, $(x, x)=0\Longrightarrow x=0$

賦范綫性空間 E 叫做內积空間，是指它上面有一內积 (x, y)，使 $\|x\|=+\sqrt{(x, x)}$。完备的內积空間叫做 Hilbert 空間。

例 1. (l^2) 是可分 Hilbert 空間，这里內积定义成

$$(x, y)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\overline{\eta}_i,\ x=(\xi_i),\ y=(\eta_i),\ (i=1, 2, \cdots).$$

(x, y) 的存在由 Hölder 不等式（事实上，是它的特例 Schwarz-Cauchy-Буняковский 不等式）

$$\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\overline{\eta}_i\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

得出，而定义 1 中的 1), 2), 3), 4) 及內积与范数的关系容易看出。

例 2. $L^2(\Omega, B, \mu)\big[\Omega=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i,\ \mu(A_i)<\infty\big]$ 是 Hilbert 空間，这里內积是

$$(x, y)=\int_{\Omega} x(t)\overline{y(t)}\mu(dt),$$

它的存在由 Hölder 不等式的特例

$$\left|\int_{\Omega} x(t)\overline{y(t)}\mu(dt)\right| \leqslant \left(\int_{\Omega} |x(t)|^2\mu(dt)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega} |y(t)|^2\mu(dt)\right)^{\frac{1}{2}}$$

得出。

例 3. Harald Bohn 定义$(-\infty, \infty)$上复数值連續函数 $x(t)$ 叫做殆周期的：是指对于每个 $\varepsilon>0$，存在一数 $l>0$，使实数軸上每个長度为 l 的区間必包含一数 τ，使

$$|x(t+\tau)-x(t)|<\varepsilon, \quad -\infty<t<\infty.$$

Bochner 証明，为了連續函数 $x(t)$ 是殆周期的，必須且只須对于每一列 $\{x(t+\sigma_n)\}$ $(n=1, 2, \cdots)$，可取出一子列一致收斂。不难証明，殆周期函数在全实数軸上有界且一致連續，并且周期函数乃是殆周期函数的特例，这种殆周期函数的全体組成一个綫性空間，特別，形狀如 $e^{i\lambda t}$ 的函数的有穷綫性組合

$$\sum_{k=1}^{n} e^{i\lambda_k t} \tag{1}$$

也屬于这个空間 E，还可以証明 E 按一致收斂是閉的，从而形如 (1) 的函数的列的一致收斂極限也屬于 E。对于 $x\in E$，可以証明

$$M(x)\equiv \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t+\tau)\,d\tau$$

---

① 这方面名詞的用法是很多样的。按早期的用法，Hilbert 空間是指無穷維，可分，完备，內积的綫性空間 (J. V. Neumann, Grundlagen der Quantenmechanik 1935 与 M. H. Stone, Linear transformations in Hilbert space 1932)。不加可分条件的(卽这里所謂 Hilbert 空間，近年來这种用法較多)有时叫做广义欧几里得空間(例如 B. V. Sz. Nagy: Spektral darstellung linearer Transformationen der Hilbertschen Raumes 1942)。我国曾远柴先生称这种不加可分条件的 Hilbert 空間作內积空間，他也是最早引入这种空間的人之一(1932)。

存在，并且与 T 的值無关，并且对一切 $t\in(-\infty,\infty)$ 極限是一致存在的。于是 $M(x)$ 是 E 上的連續綫性泛函数。可以証明，如 $x, y\in E$,

$$(x, y)=M(x(t)\overline{y(t)})$$

存在，并且滿足定义 1 中 1), 2), 3), 4) 諸条件。于是 E 成为內积空間。这空間是非完备的[①]。

注： 在随机过程理論中，由于在很多实际問題的要求[②]考虑那些使二阶矩量 $(S(\Omega,\mathfrak{B}, P), P(\Omega)=1)$:

$$E(x(t)^2)=\int_\Omega |x(\omega, t)|^2\rho(d\omega)<\infty$$

存在的平稳过程 $(E(x(t)^2)=E(x(0)^2)$, $E(x(t))=E(x(0))$, $E(x(t)x(s))=E(x(t-s)(0))$, 这里 $E(x(t))=\int_\Omega x(\omega(t)\rho(d\omega))$。从而我們要考虑在 Hilbert 空間 $L^2(\Omega, \beta, P)$ 中取值的抽象函数。为此，Hilbert 空間理論成为研究这种平稳随机过程的重要工具。

定理 1 (Hilbert 空間的特征)：[③] 为了 Banach 空間 E 是 Hilbert 空間，必須且只須它的范数滿足。

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2 \quad (x, y\in E). \tag{2}$$

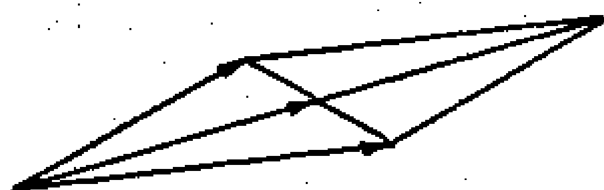


圖 2.

注： 公式 (2) 叫做中綫公式，实际上，这公式表明在由矢量 x, y 張成的平行四边形中，四边边長平方之和等于兩对角綫長平方之和。

① 这里不詳加証明有关殆周期函数的諸結果，讀者可参看 F. Riesz et B. Sz.-Nagy, Leçons d'analyse fonctionnelle, §§ 101, 102; H. Bohn, Fastperiodische Funktionen. 1932; W. Maak, Fast periodische Funktionen 1950; Б. М. Левитан: 概周期函数等專書。

② А. М. Яглом, 平稳随机函数导論，数学进展第二卷第一期(1956)。

③ 关于 Banach 空間滿足那些条件就可以在其中定义內积使它成为 Hilbert 空間的問題，即所謂找出 Hilbert 空間的特征問題，研究者很多，請見本节后附的文献。

証： 1)先考虑实的 Banach 空間 E。設(2)滿足。令

$$(x, y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2). \tag{3}$$

那末显然$(x, y)=(y, x)$，并且 $\|x\|^2=(x, x)$。由(2)(3)得

$$(x, z)+(y, z)=\frac{1}{4}[\|x+z\|^2-\|x-z\|^2+\|y+z\|^2-\|y-z\|^2]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left\|\frac{x+y}{2}+z\right\|^2-\left\|\frac{x+y}{2}-z\right\|^2\right]=2\left(\frac{x+y}{2}, z\right). \tag{4}$$

特别令 $y=0$，由(3)得知

$$(0, z)=0,$$

从而由 (4) 知

$$(x, z)=2\left(\frac{x}{2}, z\right),$$

于是由 (4) 知

$$(x, z)+(y, z)=(x+y, z). \tag{5}$$

(5) 說明 $f(x)=(x, z)$ 是E 上的加法泛函数。由(3)及 Banach 空間中范数的連續性得知 $f(x)$是E 上的連續加法泛函数。从而[§ 2 的習題1] $f(x)$是齐性的，即

$$(\alpha x, z)=\alpha(x, z)$$

得証，这就是說，(x, y)确是內积，并且E 是 Hilbert 空間。

2) 設E 是复Banach 空間并且(2)成立。令

$$(x, y)=(x, y)_1+\sqrt{-1}(x, \sqrt{-1}y)_1,$$

$$(x, y)_1=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2).$$

因E 也可以看成是实 Banach 空間，从而依已証的部分 1)，$(x, y)_1$ 是一个(实的)內积。現在証明 (x, y) 的复齐性，而为此，只須証 $(ix, y)=$ $=i(x, y)$ $(i=\sqrt{-1})$。事实上由 1)知

$$(y, x)_1=(x, y)_1,$$

$$(ix, iy)_1=\frac{1}{4}(\|ix+iy\|^2-\|ix-iy\|^2)=(x, y)_1.$$

于是 $$(y, ix)_1=(-iiy, ix)_1=(-iy, x)_1=-(x, iy)_1.$$

从而

$$(ix, y)=(ix, y)_1+i(ix, iy)_1=-(x, iy)_1+i(x, y)_1=i(x, y).$$

又
$$(y, x)=(y, x)_1+i(y, ix)_1=(x, y)_1-i(x, iy)_1=\overline{(x, y)}.$$

$$(x, x)=(x, x)_1+i(x, ix)_1=(x, x)_1=\|x\|^2,$$

从而E是以(x, y)为内积的 Hilbert 空間。

3) 反之，如果E是 Hilbert 空間，那末其上有一内积(x, y)，使

$$(x, x)=\|x\|^2,$$

从而
$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=(x+y, x+y)+(x-y, x-y)=$$
$$=(x, x+y)+(y, x+y)+(x, x-y)-(y, x-y)=$$
$$=\overline{(x+y, x)}+\overline{(x+y, y)}+\overline{(x-y, x)}-\overline{(x-y, y)}=2\|x\|^2+2\|y\|^2.$$

注： 定理中只說，当存在一內积，使范数$\|x\|=\sqrt{(x, x)}$时，E成为 Hilbert 空間。事实上，如果(x, x)是內积，滿足定义 1 中的1)，2)，3)，4)，那末$\|x\|=\sqrt{(x, x)}$ 确实滿足范数的三个条件。事实上，首先証明 Schwarz—Буняковский 不等式。

$$|(x, y)|\leqslant\|x\|\,\|y\|, \tag{6}$$

式中等号适用的必要充分条件乃是存在数α，使$x+\alpha y=\Theta$，事实上，如果$y=\Theta$(6)是显然的，如果$y\neq\Theta$，对于任意复数λ，

$$(x+\lambda y, x+\lambda y)\geqslant 0 \tag{7}$$

于是
$$(x, x)+\lambda(y, x)+\bar{\lambda}(x, y)+\lambda\bar{\lambda}(y, y)\geqslant 0,$$

特别令
$$\lambda=-\frac{(x, y)}{(y, y)},$$

就得出(6)来。为了(6)成为等式，必須且只須(7)成为等式，卽$x+\lambda y=\Theta$。

由(6)容易推出范数的三角形不等式：

$$\|x+y\|^2=(x+y, x)+(x+y, y)\leqslant\|x+y\|\,\|x\|+\|x+y\|\,\|y\|,$$

从而$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$。为了三角形不等式变成等式，必須且只須在上面使用 Schwarz—Буняковский 不等式时，兩次都碰到等式，从而依

上述，不难看出 $x+\mu y=0$, 但

$$\|x+y\|=\|(1-\mu)y\|=\|x\|+\|y\|=(|\mu|+1)\|y\|,$$

从而 $-\mu=|\mu|$, 卽 $x=\lambda y;\lambda\geqslant 0$ 或 $1-\mu=|\mu|+1$, 如 $\mu>1$, 卽不可能。$\|x\|$ 的齐性：$\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$ 与 $\|x\|=0\Longleftrightarrow x=\Theta$, 容易看出，从而 $\|x\|$ 当眞是范数。

在 Hilbert 空間中还有一个常用的等式値得在这里提出：

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2-\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2+i\left\|\frac{x+iy}{2}\right\|^2-i\left\|\frac{x-iy}{2}\right\|^2=(x,y). \qquad (8)$$

这式的作用是这样的，当关于 $\|x\|^2$ 获得某些知識时，往往可借(8)把这知識推到内积(x,y)上去，这方法有些作者称之为"極化"。

定义 2. 在内积空間中，元 x,y 叫做相互直交，指 $(x,y)=0$, 元 x 叫做規格化的，是指 $\|x\|=1$, 元族 (x_c) 叫做直交規格化組，是指 $(x_c,x_k)=0$ 或 1, 看 $c\neq k$ 或 $c=k$ 決定。

定义 3. Banach 空間 E 中的集 G 叫做基集，是指

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} r_k x_k \,\middle|\, n\in N,\ x_i\in G\ (1\leqslant i\leqslant n),\ r_i\in k(1\leqslant i\leqslant n)\right\}$$

(N 表自然数全体)在 E 中稠。基集的势的最小者叫做空間 E 的維数。

例 1. 在(l^p)中，令 $e_i=(0,0\cdots,0,1,0,\cdots)=(\delta_{ji})_{j=1,2,\cdots}$, δ_{ij} 表示 Kronecker 符号：$\delta_{ij}=1$ 或 0, 由 $i=j$ 或 $i\neq j$ 而定。任意 $x\in(l^p)$ 可以表示成

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i,\quad \sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p<\infty.$$

$$\therefore \qquad \|x-\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\|^p\leqslant\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p<\varepsilon$$

从而 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$ 是(l^p)的基集，特别(l^p)的維数 $=\aleph_0$, 因为(l^p)不是有穷維的。

例 2. 在前述的$(-\infty, \infty)$上連續殆周期函数全体組成的 Hilbert 空間E中，諸$e^{i\lambda t}$都是相互直交的，卽滿足

$$(e^{i\lambda t}, e^{i\mu t})=0 \quad (\lambda \neq \mu),$$

事实上

$$(e^{i\lambda t}, e^{i\mu t})=M(e^{i(\lambda-\mu)t})=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\frac{e^{i(\lambda-\mu)T}-e^{-i(\lambda-\mu)T}}{i(\lambda-\mu)}=$$

$$=0 \quad 如 \lambda\neq\mu,$$

$$=M(|e^{i\lambda t}|^2)=M(1)=1 \quad 如 \lambda=\mu,$$

从而$(e^{i\lambda t})$是一直交規格化組。可以証明，

$$\{e^{i\lambda t} \mid -\infty<\lambda<\infty\}$$

是E中的基集①。由下面一个一般結果將得知，这空間維数是$2^{\aleph_0}$（或$\mathfrak{c}$）（卽連續統的势）。

例 3. 对于有穷維 Banach 空間，不难看出上面定义的維数与綫性代数中的理解是一致的，卽維数等于空間中綫性無关元的最大数目。

注： 在定理 1 的証明中曾指出內积(x, y)是x的連續泛函数（y固定）。事实上，它是两变量x, y的連續泛函数，因为

$$|(x, y)-(x', y')|\leqslant|(x, y)-(x', y)|+|(x', y)-(x', y')|\leqslant$$

$$\leqslant\|x-x'\|\|y\|+\|x'\|\|y-y'\|.$$

如果$x_n\to x, y_n\to y$，那末$\|x_n\|\to\|x\|$，从而$(\|x_n\|)$有界，所以在上述不等式中用x_n, y_n各代替x', y'，不难看出$(x_n, y_n)\to(x, y)$。由此可知，如果$(x, z)=(y, z)$对于基集G中每个元z成立，那末$x=y$。事实上，上等式意味$x-y$与G中每个元直交，而因內积$(x-y, z)=0$是z的連續函数，而基集G在空間中稠密，可知$(x-y, z)$对每z成立，特别令$z=x-y$，得知$\|x-y\|^2=(x-y, x-y)=0$，所以$x=y$。这一点也是在以后論 Hilbert 空間中常用到的。

① F. Riesz B. Sz.-Nagy, Leçons d'analyse functionnelle, §§101–102. 又見 Б. М. Левитан, 概周期函数，第一章，§7。

下面还举出几个关于 Hilbert 空間的簡單事实。

Bessel 不等式: 設 S 是 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 中的直交規格化組。而 x 是 $\mathfrak{H}$ 中任意元,那末对于 S 中任意有穷多不同元 $e_1, e_2, \cdots, e_n$,

$$\sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{9}$$

事实上,注意如果 $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\left(x - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)e_k, e_i\right) =$$

$$= (x, e_i) - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)\delta_{ki} = (x, e_i) - (x, e_i) = 0,$$

从而,对于任意复数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$,

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right\|^2 = \left\|x - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)e_k + \sum_{k=1}^{n} [(x, e_k) - \alpha_k]e_k\right\|^2 =$$

$$= \left\|x - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)e_k\right\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k) - \alpha_k|^2, \tag{10}$$

因为,一般如果 a 与 b 直交,必然

$$\|a+b\|^2 = (a+b, a+b) = \|a\|^2 + \|b\|^2 \text{ (畢达哥拉等式)。}$$

于是

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right\|$$

当 $\alpha_k = (x, e_k)(1 \leqslant R \leqslant n)$ 时达到它的極小值。从而$(x, e_k)(1 \leqslant k \leqslant n)$是使 $e_1, \cdots, e_n$ 的綫性組合逼近 x 的最好系数. $\{(x, e) \mid e \in S\}$ 叫做元 x 按直交規格化組 S 的 Fourier 系数。注意

$$\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}|(x, e_k)|^2=(x-\sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k, x-\sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k)=$$

$$=\|x-\sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k\|^2\geqslant 0, \tag{11}$$

这正是(9)。由此可知，对于每个 x，諸$(x, e)(e\in S)$中至多有可数个不等于 0，因为对于每个自然数 p，由 Bessel 不等式至多有有穷多个 $e\in S$，使 $|(x, e)|\geqslant\frac{1}{p}$，而令 $p=1, 2, \cdots$，得知諸不等于 0 的(x, e)的可数性。令 $\Delta=(\delta)$ 表示 S 的有穷子集按包含关系序次而得的定向半序集，那末，令

$$S_\delta=\sum_{e\in\delta}(x, e)e$$

是 $\mathfrak{H}$ 中的元，而且不难看出按 $\mathfrak{H}$ 中的距离，定向点列$(S_\delta)_{\delta\in\Delta}$ 收斂于 x（这由(11)不难推出），从而仿平常無穷級数的写法，我們說 $\sum_{e\in\delta}(x, e)e$ 收斂于空間一元，表示成 $\sum_{e\in S}(x, e)e$。这个元叫做元 x 的 Fourier 展开，如果 S 是基集，那末对于每个 $x\in\mathfrak{H}$，

$$x=\sum_{e\in S}(x, e)e. \tag{12}$$

事实上，令 y 表示上式(12)右边的元，那末由于内积的連續性得知对于每 $e\in S$，

$$(x, e)=(y, e),$$

从而依前面所述基集的一个性質 $x=y$。

定义 4. Hilbert 空間中直交規格化組叫做完全的，是指这組是空間的基集。

定理 2. 在 Hilbert 空間中，完全直交規格化組 S 的势等于空間的維数。

証: 对有穷維空間，这結果是綫性代数中的熟知事实。对于無穷維空間，由于完全直交規格化組 S 是一个基集，只須証对于任意一个基集 G, G 的势$\geqslant S$ 的势。設 G_1 表示 G 中元的有理复系数① 有穷綫性組合的全体，那末 G_1 的势$=G$ 的势。既然 G_1 在 E 中稠(这点不难看出)，对每个 $y\in S$, 必存在 $z_y\in G_1$, 使

$$\|y-z_y\|<\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

如果 $y\neq y'$, 那末相应的 $z_y\neq z_{y'}$, 因为如果 $z_y=z_{y'}$, 那末

$$\|y-y'\|=\|(y-z_y)-(y'-z_{y'})\|\leqslant$$
$$\leqslant\|y-z_y\|+\|y'-z_{y'}\|<\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2},$$

与(畢达哥拉等式)

$$\|y-y'\|^2=\|y\|^2+\|y'\|^2=2$$

矛盾，从而 G_1 的势$\geqslant S$ 的势，証完。

注: 由此可知 Bohn 的連續殆周期函数所組成的 Hilbert 空間的維数等于 $2^{\aleph_0}$。

注意具可数基的 Hilbert 空間必是可分的，因为如果 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$ 是基，可数集 $\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i \,\middle|\, \alpha_i=\text{有理复数},\ 1\leqslant i\leqslant n,\ n\ \text{任意自然数}\right\}$ 在空間中稠。反之，如果 Hilbert 空間可分，空間必具可数基。事实上，如空間不具可数基，那末依基集的定义，空間維数$>\aleph_0$, 而由定理 2, 如果空間有完全直交規格化組 S, 这組的势$>\aleph_0$。对于 S 中每个元 x, 依可分性的定义，必存在一可数集 $A=(y_n)$中之一元 y_n, 使 $\|x-y_n\|<\frac{\sqrt{2}}{2}$。仿定理 2 的証明，得出矛盾。为了完成这里的証明，必須証明下列定理:

定理 3. 对于任意 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 必存在完全直交規格化組。

① 复数 $\alpha+i\beta$ 叫做有理的，指 α, β 是实有理数。

注：对于有穷維情形，結果是綫性代数中熟知的，先考察可数多个綫性無关元$\{y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots\}$。今用 E. Schmidt 的直交化程序，由$\{y_1, \cdots, y_n, \cdots\}$造成一个直交規格化組来。事实上，令

$$e_1 = \frac{y_1}{\|y\|},$$

$$e_n = \frac{g_n}{\|g_n\|}, \qquad g_n = y_n - \sum_{k=1}^{n-1} (y_n, e_k) e_k.$$

由于諸 y_k 的綫性無关性可知諸 g_n 都不为 0，因为每个 e_k 是諸元 $y_1 \cdots y_k$ 的綫性組合。不難看出 $\{e_1, e_2, \cdots e_n \cdots\}$ 是直交規格化組。

今把空間中一切直交規格化組按包含关系序次，得出一个半序集来。如果 $(S_L)(L \in I)$ 是这个半序集的一个全序子集，那末取諸 S_L 的幷集

$$S = \bigcup_{L \in I} S_L,$$

S 仍是直交規格組，事实上，对于任意不同兩元 $x, y \in S$，必存在 $L_1, L_2 \in I$，使 $x \in S_{L1}, y \in S_{L2}$，而由于 (S_L) 按包含关系是全序的，無妨設 $x, y \in S_{L1}$，从而依 S_{L1} 的定义，

$$(x, y) = 0,$$
$$(x, x) = 1,$$

从而 S 是直交規格化組，依 Zorn 輔定理，有一極大直交規格化組 S_0 存在。如果 S_0 不是完全的，依基集的定义，存在一元 u，它不等于任何一串 S_0 中元的有穷綫性組合的極限。設

$$\sum_{e \in S_0} (u, e) e$$

是 u 按直交規格化組 S_0 的 Fourier 展开，那末

$$v = u - \sum_{e \in S_0} (u, e) e \neq 0,$$

因否則，由于上式中的和里只有可數多項不为 0，从而如右边是 0，則 v 便成为形如 $\sum_{i=1}^{n}(u, e_i)e_i(e_i \in S_0, 1 \leqslant i \leqslant n)$ 的元列的極限了。由于 $(v, e) = (u, e) - (u, e) = 0 (e \in S_0)$ 从而如令

$$e_0 = \frac{v}{\|v\|},$$

那末 $S_0 \cup \{e_0\}$ 仍是直交規格化組，与 S_0 的極大性矛盾；从而 S_0 是完全的，証完。

下面举几个函数空間中的直交規格組。

例 1. 考察空間 $L^2[0, 2\pi]$，这里測度理解成平常 Lebesgue 測度。

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikt}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

組成一个直交規格化組．为了証明它是完全組，只須証明沒有一个非殆遍 $=0$ 的函数 $x(t) \in L^2[0, 2\pi]$ 滿足

$$\int_0^{2\pi} x(t)e^{-ikt}dt = 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \tag{13}$$

令 $y(t) = \int_0^t x(t)\,dt$，那末把(13)分部积分，得

$$y(t)e^{-ikt}\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} y(t)\,kie^{-ikt}dt = 0, \tag{14}$$

而利用(13)，得 $\int_0^{2\pi} x(t)\,dt = 0$(即 $k=0$ 的特殊情形)，代入(14)得

$$\int_0^{2\pi} y(t)e^{-ikt}dt = 0 \quad (k = \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

又因 $\int_0^{2\pi} e^{-ikt}dt=0$ 因此对于任意常数 γ，

$$\int_0^{2\pi}[y(t)-\gamma]e^{-ikt}dt=0 \quad k=\pm1,\pm2,\cdots. \tag{15}$$

今取 γ，使(15)对 $k=0$ 也成立，这当然是可能的，只須令

$$\gamma=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\,dt,$$

于是得知，連續函数 $y(t)-\gamma$ 滿足(15)，$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$。但依 Weierstrass 逼近定理①，对于每个 $\varepsilon>0$ 存在三角多項式

$$\sigma(t)=\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt},$$

使
$$|y(t)-\gamma-\sigma(t)|<\varepsilon \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

于是利用(15)(包括 $k=0$ 的情形)，令 $\tilde{y}(t)=y(t)-\gamma$，

$$\int_0^{2\pi}|\tilde{y}(t)|^2dt=\int_0^{2\pi}\overline{\tilde{y}(t)}[\tilde{y}(t)-\sigma(t)]\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\int_0^{2\pi}|\tilde{y}(t)|dt\leqslant\varepsilon\sqrt{2\pi}\Big[\int_0^{2\pi}|\tilde{y}(t)|^2dt\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

由此，得
$$\int_0^{2\pi}|\tilde{y}(t)|^2\,dt\leqslant 2\pi\varepsilon^2.$$

ε 既是任意的，$\tilde{y}(t)=0$，即 $y(t)=\gamma$，从而 $x(t)=y'(t)=0$。

例 2. 考察空間 $L^2(-\infty,\infty)$。函数組

$$e^{-\frac{t^2}{2}},\quad te^{-\frac{t^2}{2}},\quad t^2e^{-\frac{t^2}{2}},\cdots$$

① Натансон，实变函数論，第四章 §5，定理 4。

是綫性無关的，把它直交化（E. Schmidt 程序）得

$$x_k(t)=(-1)^k e^{\frac{t^2}{2}}\frac{d^k e^{-t^2}}{dt^k}=H_k(t)e^{-\frac{t^2}{2}}\,(k=0,1,2,\cdots),$$

这里 $H_k(t)$ 是 k 次多項式，叫做 Hermite 多項式。不难証明

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_k(t)x_m(t)\,dt=\begin{cases}0 & (k\neq m),\\ 2^m m!\sqrt{\pi} & (k=m).\end{cases}$$

从而

$$\frac{1}{2^{m/2}\sqrt{m!}\,\pi^{1/4}}x_m(t)\quad (m=0,1,2,\cdots)\tag{16}$$

是直交規格化組。今証(16)是完全組。設 $x(t)\in L^2(-\infty,\infty)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x_k(t)\,dt=0\quad (k=0,1,2,\cdots),$$

换句話說，

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\frac{t^2}{2}}t^k dt=0\quad (k=0,1,2,\cdots),\tag{17}$$

考察函数

$$F(z)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\frac{t^2}{2}}e^{itz}dt,$$

这对于任意有穷复数是有意义的，并且到处具有有穷导数

$$F'(z)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\frac{t^2}{2}}e^{itz}it\,dt,$$

因此 $F(z)$ 在复平面的任意有穷部分上是全純函数。依(17)，

$$F^{(n)}(0)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\frac{t^2}{2}}(it)^k dt=0\quad (k=0,1,2,\cdots),$$

从而 $F(z)\equiv 0$，因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\frac{t^2}{2}}e^{it\xi}dt=0\quad (-\infty<\xi<\infty),$$

把式兩边乘 $e^{-i\xi\eta}$; η 是实数，并按 ξ 从 $-\omega$ 到 ω 取积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{\sin\omega(t-\eta)}{t-\eta}dt=0,$$

而上式对任意实数 η 与 ω 成立。由此，可知 $x(t)=0$①。完全性証完。

为了考察一般的 Hilbert 空間的具体表現，我們考察一个特殊的 Hilbert 空間 $l^2(\aleph)$。設 Ω 是势 $=\aleph$ 的集，并且对每个 $\omega\in\Omega$，令一数 ξ_ω 与它相应，使只有可数多个 ω 使 $\xi_\omega\neq 0$，并且

$$\sum_{\omega\in\Omega}|\xi_\omega|^2<+\infty.$$

这种函数 $x=(\xi_\omega)(\omega\in\Omega)$ 的全体表示成 $l^2(\aleph)$。定义

$$(\xi_\omega)+(\eta_\omega)=(\xi_\omega+\eta_\omega),$$

$$\alpha(\xi_\omega)=(\alpha\xi_\omega),$$

$$\|x\|=\Big(\sum_{\omega\in\Omega}|\xi_\omega|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

$$(x,y)=\sum_{\omega\in\Omega}\xi_\omega\bar{\eta}_\omega,$$

$l^2(\aleph)$ 是 Hilbert 空間，如果 $e_{\omega_0}=(\xi_\omega)$ 定义成

$$\xi_\omega=\begin{cases}0 & \text{如 } \omega\neq\omega_0,\\ 1 & \text{如 } \omega=\omega_0,\end{cases}$$

那末諸 $(e_\omega)(\omega\in\Omega)$ 是直交規格化組，并且不难看出 (e_ω) 是基集，于是不难証明 $\dim l^2(\aleph)=\aleph$。从而当 $\aleph>\aleph_0$ 时，$l^2(\aleph)$ 是不可分的，現在証明 Hilbert 空間的实現定理:

定理 4. 維数为 $\aleph$ 的 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 必等价于 $l^2(\aleph)$。

証　依定理 2, 3，取空間中的一个势为 $\aleph$ 的完全直交規格化組 (e_ω) $(\omega\in\Omega$, Ω 的势 $=\aleph)$。对于每个 $x\in\mathfrak{H}$, $(x,e_\omega)=\xi_\omega$ 是一組数，其中至

① 例如見 Смирнов 高等数学教程第二卷 Фихтенгольц 微积分学教程第三卷。

多可数多个不为 0，并且依 Bessel 不等式，

$$\sum_{\omega\in\Omega}|\xi_\omega|^2<+\infty.$$

从而 $x\to(\xi_\omega)(\xi_\omega=(x,e_\omega))$ 是由 $\mathfrak{H}$ 到 $l^2(\aleph)$ 中的映象。这映象显然是加法齐性的，这映象是保范的：事实上，取 Δ 为 Ω 中一切有穷子集的全体，那末，令

$$s_\delta(x)=\sum_{\omega\in\delta}(x,e_\omega)e_\omega,$$

则
$$(s_\delta(x),s_\delta(y))=\sum_{\omega\in\delta}(x,e_\omega)\overline{(y,e_\omega)}.$$

由于内积的连续性，并注意 Schwarz–Буняковский 不等式，

$$\sum_{\omega\in\Omega}(x,e_\omega)\overline{(y,e_\omega)}\text{ 是收斂級数并且}$$

$$(x,y)=\sum_{\omega\in\Omega}(x,e_\omega)\overline{(y,e_\omega)}.\tag{18}$$

特别
$$\|x\|^2=\sum_{\omega\in\Omega}|(x,e_\omega)|^2.$$

剩下要証明 $x\to(\xi_\omega)(\xi_\omega=(x,e_\omega))$ 是由 $\mathfrak{H}$ 到 $l^2(\aleph)$ 上的映象，从而是等价。事实上，对于任意一个 $(\xi_\omega)\in l^2(\aleph)$，令

$$s_\delta=\sum_{\omega\in\delta}\xi_\omega e_\omega,$$

那末 (s_δ) 是 $\mathfrak{H}$ 中一定向列，而

$$\|s_{\delta_1}-s_{\delta_2}\|=\sum_{\omega\in\delta_1\ominus\delta_2}|\xi_\omega|^2,$$

这里 $\delta_1\ominus\delta_2$ 表示 $(\delta_1\cup\delta_2)/(\delta_1\cap\delta_2)$。由于 $\Sigma|\xi_\omega|^2<\infty$，$(s_\delta)$ 是基本定向列，从而依 $\mathfrak{H}$ 的完备性，它收斂于 $\mathfrak{H}$ 中一元 x。由于内积的連續性不难看出

$$(x, e_\omega) = \xi_\omega.$$

从而定理証完。

注 定理的最后部分，即对于任意一族滿足

$$\sum_{\omega \in \Omega} |\xi_\omega|^2 < \infty$$

的数(其中至多可数多个如 0)必存在一元 $x \in \mathfrak{H}$，使

$$(x, e_\omega) = \xi_\omega,$$

叫做 Riesz-Fircher 定理①。又(18)通常叫做 Parseval 公式。由定理直接得知，凡可分 Hilbert 空間必等价于 $l^2 = l^2(\aleph_0)$。特别，$L^2[0, 2\pi]$(一般可以証明 $L^2[a, b]$, $a < b$)与 $L^2(-\infty, \infty)$ 都具可数完全直交規格化組，从而都等价于 l^2。

系 兩个 Hilbert 空間等价的充分必要条件乃是它們是同維数的。

Hilbert 空間的一个特点，乃是直交分解的性質。

定理 5. 在 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 中，对于任意子集 M，

$$M^\perp = \{x \mid y \in M \Longrightarrow (x, y) = 0, x \in \mathfrak{H}\}$$

是閉綫性子空間，如果 M 本身是閉綫性子空間，那末对于任意 $x \in \mathfrak{H}$，必存在一意决定的 $y \in M$, $z \in M^\perp$ 使

$$x = y + z. \tag{19}$$

(19)叫做 x 的直交分解，而 $M^\perp$ 叫做 M 的直交补。

証 易明对于任意集 M, $M^\perp$ 是閉綫性子空間。令

$$\alpha = \inf_{u \in M} \|x - u\|,$$

那末必存在 $x_n \in M$，使 $\|x - x_n\| \to \alpha (n \to \infty)$，今証$(x_n)$是 $\mathfrak{H}$ 中基本列。事实上对任意 $\varepsilon > 0$, $\exists n_0(\varepsilon)$，使得当 $n, m \geqslant n_0(\varepsilon)$ 时，$\|x_n - x\| < \alpha + \varepsilon$,

① 見 F. Riesz: sur les systemes orthogonaux de fonctions, C. R. Acad. sc, Paris, 144(1907), 615—619, E. Fischer: Sur la Convergence en moyenne, C. R. Ac, Sc, Paris, 144(1907)1022－1024。他們是就 L^2 的情形証明的。

$\|x_m - x\| < \alpha + \varepsilon$。由于在Hilbert 空間中成立着

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2\|x - x_n\|^2 + 2\|x - x_m\|^2 - 4\left\| x - \frac{1}{2}(x_n + x_m)\right\|^2,$$

又因 $\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in M$，可知上式右边第三項 $\leqslant -4\alpha^2$，从而 $n, m \to \infty$ 时，

$$0 \leqslant \|x_n - x_m\|^2 \leqslant 2\alpha^2 + 2\alpha^2 - 4\alpha^2 = 0,$$

即 (x_n) 是基本列，由于 $\mathfrak{H}$ 的完备性，可知 $\exists y \in \mathfrak{H}$，使 $x_n \to y (n \to \infty)$。因 M 是閉的，故 $y \in M$，又由范数的連續性可知

$$\|x - y\| = \lim_{n \to \infty} \|x - x_m\| = \alpha.$$

对于任意 $u \in M$ 及任意实数 λ, $y + \lambda u \in M$，从而

$$\|x - y - \lambda u\|^2 \geqslant \alpha^2 = \|x - y\|^2.$$

按內积表示，上述不等式变成①

$$\lambda^2 \|u\|^2 - 2\lambda\, \Re(x - y, u) \geqslant 0,$$

因 λ 可以任意小，所以必然 $\Re(x - y, u) = 0$。用 iu 代 u，得出 $\Im(x - y, u) = 0$，合并得 $(x - y, u) = 0$，即 $z = x - y \in M^{\perp}$。

最后証明分解的一意性：如果 $x = y + z = y_1 + z_1$, $y_1 \in M$, $z_1 \in M^{\perp}$ 那末 $y - y_1 = z_1 - z \in M \cap M^{\perp}$，但如一元 $u \in M \cap M^{\perp}$，那末 $(u, u) = 0$，从而 $u = \Theta$；証完。

定义 5. 在定理 5 的分解中，y, z 都是由 x 一意决定的，从而 $y = P_M x$ 是一个由 $\mathfrak{H}$ 到 M 中的算子，叫做綫性子空間 M 上的投影算子。

例 1. 在 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 中，固定一元 e，那末 $Px = (x, e)e$ 是在由 e 生成的子空間 $\{\lambda e \mid \lambda \in K\}$ 上的投影算子。事实上，

$$(x - (x, e)e, e) = (x, e) - (x, e) = 0.$$

同理，如果 M 是由有穷多个互相直交的元 $e_1, \cdots, e_n$ 生成的閉綫性子空間 $\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \mid \lambda_i \in K, 1 \leqslant i \leqslant n \right\}$

① $\Re z$ 表示复数 z 的实数部分，$\Im z$ 表示 z 的虚数部分。

那末
$$P_M x = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i,$$

因为对于 $k=1, 2, \cdots n$,

$$\left(x - \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i, e_k\right) = (x, e_k) - (x, e_k) = 0。$$

例 2. 在 $L^2(-\infty, \infty)$中，令

$$Px = y: \quad y(t) = x(t) \quad 如果\ t < \tau,$$
$$\qquad = 0 \quad 如果\ t \geqslant \tau。$$

設
$$M = \{x(t) \mid x \in L^2(-\infty, \infty), x(t) = 0 (t \geqslant \tau)\}.$$

那末M是閉綫性子空間，而P是在M上的投影算子。

定理 6. 为了算子P是由 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 到它的一个閉綫性子空間 M 上的投影算子，必須且只須P是有界綫性算子并且滿足下列兩个条件：

1）$P^2 = P$（冪等性）;

2）$(Px, y) = (x, Py)(x, y \in \mathfrak{H})$（对称性）。

証　1）**必要性**：因 $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2, x_1, y_1 \in M, x_2, y_2 \in M^{\perp}$ $\Longrightarrow x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2), x_1 + y_1 \in M, x_2 + y_2 \in M^{\perp}$。并且 $\alpha x = \alpha x_1 + \alpha x_2$, $\alpha x_1 \in M$, $\alpha x_2 \in M^{\perp}$，可見 P_M 是綫性算子。又因 $\|x\|^2 = \|P_M x\|^2 + \|x - P_M x\|^2$（畢达哥拉等式）可知

$$\|P_M x\| \leqslant \|x\|,$$

即 $\|P_M\| \leqslant 1$。P_M 是有界的，如果 $x \in M$, $x = x + \Theta$ 就是 x 的相应于M的直和分解，从而 $Px = x$，因此 $P^2 y = Py$ 对于任意 $y \in \mathfrak{H}$ 成立。又

$$(Px, y) = (Px, Py + (y - Py)) = (Px Py) = (x - (x - Px), Py) =$$
$$= (x, Py),\ 因为\ Px \in M, y - Py \in M^{\perp}。$$

2）**充分性**：設 $M = \{Px \mid x \in \mathfrak{H}\} = \mathfrak{M}(P)$（$P$ 的值域），P 滿足定理中的一切条件，所以如果 $y \in M$，那末 $\exists x \in \mathfrak{H}$ 使 $y = Px$，从而

$Py=P^2x=P_x=y$。反之，如果 $y=Py$, 那末 $y\in M$。即

$$M=\{y\,|\,y=Py,\ y\in\mathfrak{H}\}.$$

由于 P 是連續綫性算子，不难看出 M 是 $\mathfrak{H}$ 中的閉綫性子空間。对于任意 $x\in\mathfrak{H}$, $Px\in M$, 并且依条件 2)，

$$(x-Px,\ Px)=(P(x-Px),\ x)=(Px-P^2x,\ x)=(Px-Px,\ x)=0,$$

从而 $x=Px+(x-Px)$ 就是相应于閉綫性子空間 M 的直交分解，这就是説 $P=P_M$ 正是相应于 M 的投影算子。

注 投影算子的范数实际上 $=1$，因为上面已証 $\|P\|\leqslant1$，因而 $x\in M\Longrightarrow Px=x$，从而 $\|Px\|=\|x\|$，即 $\|P\|\geqslant1$，最后得 $\|P\|=1$。一般在 Banach 空間中，不一定有这种投影算子。事实上，由于直交观念在 Banach 空間中(沒有內积！)不好定义，从而如上述的那种投影(严格説应叫做直角投影)不能定义。可以定义 Banach 空間 E 上的投影算子是冪等的有界綫性算子。这时 $(I-P)^2=I-2P+P=I-P$，从而 $I-P$ 也是投影算子。$x=Px+(x-Px)$ 表示 x 按閉綫性子空間 $\{x\,|\,x=Px,\ x\in E\}$ 与 $\{x\,|\,Px=0\}$ 的直和(不必直交！)分解，而且这分解显然是一意的，这种投影算子的范数不必是 1。事实上，F. J. Murray [§3 文献(13)]，証明在 (L^p), $(l^p)(p>1)$ 中存在閉綫性子空間，使对于它不存在有界的投影算子，Hitosi Komatuzaki 进而証明对于空間 (C), (c), (M), (m), (c_0), $(C^{(p)})$ 等，也有閉綫性子空間，其上不存在有界投影算子(后附文献[26])。角谷靜夫于 1939 年 [§3 文献[5]] 証明：在 Banach 空間 E 中，为了对每个閉綫性子空間必存在在它上面的投影算子 P，使 $\|P\|=1$，必須且只須 E 是 Hilbert 空間。

平穩随机过程的綫性外推問題 設有一平穩随机过程 $x(t)$，但这里設 t 整数值，从而 $x(t)$ 叫做随机序列。在实用上常需要在已知变量 x 在过去的时刻 $t-1, t-2, \cdots, t-n$ 的观察值时預言这变量在未来时刻 $t+m$ 的值。$x(t)$ 在时刻 $t-k$ 的观察值。是值函数 $x(\omega, t-k)$ 在某一点 $\omega_0\in\Omega$((Ω, B, P) 是所考虑的概率場)的值。于是問題变成已知 $x(\omega_0, t-k)$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ 而預測 $x(\omega_0, t+m)$ 的值。这样問題叫做平穩随机序列的外推問題。

設 $x(\omega_0, t+m)$ 的預測值表示成 $\tilde{x}(\omega_0, t+m)$。由于它是根据諸值 $x(\omega_0, t-k)$ $(1\leqslant k\leqslant$

$\leqslant n$) 預測的，所以 $\tilde{x}(\omega_0, t+m)$ 是 $x(\omega_0, t-k)(1\leqslant k\leqslant n)$ 的函数:

$$\tilde{x}(\omega_0, t+m)=g(x(\omega_0, t-1), x(\omega_0, t-2), \cdots x(\omega_0, t-n)).$$

我們要获得最后的預測值，必須使 $\tilde{x}(\omega_0, t+m)$ 与 $x(\omega_0, t+m)$ 的差"最小"，但这里旣然討論的是概率問題，卽有关統計規律的，我們所謂"差最小"不是指

$$|x(\omega_0, t+m)-\tilde{x}(\omega_0, t+m)|$$

的値最小，因为这个値依賴于已作过的个别观测(相应于 $\omega=\omega_0\in\Omega$)。我們要选擇这个差的一个統計特征，例如取"均方差"

$$\sigma^2_{m,n}\equiv\mathfrak{M}|x(\omega_0, t+m)-\tilde{x}(\omega_1, t+m)|^2\equiv$$

$$\equiv\int_\Omega |x(\omega, t+m)-g(x(\omega, t-1), \cdots, x(\omega, t-n)|^2 P(d\omega)$$

为最小，又为簡單起見，我們設上述的 g 是綫性組合，卽設

$$\tilde{x}(\omega, t+m)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x(\omega, t-k).$$

我們仍考察二阶矩量 $\mathfrak{M}(|x(t)|^2)<\infty$ 存在的平穩随机过程。于是变成在 $L^2(\Omega, \beta, P)$ 中解决使

$$\left\|x(t+m)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x(t-k)\right\|$$

为最小的問題，也就是說 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}\equiv L^2(\Omega, P)$ 选擇由 $x(t-1), x(t-2)\cdots x(t-n)$ 張成的有穷維綫性子空間中的一元，使这元与 $x(t+m)$ 之間的距离最小。利用相关函数

$$\mathfrak{M}(x(t)x(s))\equiv B(t-s)=(x(t), x(s)),$$

这問題很容易解决，事实上，把 $\sigma^2_{m,n}$ 的表达式按内积展开，得

$$\sigma^2_{m,n}=\|x(t+m)\|^2-2\,\mathfrak{R}\sum_{k=1}^{n}\tilde{\alpha}_k(x(t+m)x(t-k))+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{\alpha}_k\alpha_j(x(t-k), x(t-j))=$$

$$=B(0)-2\,\mathfrak{R}\sum_{k=1}^{n}\tilde{\alpha}_k B(k+m)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{\alpha}_k\alpha_j B(k-j).$$

由定理 5 的証明可知 $x(t+m)$ 在由 $x(t-k)$ $(k=1, \cdots n)$ 張成的綫性子空間上的投影，而 $\sigma^2_{m,n}$ 正是由 $x(t+m)$ 到这子空間的"垂直綫"的長度平方。由設 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 的滿足这一要求的值表成$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$，那末

$$x(t+m)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x(t-k)x(t-j)=0, \ (1\leqslant j\leqslant n),$$

从而得出 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的 n 个一次代数方程組，由此便可定出 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 来。由上式可知

$$(x(t+m),x(t-j))=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(x(t-k),x(t-j)),$$

从而

$$\sum_{j=1}^{n}\bar{\lambda}_j(x(t+m),x(t-j))=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\bar{\lambda}_j\lambda_k(x(t-k),x(t-j))=$$

$$=\left\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x(t-k)\right\|^2=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\bar{\lambda}_j\lambda_k B(j-k).$$

是实数，于是代入前面 $\sigma^2_{m,n}$ 的表达式，得

$$\sigma^2_{m,n}=B(0)-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\bar{\lambda}_j\lambda_k B(j-k),$$

这就是外推的誤差①。

証明偏微分方程边界值問題解存在的直角投影法　解偏微分方程边界值問題的直交投影法，最早是由 H. Weye(1940)提出的，这里只說明这一方法的精神，細节則請看本节后附的有关文献。

考察椭圓形微分方程，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=q(x,y)u(x,y),\quad q(x,y)>0, \tag{20}$$

这方程在(x,y)平面上一个区域D中考虑，設区域D是有界的，它的边界由m个閉解析曲綫 L_ν 組成 $(1\leqslant\nu\leqslant m)$令 $L=\bigcup_{\nu=1}^{m}L_\nu$。設 $q(x,y)$ 在 $D\cup C$ 是連續可微分的正值函数。考察一切二阶連續可微分的，定义在 $D\cup C$ 上的函数 $v(x,y)$的全体 $\mathfrak{H}$ 其中定义了内积

$$(u,w)=\iint_D\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+quw\right]l\times dy \tag{21}$$

$(v,w\in\mathfrak{H})$，对于 $v\in\mathfrak{H}$ 显然 $\|u\|^2=(u,u)<\infty$不难驗明(v,w)滿足内积的一切条件，从而 $\mathfrak{H}$ 按这个内积形成一个内积空間。

对于 $v,w\in\mathfrak{H}$ 有Grenn 等式成立：

$$(v,w)=-\int_L v\frac{\partial w}{\partial \nu}ds-\iint_D v[\Delta w-qw]dxdy, \tag{22}$$

这里 $\frac{\partial}{\partial \nu}$ 表示沿C上向内的法綫方向的微分，s 为边界 L 上的長度。令 H_1 表示 $\mathfrak{H}$ 中的

① 詳見 А. М. Яглом: 平稳随机函数导論以及 А. Н. Колмогоров: Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей, ИАН СССР, сер. матем. 5(1941), 3—14.

边界L上等于0的一切函数全体，而H_2表示$\mathfrak{H}$中一切满足微分方程(20)的函数全体，不难看出H_1与H_2都是$\mathfrak{H}$的綫性子空間，由(22)不难看出，

$$v\in H_1,\ \ w\in H_2\Longrightarrow(v,w)=0,\text{即 } v\perp w$$

由偏微分方程知道存在$u\in H_2$，使$w-u\equiv v\in H_1$，这里w是$\mathfrak{H}$中任意元，这正是意味着D上微分方程(20)有一解，使这解在D的边界L上取給定的值，[即w在L上的值]，这說明$\mathfrak{H}=H_1+H_2$乃是H_1，H_2的直交和，反之，从任意給定的$w\in\mathfrak{H}$出發：用直交投影可以証明存在一元$u\in H_2$使u在边界L上与w，同样的值，这就是直交投影法的中心思想。在实用上給定函数$w\in\mathfrak{H}$我們首先把它投到H_2之上，即对給定的$w\in\mathfrak{H}$首先求出w在H_2上的投影u，即使$w-u\perp H_2$，然后証明$u=w-u$确定在L上等于0，这时因尚未知方程(20)有在边界L上取定值的解存在(这是要証的)，从而$u\in H_1$这一事实也是要証的，詳見[25]，[4]，[39]，[40]。

定理 7 (Hilbert 空間的自共軛性) 設$\mathfrak{H}$是 Hilbert 空間，而为$f\in\mathfrak{H}$($\mathfrak{H}$的共軛空間)存在$y\in\mathfrak{H}$使对于每个$x\in\mathfrak{H}$

$$f(x)=(x,y). \tag{23}$$

这时$\|f\|=\|y\|$。y由f一意决定。

証 对于固定的$y\in\mathfrak{H}$，(23)确是$\mathfrak{H}$上的有界綫性泛函数，并且依 Schwarz—буняковский 不等式

$$|f(x)|\leqslant\|x\|\|y\|,$$

即$\|f\|\leqslant\|y\|$，反之$f(y)=\|y\|^2$从而$\|f\|\geqslant\|y\|$即$\|f\|=\|y\|$。現在設$f\in\mathfrak{H}^*$求証$\exists y\in\mathfrak{H}$满足(23)。設

$$M=\{x\,|\,x\in\mathfrak{H},f(x)=0\},$$

那末M是$\mathfrak{H}$中的閉綫性子空間，如果$M=\mathfrak{H}$，那末$f\equiv0$，从而$y=\Theta$，即满足(23)。如果$M\subsetneqq\mathfrak{H}$，$M^{\perp}\neq\{\Theta\}$，从而$\exists y_0\in M^{\perp}$，$y_0\neq\Theta$；$\|y_0\|=1$。

令
$$y=\overline{f(y_0)}y_0,$$

那末当对于任意$x\in\mathfrak{H}$，令

$$x_0=x-\frac{f(x)}{f(y_0)}y_0,$$

这里$f(y_0)\neq0$，故$y_0\notin M$。那末

$$f(x_0)=0\ \text{即}\ x_0\in M,$$

从而 $$(x, y)=(x, y_0)f(y_0)=f(x)(y_0, y_0)=f(x).$$

因$(x, y)=(x, z)$凡 $x\Longrightarrow y=z$，一意性明。証完。

注 定理 7 說明每个 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 与它的共軛空間等

$$y\longleftrightarrow f_y:\ f_y(x)=(x, y),$$

但在这对应下

$$y_1+y_2\longleftrightarrow f_{y_1+y_2}:\ f_{(y_1+y_2)}(x)=(x, y_1+y_2)=$$
$$=(x, y_1)+(x, y_2),$$
$$\alpha y\longleftrightarrow f_{\alpha y}=\bar{\alpha}f_y,$$
$$f_{\alpha y}(x)=(x, \alpha y)=\bar{\alpha}(x, y)=\bar{\alpha}f_y(x).$$

我們說 Hilbert 空間是自共軛的。問題于是發生，卽是自共軛空間一定是 Hilbert 空間？答案一般是否定[28]。令

$$E=(l_n^p)\oplus(l_n^q),\quad p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \tag{24}$$

这里所謂E是l_n^p, l_n^q的直和，表成(24)是指E是由元偶$\{x, y\}$($x\in(l_n^p)$, $y\in(l_n^q)$)組成加法与数乘法，按x, y分别作，卽

$$\|\{x, y\}\|=(\|x\|_p^2+\|y\|_q^2)^{\frac{1}{2}},$$

不难看出E是 Banach 空間，并且

$$E^*=(l_n^p)^*\oplus(l_n^q)^*=(l_n^q)\oplus(l_n^p).$$

令 $T\{x, y\}=\{y, x\}$，那末T是由E到E^*上的一对綫性算子，并且$\|T\|=$ $=\|\overset{-1}{T}\|=1$。从而E与E^*相等，卽E是自共軛空間。不难証明对于E中綫等式不成立，从而E不是 Hilbert 空間。但 E. R. Lorch 于 1945 [28]証明：設E是 Banach 空間，而T是由E到E^*上的一对一保范綫性算子，并且是拓扑的同胚，滿足下列条件：如果$Tx=f_x\in E^*$ $(x\in E)$，那末$f_x(x)=\|f\|\|x\|$。这时可証$\|f_x\|=\|x\|$而且如定义$(x, y)=f_y(x)$，(x, y)成为E上的內积，使$(x, x)=\|x\|^2$，从而使E成为 Hilbert 空間。

这里附帶提一下，具不定尺度的空間是有趣的，A. P. Michal 等于 1937 就曾考慮把內积与范数分开的情形[32]，更确切的說，他們設 Ba

nach 空間 E 上定义一个內积，滿足本节定义 1 中的条件 1) 2) 3)并且

$$|(xy)|\leqslant M\|x\|\|y\|.$$

空間叫做定的，指$(x, x)\ngtr 0 \Longrightarrow x=\Theta$ 而否則空間叫做不定的，有穷維的具不定尺度的空間中綫性算子理論早在 Frobenins 时代就曾考虑过，在 A. И. Мальцев [30] 書中曾考察过更一般的即所謂具双綫性尺度的空間，那里內积只滿足定义 1 中的 1) 2)，無穷維的具不定尺度，空間的是較近的。1944, Л. Спонтрягин[35] 在这种空間方面作基工作。他考察了 Banach 空間 l^2, 但不用 Hilbert 空間 l^2 的內积，而定义不定內积，

$$(x, y)=-\sum_{i=1}^{k}\xi_i\bar{\eta}_i+\sum_{i=k+1}^{\infty}\xi_i\bar{\eta}_i,\ x=(\xi_i),\ y=(\eta_i)\in l^2,$$

Понтрягин 指出这种空間中算子的研究是由 С. Л. Соболв 关于某些力学問題的研究引起的，他們一般 Hilbert 空間的理論 [見本講义第四章] 研究了这种空間的一些算子（所謂对称及自体算子）其次 М. Г. Крейн, И. С. Иохвидов 等人在这方面作了系統的研究，并且不限于上述 l^2 的特殊情形也对各种具不定尺度的空間作了合理化的处理 [38]，这种空間中的算子的研究也在积分方程等方面有应用。

本节只叙述了有关 Hilbert 空間的若干初等事实，关于这种区間的算子理論，將在第四章詳述。

習題四

1. 令 S_1 表示

$$S_1=\{x(t)\,|\,x\in L[0,2\pi],\ x(t)=x(t+2\pi),\ x(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n^2+b_n^2)<+\infty\}.$$

令

$$\|x\|_{S_1}=\pi^{\frac{1}{2}}\Big[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n^2+b_n^2)\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

求証 S_1 是 Hilbert 空間，而且

$$x \longrightarrow \tilde{x} \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}}(a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

是由 S_1 到 $L^2(0, 2\pi)$ 中的保范綫性算子(A. A. Конюшков 1957)。

2. 設 T 是 Hilbert 空間中的有界綫性算子，并且 $\|T\| \leqslant 1$，那末

$$\{x \mid Tx = x\} = \{x \mid T^* x = x\}. \quad \text{(B. Sz.-Nagy)}.$$

3. 在 $L^2[-1, 1]$ 中，把

$$x_n(t) = t^{n-1}$$

按 E. Schmidt 直交規格化，求証所得的諸元是

$$z_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \cdot \left\{ t^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} t^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} t^{n-4} + \cdots \right\}.$$

4. 在 $L^2_{e^{-t^2}}(-\infty, +\infty) \equiv \{x \mid \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} |x(t)|^2 dt < +\infty, x(t) \text{ 可測}\}$ 中把元列 $x_n(t) \equiv t^{n-1} (n = 1, 2, \cdots)$ 按 E. schmidt 直交化，求証所得的直交規格化組中的元是

$$z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n!} \sqrt[4]{2\pi}} (-1)^n e^{t^2/2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2/2}).$$

5. 設 $F(x, y)$ 是 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上的双綫性泛函数，即指 $F(x, y)$ 是 $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ 上的复値函数，滿足

$$F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 F(x_1, y) + \alpha_2 F(x_2, y),$$

$$F(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \bar{\beta}_1 F(x, y_1) + \bar{\beta}_2 F(x, y_2),$$

$$\sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ \|y\| \leqslant 1}} |F(x, y)| < +\infty.$$

求証存在 $\mathfrak{H}$ 中的有界綫性算子 A（卽定义在全 $\mathfrak{H}$ 上并在 $\mathfrak{H}$ 中取値），使

$$(Ax, y) = F(x, y).$$

A 由 F 一意决定，并且 $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| = \|y\| = 1} |F(x, y)|$。

6. 在 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 中，求証对于任意元 $x, y_1, \cdots, y_n$,

$$\min_{\substack{\alpha_k \in K \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k \right\|^2 = \frac{G(x, y_1, y_2, \cdots y_n)}{G(y_1, y_2, \cdots, y_n)},$$

这里 K 表示复数域，而对于任意有穷多个元 $y_1, \cdots, y_n$,

$$G(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} (y_1, y_1), (y_2, y_1), \cdots, (y_n, y_1) \\ (y_1, y_2), (y_2, y_2), \cdots, (y_n, y_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (y_1, y_n), (y_2, y_n), \cdots, (y_n, y_n) \end{vmatrix}.$$

求証对于任意 $m<n$，

$$\frac{G(y_k, y_{k+1}, \cdots, y_n)}{G(y_{k+1}, \cdots, y_n)} \leqslant \frac{G(y_k, y_{k+1}, \cdots, y_m)}{G(y_{k+1}, \cdots, y_m)} (0 \leqslant k \leqslant m-1),$$

$$\frac{G(y_m, y_{m+1}, \cdots, y_n)}{G(y_{m+1}, \cdots, y_n)} \leqslant G(y_m),$$

$$G(g_0, g_1, \cdots, g_n) \leqslant G(g_0, g_1, \cdots, g_m) G(g_{m+1}, g_{m+2}, \cdots, g_n),$$

$$G(g_0, g_1, \cdots g_n) \leqslant (g_0, g_0)(g_1, g_1) \cdots (g_n, g_n).$$

特别由此导出 Hadamard 不等式（把上述結果应用到 n 維欧几里得空間）：如果 A 表示行列式

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix},$$

那末，当 $|a_{ik}| \leqslant M$ $(i,\ k=1, \cdots, n)$ 时，

$$|A| \leqslant n^{\frac{n}{2}} M^n.$$

7．求証当在 Hilbert 空間中把綫性無关元列 $y_1,\ y_2, \cdots, y_n, \cdots$，按 Schmidt 直交化时，所得的元列 (e_n) 可以表示成

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{G_k G_{k-1}}} \begin{vmatrix} (y_1, y_1), & (y_2, y_1), & \cdots, (y_k, y_1) \\ (y_1, y_2), & (y_2, y_2), & \cdots, (y_k, y_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (y_1, y_{k-1}), & (y_2, y_{k-1}), & \cdots, (y_k, y_{k-1}) \\ y_1 & y_2 & \cdots \quad y_k \end{vmatrix},$$

这里等式右边的式按平常行列式的方法展开（即 $y_1, \cdots, y_k$ 的綫性組合），并且

$$G_0 = 1,\quad G_k = G(y_1, y_2, \cdots, y_k).$$

参　考　文　献

关于 Hilbert 空間的專書已有很多，例如：

［1］　彌原松三郎：形列分列式（譯自日文）。

［2］　彌原松三郎：無限多無数，函数論（岩波講座数学）1934。

［3］　吉田耕作：スヘクトル解析，1948。

［4］　吉田耕作：レルベルト空間論 1953。

［5］　Ахиезер, Н. И. и И. М. Глазман: теория линейных операторов в гильбертовом пространстве 1950.

［6］　Julia, G.: Introduction mathématique aux théories quantiques, 2e

Partie, 1938.

[7] Neumann, J. von, Grundlagen der Quantenmechanik, 1935.

[8] F. Riesz et B. Sz. Nagy: Leçons d'analyse fonctionnelle.

[9] Stone, M. H.: Linear transformations in Hilbert Space, 1932.

[10] Sz. Nagy, Bela: Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, 1942.

[11] Wintner, A.: Spektral theorie der unendlichen Matrezen, 1929 与本节有关的其他文献尚有:

[12] Aronszajn, W: Caractéreisation métrique de l'espace de Hilbert, etc. C. R. Paris 201 (1935), 811—813, 873—875.

[13] Blumenthal, L. M: An extension of a theorem of Jordon and von Neumann, Pac: J. math, 5 (1955), 161—167.

[14] Bohnenblust, F.: A characterization of complex Hilbert spaces, Port. math, 8, 103—109.

[15] Dag, M. M: Some characterizations of runer product spaces, Trans. Amer. math. Soc. 62 (1947), 320—337.

[16] Ellis, D.: A modification of the parallelogram law characterization of Hilbert spaces, math. Zeitschr. 59 (1953), 94—96.

[17] Ficken, F. A.: Note on the existence of scalar products in normed linear spaces, Ann. math. 45 (1944), 362—366.

[18] Fréchet, M.: Sur la défuntion axiematique d'une classe d'espaces Nechruls destancés applicables vectoriellement sur l'espace de Hilbert, Ann. math. 36 (1935), 705—718.

[19] James, R. C.: Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces, Trans. Amer. math. Soc 61 (1947) 285—292.

[20] Jondan, P. V. und Neumann, J. V.: On inner product in linear metric spaces, Ann. math. 36 (1935), 719—723.

[21] Kakufani, S.: Some characterizations of Euclidean space, Jap. J. math, 16 (1939) 93—97.

[22] Kakufani, S. and Mackey, G. W.: Two Characterizations of real Hilbert space, Ann. math. 45 (1944), 50—58.

[23] Kakufani, S. and Mackey, G. W.: Ring and lattice characteriza-

tions of complex Hilbert spaces, Bull. Amer. math. Soc. 52 (1946) 727—733.

[24] Kasahara, Shouro: A characterizations of Hilbert spaces, proc. Jap. Acad. 30 (1954), 846—848.

[25] Kodaira, K. über die Rand-und Eigenwertprobleme der linearen elliptischen Differentialgleichunger Zweiter Ordung, proc. Imp. Acad. Tokyo 20 (1944), 262—268.

[26] Komatuzaki, H.: Sur. les projections dans certains espaces du type (B), Proc. Imp. Acad. Tokyo 16 (1940), 274—279.

[27] Левитан, Б. М.: 概周期函数。

[28] Lorch, E. R.: The Cauchy-Schwarz inequality and selfadjoint spaces, Ann. math. 46 (1945), 468—473.

[29] Lorch, E. R.: On certain implications which characterize Hilbet spaces, Ann. math. 49 (1948), 523—532.

[30] Мальцев, А. И.: Основы линейной алгебры, изд. 2ое 1956 (第一版有汉譯本:"綫代数基础")。

[31] Mazur, S.: Quelquer proprietés caracteristiques des espaces euclicliens, C. R. paris, 207 (1938), 761—764.

[32] Michal, A. D., Hizhberg, I. E., and Taylor, A. E.: Abstract euclidean spacer with independently postulated, analyticaland and geometical incties. Ann. scuola norm sup. pisa (2) 6, 117—148.

[33] 南云道夫 (Nagunio): Charakterisierung der allgemanen euplielischen Raüme, Jap. J. math. 12 (1936), 123—128.

[34] Phillipo, R. S.: A characterization of Euclidean spaces, Bull. Amer. math. Soc. 46 (1940), 930—933.

[35] Понтрягин, Л. С.: Эрмитовы операторы в пространстве синдефинитной метрикой, изв. АН СССР, сер, матем, 8 (1944), 243—280.

[36] Вишик, М. И.: Метод, ортогональных и прямых разложений в теория эллиптических Дифференциальних уравнений, Матем, сб.25 (67) (1949) 189—234.

[37] Weyl, H.: The method of athogonal projection in potential theory, Duke math. J. 7 (1940), 411—444.

[38] Иохвидов, И. С. и Крейн, М. Г.: Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной Метрикой, I Труды Московского Матем. об-ка Том 5 (1956), 367—432.

[39] C. Miranda: Equazioni alle derivate parziali di Tipo ellittico, 1955 特刊 § 30.

[40] S. Bergman and M. Schiffer: Kernel functune and elliptic differential equations in mathematical physics, 1953, 特刊 part B., chap. IV.

§5. Banach 定理,閉圖象定理,共鳴定理及其应用

Fréchet 空間理論中一組基本重要定理乃是环繞着所謂 Banach 定理的。这个定理說明在一定条件下由綫性算子的連續性可以推得它的逆算子的連續性,从而对于在各种問題中証明某些綫性依賴关系的連續性时或証明某些綫性算子的有界性是非常便利的。

对 Banach 空間的情形,Banach 定理首先由 Banach[1] 在 1929 証明的,証明与这里的不同。对 Fréchet 空間,在假定所謂綫性算子是一对一的条件下,証明見于 Banach 的經典性書中[第三章 § 3]。J. Szauder [28] 去掉了一对一条件并就 Banach 空間情形給出簡單的証明。这里的一般叙述是依据吉田耕作[30]的。

定义 1 設 E, E_1 都是 Fréchet 空間。設 $E\times E_1$ 表示它們的积空間,即元偶 $\{x, y\}$ $(x\in E,\ y\in E_1)$ 全体按运算

$$\{x_1, y_1\}+\{x_2, y_2\}=\{x_1+x_2, y_1+y_2\},\ \alpha\{x, y\}=\{\alpha x, \alpha y\}$$

所組成的綫性空間,附以准范数

$$\|\{x, y\}\|=\|x\|+\|y\|.$$

不难看出 $E\times E_1$ 仍是 Fréchet 空間。如果 E, E_1 是 Hilbert 空間,$E\times \times E_1$ 也是 Hilbert 空間,它的內积是 $(\{x, y\}, \{x_1, y_1\})=(x, x_1)+(y, y_1)$。定义域 $\mathfrak{D}(T)\subset E$ 而値域 $\mathfrak{M}(T)\subset E_1$ 的綫性算子 T 的圖象,是指 $E\times E_1$ 中的集

$$\mathfrak{G}T \equiv \{\{x, y\} | x \in \mathfrak{D}(T), y = Tx\}.$$

T 叫做閉綫性算子，是指 $\mathfrak{G}T$ 是 $E \times E_1$ 中的閉集。

注　不难看出，为了綫性算子 T 是閉的，必須且只須 T 滿足下列条件：設 $x_n \in \mathfrak{D}(T)$, $x_n \longrightarrow x(E)$, $Tx_n \longrightarrow y(E_1)$, 那末 $x \in \mathfrak{D}(T)$ 且 $Tx = y$。如果閉綫性算子 T 有逆算子，即 T 是一对一的，从而 $\overset{-1}{T}$ 是由 $\mathfrak{M}(T)$ 到 $\mathfrak{D}(T)$ 中的綫性算子，那末 $\overset{-1}{T}$ 也是閉的。

例　連續綫性算子显然是閉的。

更多更具体的例將在下面看到。

定理 1　积空間 $E \times E_1$ 中綫性子集 G 是一个由 E 的某子集到 E_1 中綫性算子 T 的圖象的充分必要条件，乃是 $\{\Theta, y\} \in G \Longrightarrow y = \Theta_1$.

証　必要性是显然的。反之，設定理中条件滿足，那末令 $y = Tx$ 表示 $\{x, y\} \in G$, 因 $\{x, y\} \in G$ 且 $\{x, y'\} \in G \Longrightarrow \{\Theta, y - y'\} = \{x - x, y - y'\} = \{x, y\} - \{x, y'\} \in G$, 从而依假定 $y = y'$, 即 T 是在 $\mathfrak{D}(T) \equiv \{x | \exists y \in E_1, \{x, y\} \in G\}$ 上一意定义的算子。由 G 的綫性可推知 T 的綫性。証完。

注　設 $E = E_1 = \mathfrak{H}$ 是 Hilbert 空間，令

$$\mathsf{V}\{x, y\} = \{-y, x\},$$

那末 V 是 $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ 中的綫性算子，設 T 是以 $\mathfrak{D}(T) \subset \mathfrak{H}$ 为定义域并在 $\mathfrak{H}$ 中取值的綫性算子。为了 $(\mathsf{V}\mathfrak{G}(T))^{\perp}$ 是 $\mathfrak{H}$ 中綫性算子的圖象（即定义域与值域都 $\subset \mathfrak{H}$），必須且只須 $\mathfrak{D}(T)$ 在 $\mathfrak{H}$ 中稠，事实上，$\{\Theta, y\} \in (\mathsf{V}\mathfrak{G}(T))^{\perp} \Longleftrightarrow (\{\Theta, y\}, \{-Tx, x\}) = 0$ 对每个 $x \in \mathfrak{D}(T)$ 成立 $\Longleftrightarrow y \in \mathfrak{D}(T)^{\perp}$，所以依定理 1，得証。

定义 2　設 T 是以 $\mathfrak{D}(T)$ 为定义域并在 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 中取值的綫性算子。設 T 是稠定的，即 $\mathfrak{D}(T)$ 在 $\mathfrak{H}$ 中稠。依上注以 $(\mathsf{V}\mathfrak{G}(T))^{\perp}$ 为圖象的綫性算子 T^* 叫做 T 的伴算子。

注　依定义，$(\mathsf{V}\mathfrak{G}(T))^{\perp} = \{\{x, T^*x\} | x \in \mathfrak{D}(T^*)\}$, 即对于任意 $y \in \mathfrak{D}(T)$,

$$(\{-Ty, y\}, \{x, T^*x\})=0,$$

或
$$(Ty, x)=(y, T^*x), \quad (y\in\mathfrak{D}(T), x\in\mathfrak{D}(T^*)). \tag{1}$$
特别如 $\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{H}$, 并注意 $\mathfrak{H}$ 的自共軛性，可以看出这里定义的伴算子与在 §3 中就一般 Banach 空間所定义的乃是一致的。这里的定义只适用于 Hilbert 空間，但不設 $\mathfrak{D}(T)$ 等于全空間。注意，依定义 2, 并且因对于任意子集 M, $M^{\perp}$ 是閉綫性子空間，可知 T^* 一定是閉綫性算子。

例 設 T 是 $\mathfrak{H}=L^2(-\infty, \infty)$ 中的綫性算子，由下式規定:
$$Tx=y: \ y(t)=tx(t), \ -\infty<t<\infty.$$
設 $\mathfrak{D}(T)$ 是 T 的定义域，那末 $\mathfrak{D}(T)$ 包含 $L^2(-\infty, \infty)$ 中一切在某有穷区間外等于零的函数全体，而因对于 $x\in L^2(-\infty, \infty)$，常可取正数 l 足够大，使
$$\int_{-\infty}^{-l}|x(t)|^2dt+\int_{l}^{\infty}|x(t)|^2dt<\varepsilon,$$
可知 $\mathfrak{D}(T)$ 在 $\mathfrak{H}$ 中稠。設对于 $y\in\mathfrak{D}(T^*)$, $T^*y=y^*$, 那末依(1),
$$\int_{-\infty}^{\infty}tx(t)\overline{y(t)}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\overline{y^*(t)}\,dt. \tag{2}$$
今設 $x(t)$ 是有穷閉区間 $[\alpha, \tau]$ 的特征函数，那末
$$\int_{\alpha}^{\tau}t\overline{y(t)}dt=\int_{\alpha}^{\tau}\overline{y^*(t)}dt.$$
由不定积分的微分定理可知对于 $(-\infty, \infty)$ 中的殆一切 τ,
$$\overline{\tau y(\tau)}=\overline{y^*(\tau)},$$
換句話說，$y\in\mathfrak{D}(T)$ [即 $\mathfrak{D}(T^*)\subset\mathfrak{D}(T)$], 并且
$$(T^*y)(t)=ty(t).$$
現在証明 $\mathfrak{D}(T^*)=\mathfrak{D}(T)$。設 $y\in\mathfrak{D}(T)$，那末 $ty(t)\in L^2(-\infty, \infty)$，并且由 (2) 不难看出 $(T^*y)(t)=ty(t)$, $y\in\mathfrak{D}(T^*)$。这就是說，$T^*=T$。因此，T 是閉綫性算子。

值得注意，$\mathfrak{D}(T)$在$\mathfrak{H}$中稠，但显然$\mathfrak{D}(T)\neq\mathfrak{H}$从而可知閉綫性算子的定义域不必是閉集；

Hilbert 空間中閉綫性算子的性質，將在第四章詳論。

定理 2(Banach) 設T是由 Fréchet 空間E的綫性子空間$\mathfrak{D}(T)$到 Fréchet 空間E_1中的閉綫性算子。設T的值域$\mathfrak{W}(T)$是E_1中的第二綱集，那末$\mathfrak{W}(T)=E_1$，并且存在正数α, β，使对于E_1中每个滿足$\|y\|\leqslant\beta$的元y，必存在$x\in\mathfrak{D}(T)$，使$\|x\|\leqslant\alpha$且$y=Tx$。特別如果T是由$\mathfrak{D}(T)$到$\mathfrak{W}(T)$的一对一綫性算子，那末$\overset{-1}{T}$是定义在E_1上的連續綫性算子。

注 定理 2 說明，在所述条件下，令$\bar{S}(\alpha)$表示E中以Θ为心以α为半徑的閉球$\{x\mid\|x\|\leqslant\alpha, x\in E\}$，$\bar{S}_1(\beta)$表示$E_1$中以$\Theta_1$为心以$\beta$为半徑的閉球$\{y\mid\|y\|\leqslant\beta, y\in E_1\}$，那末$\bar{S}_1(\beta)\subset T(\bar{S}(\alpha))$。滿足这种条件的加法算子叫做开算子。換句話說，定理 2 說：定义在$\mathfrak{D}(T)\subset E$并值域是E_1中的第二綱集的閉綫性算子必是开算子。

証 首先証明：設对于每个$\varepsilon>0$，必可決定一个$\eta(\varepsilon)$，使E中$\bar{S}(\varepsilon)\cap\mathfrak{D}(T)$的$T$象$T(\bar{S}(\varepsilon)\cap\mathfrak{D}(T))$在$E_1$的球$\bar{S}_1(\eta(\varepsilon))$中稠密，那末$\mathfrak{W}(T)=E_1$并且$T(\bar{S}(\varepsilon)\cap\mathfrak{D}(T))\supset\bar{S}_1(\eta(\varepsilon))$。下面乃是証明：

令$\varepsilon_i=\frac{\varepsilon}{2^i}(i=1, 2, \cdots)$，并且設球$\bar{S}(\varepsilon_i)$的$T$象$T(\bar{S}(\varepsilon_i))$在$E_1$的球$\bar{S}_1(\eta(\varepsilon_i))$中稠，并且可設$\eta(\varepsilon_i)>\eta(\varepsilon_{i+1})$，$\lim\limits_{i\to\infty}\eta(\varepsilon_i)=0$，对于任意$y$，如果$\|y\|\leqslant\eta(\varepsilon_1)$，必可決定一元$x_1\in\mathfrak{D}(T)$，使$y_1=Tx_1$并且$\|y-y_1\|\leqslant\eta(\varepsilon_2)$，$\|x_1\|\leqslant\varepsilon_1$。依次，決定$y_1, y_2, \cdots, y_m, \cdots$，及相应的$x_n\in\mathfrak{D}(T)$，使$\|x_n\|\leqslant\varepsilon_n(n=1, 2, \cdots)$，$y_n=Tx_n$，

$$\left\|y-\sum_{m=1}^{n}y_m\right\|\leqslant\eta(\varepsilon_{n+1}),$$

这按归納法就可得出，于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\cdot\varepsilon=\varepsilon,\ \sum_{n=1}^{m}y_n=\sum_{n=1}^{m}Tx_n=T\left(\sum_{n=1}^{m}x_n\right)\longrightarrow y.$$

于是令 $s_n=\sum_{m=1}^{n}x_m$，則因$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$收斂，可知 s_n 是备空間E中的基本列，从而收斂于 E 中一元 x，而由于T的閉性，必然 $x\in\mathfrak{D}(T)$，使 $Tx=y$，这正是說 $T(\bar{S}(\varepsilon)\cap\mathfrak{D}(T))\supset S_1(\eta(\varepsilon_1))$。既然$T$是綫性的，可知$\mathfrak{M}(T)=E_1$，如果$T$是由$\mathfrak{D}(T)$到 $\mathfrak{M}(T)$上一对一的算子，那末上述結果意味着

$$\overset{-1}{T}\bar{S}_1(\eta(\varepsilon))\subset\bar{S}(\varepsilon)\cap\mathfrak{D}(T)\subset\bar{S}(\varepsilon),$$

即对于任意 $\varepsilon>0$，必可决定一$\eta(\varepsilon)$，使 Θ_1 的鄰域 $\bar{S}_1(\eta(\varepsilon))$ 被$\overset{-1}{T}$映入 Θ 的鄰域 $\bar{S}(\varepsilon)$中，这正說明了$\overset{-1}{T}$的連續性。那末定理就証完了。

于是我們只需証明上述假設成立，即对于任意的 $\varepsilon>0$，必可决定一$\eta(\varepsilon)$，使 $T(\bar{S}(\varepsilon)\cap\mathfrak{D}(T))$在 $\bar{S}_1(\eta(\varepsilon))$ 中稠密。事实上，$\mathfrak{W}(T)$可以表示为

$$\mathfrak{W}(T)=\bigcup_{n=1}^{\infty}H_n.$$

这里 $H_n=T(K_n\cap\mathfrak{D}(T))$，$K_n=\left\{x\,|\,x\in E,\ x=nx',\ \|x'\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}$。依設，$\mathfrak{W}(T)$是 E_1 中的第二綱集，所以諸 H_n 不可能都是疏集，从而至少有一个，例如是 H_{n_0}，使 $\bar{H}_{n_0}$ 含 E_1中一个球

$$C_1\equiv\{y\,|\,y\in E_1,\ \|y-n_0y_1\|\leqslant n_0\eta(\varepsilon)\}.$$

由此可得 $\bar{H}_1$ 必含球

$$C_2\equiv\{y\,|\,y\in E_1,\ \|y-y_1\|\leqslant\eta(\varepsilon)\}.$$

事实上，依准范数的性質，

$$\frac{1}{n}\|z\|\leqslant\left\|\frac{z}{n}\right\|\quad(n=1,2,\cdots,).$$

从而如果 $y \in C_2$, 那末 $n_0 y \in C_1$, 即

$$n_0 C_2 \subset C_1 \subset \bar{H}_{n_0} = n_0 \bar{H}_1,$$

因为 $H_{n_0} = T(K_{n_0} \cap \mathfrak{D}(T)) = T[(n_0 K_1) \cap \mathfrak{D}(T)] = n_0 T(K_1 \cap \mathfrak{D}(T)) = n_0 H_1$, 因此 $C_2 \subset \bar{H}_1$, 即已証明了 $H_1 = T\left(\bar{S}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \mathfrak{D}(T)\right)$ 在 $C_2 = \bar{S}_1(y_1, \eta(\varepsilon))$ 中稠密。現在不难証明 $T(\bar{S}(\varepsilon) \cap \mathfrak{D}(T))$在 $\bar{S}_1(\eta(\varepsilon))$ 中稠密。事实上,对任意 $z \in C_2$, 对任意 $\delta > 0$, $\exists z' \in H_1$, 使 $\|z - z'\| \leqslant \frac{\delta}{2}$, 且 $z' = Tx'$, $x' \in K_1 \cap \mathfrak{D}(T)$; 并 $\exists z'' \in H_1$, 使 $\|y_1 - z''\| \leqslant \frac{\delta}{2}$, 且 $z'' = Tx''$, $x'' \in K_1 \cap \mathfrak{D}(T)$, 而 $\|x' - x''\| \leqslant \varepsilon$。令

$$y = z - y_1, \ x = x' - x'',$$

那末

$$\|y - Tx\| = \|z - y_1 - Tx' + Tx''\| \leqslant \|y_1 - z''\| + \|z - z'\| \leqslant \delta.$$

当 z 遍經 C_2 中一切点时, y 遍經 $\bar{S}_1(\eta(\varepsilon))$ 中各点。这就表示 $\bar{S}_1(\eta(\varepsilon))$ 中每点 y 的任意 δ-鄰域中必含 $T(\bar{S}(\varepsilon) \cap \mathfrak{D}(T))$ 中的一点 Tx, 亦即 $T(\bar{S}(\varepsilon) \cap \mathfrak{D}(T))$在 $\bar{S}_1(\eta(\varepsilon))$中稠密。証完。

定理 3(閉圖象定理) 設 T 是由 Fréchet 空間 E 的第二綱綫性子空間 M 到 Fréchet 空間 E_1 中的綫性算子。为了 T 是連續的,必須且只須 T 是閉的。

証 必要性是容易看出的,只須在 M 的閉包 $\bar{M}$ 上,定义 $Tx = \lim_{n\to\infty} Tx_n$, $x_n \in M$, 今只須証明充分性。設 T 是由 M 到 E_1 中的閉綫性算子。在綫性空間 M 上定义一个新准范数

$$\|x\|_M = \|x\| + \|Tx\|.$$

不难驗明, $\|x_n\|_M$ 确是准范数, 例如設 $\|x_n\|_M \to 0$, $\alpha \in K$, 那末 $\|x_n\| \to 0$, $\|Tx_n\| \to 0$, 从而依 E, E_1 中准范数的性質 $\|\alpha x_n\| \to 0$, $\|T\alpha x_n\| = \|\alpha T x_n\| \to 0$, 于是得 $\|\alpha x_n\|_M \to 0$。其他性質更容易驗証。今証 M 按新范数 $\|x\|_M$ 是完备的。事实上,如果 $\|x_n - x_m\|_M \to 0 (n, m \to \infty)$, 那末

$$\|x_n - x_m\| \to 0, \ \|Tx_n - Tx_m\| \to 0,$$

而由于 E 与 E_1 的完备性，$\exists x\in E, y\in E_1$，使

$$\|x_n-x\|\to 0,\ \|Tx_n-y\|\to 0.$$

于是由于 T 是閉算子，$x\in M, Tx=y$，从而

$$\|x_n-x\|_M=\|x_n-x\|+\|Tx_n-y\|\to 0,$$

卽 M 按 $\|x\|_M$ 完备。注意 M 中的元都是 E 中的元。如果 I 表示由 M 到 E 中的綫性算子 $Ix=x(x\in M)$，則 I 是一对一的并且 $\|x_n-x\|_M\to 0\Longrightarrow \|x_n-x\|\longrightarrow 0$，卽 I 是連續的。既然 I 的值域（卽作为 E 中子集的 M）是第二綱的，应用 Banach 定理卽得 $\overset{-1}{I}$ 是連續的，換句話說，$\|x_n-x\|\to 0\Longrightarrow\|x_n-x\|_M\to 0$，从而 $\|Tx_n-Tx\|\to 0$；这就証明了 T 的連續性。

注　由定理 2 可知实际上 $M=E$。

定理 4（共鳴定理）　設 $T_L(L\in I)$ 是一族各由 Banach 空間 E 到 Banach 空間 $E_L(L\in I)$ 中的有界綫性算子，設在 E 中有一第二綱（綫性）子集 M，使对于每个 $x\in M$，

$$\sup_{L\in I}\|T_Lx\|<+\infty. \tag{3}$$

那末

$$\{\|T_L\|\,|\,L\in I\}$$

是囿的实数集。

注　这里 I 是任意势的标号集，特别如 $I\equiv N=\{1,2,3,\cdots,\}$ 是可数的，那末条件(3)可以換成較弱的

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|T_nx\|<+\infty.$$

証明与下面將叙述的沒有多大区别，只須在諸 E_n 的积空間 $\prod_n E_n$ 中引入范数

$$\|\{y_n\}\|=\overline{\lim_{n\to\infty}}\|y_n\|.$$

代替按下面証明中的范数

$$\|\{y_n\}\|=\sup_n\|y_n\|.$$

就够了，于是这时定理的叙述可以改成下列形式：設 T_n 是由 Banach 空間 E 到 Banach 空間 $E_n(n=1, 2, \cdots,)$中的有界綫性算子并且設存在一列元 $x_n \in E$, $\|x_n\| \leqslant 1$, 使

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|T_n x_n\| = \infty$$

那末 $M \equiv \{x \mid x \in E, \sup\limits_n \|T_n x\| < +\infty\}$是 E 中第一綱集，在这个形式下，定理的命名就比較容易了解了，因为所謂[共鳴]，乃是指由某一序列的無界性可以推出另一序列的無界性，并且特别是在前者的随 n 而变的点 x_n 在第二序列中換成固定的 x（这种 x 組成第二綱集，所以，在 Banach 空間中不空，卽这种 x 有"非常多"），这类定理的历史来源与应用將在下面詳述。在許多文献中，这个定理也叫做 **Banach-Steinhaus 定理**。

証[①] 作諸空間 E_L 的积空間

$$Y = \{(y_L)(L \in I) \mid y_L \in E_L, \sup_{L\in I} \|y_L\| < +\infty\}.$$

在 Y 中令
$$\|(y_L)\| = \sup_{L\in I} \|y_L\|.$$

注意如果$(y_L) \in Y$, $(z_L) \in Y$,

$$\|(y_L)\| = 0 \Longleftrightarrow \|y_L\| = 0(l \in I) \Longleftrightarrow y_L = \Theta(L \in I) \Longleftrightarrow (y_L) = \Theta \in Y,$$

$$\|(y_L + z_L)\| = \sup\|y_L + z_L\| \leqslant \sup\|y_L\| + \sup\|z_L\| =$$
$$= \|(y_L)\| + \|(z_L)\| < +\infty,$$

$$\|\alpha(y_L)\| = \|(\alpha y_L)\| = \sup_L \|\alpha y_L\| = |\alpha| \sup\|y_L\| = |\alpha| \|(y_L)\| < +\infty.$$

从而可以看出 Y 是賦范綫性空間，我們証明 Y 是 Banach 空間。設 $(y_L^{(n)}) \equiv y^{(n)} \in Y(n=1, 2, \cdots; L \in I)$，并且

$$\|y^{(n)} - y^{(m)}\| \to 0(n, m \to \infty),$$

于是依 Y 中范数的定义，对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在 n_ε, 使

---

① 过去的証明，有些是根据"綢推理的"（例如見[2]）有的是依據所謂 Гельфанд 輔定理的（例如見[31]）。我們現在把它当作閉圖象定理的一个系而得出。

$$n, m \geqslant n_\varepsilon \Longrightarrow \|y_L^{(n)} - y_L^{(m)}\| < \varepsilon (一切\ L \in I). \tag{4}$$

特别对每个 $L \in I$,$(y_L^{(n)})(n=1, 2, \cdots)$是 E_L中基本列,所以存在 $y_L \in E_L$,使$\|y_L^{(n)} - y_L\| \to 0(n \to \infty)$。在(4)中令 $m \to \infty$, 得

$$n \geqslant n_\varepsilon \Longrightarrow \|y_L^{(n)} - y_L\| \leqslant \varepsilon (L \in I). \tag{5}$$

因此，
$$\|y_L\| \leqslant \|y_L - y_L^{(n_\varepsilon)}\| + \|y_L^{(n_\varepsilon)}\| \leqslant \varepsilon + \sup_{L \in I} \|y_L^{(n_\varepsilon)}\| < +\infty.$$

从而 $y=(y_L) \in Y$。由(5)得

$$n \geqslant n_\varepsilon \Longrightarrow \|y - y^{(n)}\| \leqslant \varepsilon,$$

所以在 Y 中 $y^{(n)}$斂于 y, 証明了 Y 的完备性。

現在考察定义在E 中子集M上并在Y 中取値的算子 T:

$$Tx = (T_L x)_{L \in I} \quad (x \in M).$$

依假定(3),对每个 $x \in M$, $Tx \in Y$, 并且不难看出 T 是綫性的，为了証明定理,卽存在正数 μ,使

$$\|T_L\| \leqslant \mu \quad (L \in I).$$

只須証
$$\|T_L x\| \leqslant \mu \|x\| (x \in E, L \in I),$$

卽
$$\|Tx\| = \sup \|T_L x\| \leqslant \mu \|x\| (x \in M).$$

从而只須証 T 是連續算子就够了，而依閉圖象定理只須証 T 是閉算子就够了。

但設 $x_n \to x_0$, $x_n \in M$, $Tx_n \to y \in Y$, 那末 $y=(y_L)$, 依 Y 中范数的定义，

$$T_L x_n \longrightarrow y_L (L \in I).$$

但 T_L 是連續的,所以 $T_L x_n \to T_L x_0$, 从而 $y_L = T_L x_0 (L \in I)$,所以

$$\sup_L \|T_L x_0\| = \sup_L \|y_L\| < +\infty (因(y_L) \in Y),$$

卽 $x_0 \in \mathfrak{D}(T)$并且
$$y = Tx.$$

T 的閉性証完。

定理 5(异点凝聚原理): 設 $T_{pq}(p, q=1, 2, \cdots)$是由 Banach 空間 E 到 Banach 空間 E_{pq} 中的有界綫性算子,并設

$$\overline{\lim_{q\to\infty}}\|T_{pq}\|=\infty(p=1, 2, \cdots); \tag{6}$$

那末存在E中一个第二綱集M，使$E\setminus M$是第一綱集，并且对于每个$x\in M$，

$$\overline{\lim_{q\to\infty}}\|T_{pq}(x)\|=\infty(p=1, 2, \cdots). \tag{7}$$

注 (6)意味着存在x_{pq}, $\|x_{pq}\|=1$,

$$\overline{\lim_{q\to\infty}}\|T_{pq}, x_{pq}\|=\infty,\ p=1, 2, \cdots.$$

这种x_{pq}使上序列發散，从而是某种异点。結論(7)説明这随p而变的x_{pq}可以換成一个固定的x，从而定理叫做异点“凝聚”原理。

証 設 $H_p=\{x\,|\,x\in E, \overline{\lim_{q\to\infty}}\|T_{pq}x\|<\infty\}$,

那末依定理4的注，H_p是第一綱集。于是

$$\bigcup_{p=1}^{\infty}H_p.$$

也是第一綱集，从而

$$M=E\setminus\bigcup_{p=1}^{\infty}H_p.$$

是第二綱集。証完。

关于共鳴定理与异点凝聚原理的研究源流 在19世紀中，在关于Fourier級数的研究中，發生了这样的問題，即举出一个周期为2π的連續函数，使它的Fourier級数在一預給的点处(無妨設是$t=0$)發散。1876年P. du Bois Reymond給出了第一个例[3]。H. Lebesgue也証明这种函数的存在(1909)，他的方法实际上乃是根据在Fourier級数的特殊情形下共鳴定理的逆命題。另一方面，1911年，O. Toeplitz[29]与H. Steinhaus研究了級数求和法問題，在这一具体情形下也得出了这一定理，但他們的証明是較难的。此后，H. Hahn关于插值的研究

(1918, [13]), G. Polya 关于种种机械求积公式的收斂的研究 (1933, [24]), I. Schur(1920, [26]) 与 H. Hahn(1922, [13])关于求和法与异积分的研究,也發現了同类的定理。在这基础上,可以想到这些互相类似的定理乃是一个很一般的定理的特殊情况。S. Banach 与 H. Steinhaus 于 1927 ([2])提出了这个一般定理,也有时叫做綫性算子的一致有界原理。

P. Du Bois Reymond 在上引文中也証明了下列結果。令Σ 表示一組給定的。可数多个实数 $t_i(i=1, 2, \cdots, 0\leqslant t_i\leqslant 2\pi)$,那末必存在 $x(t)\in C_{2\pi}$ [即以 2π 为周期的連續函数全体],使 $x(t)$的 Fourier 級数在每个 t_i 处發散 $(i=1, 2, \cdots)$。特别,可以作出 $x(t)\in C_{2\pi}$,使 $x(t)$ 的 Fourier 級数發散的点形成$[0, 2\pi]$中的稠集,这定理后来得到了許多証明。但这些証明中有一共同点,即使用了 $x(t)(\in C_{2\pi})$的 Fourier級数在一点發散,而对于 Fourier 級数的其他屬性使用不多。于是可以想象这一定理也可以推广到 Fourier 級数之外。这种方法远溯到 Riemann(1854), H. Hankel (1882) 乃是第一位独立地考察这一問題并試圖以最大的一般性論述的人,“异点凝聚”这一名詞(Condensatrin der singularitäten)就是他引入的。在定理 5 的形式下,这一般結果也是屬于 Banach 与 Steinhaus 的。

上述兩个定理也逝繼續吸引着人們的兴趣,关于 Fourier 級数發散問題,L. Fejer 作例的方法最为簡單 ([4]),并且使用他的例可以作出 $x(t)\in C_{2\pi}$,使 $x(t)$的 Fourier 級数在不可数多个点处發散, G. Grünwald([12]) 証明了关于 Lagrange 插值式的相应結果。Orlicz (1934) 得出了关于綫性算子的最一般的异点凝聚原理([21]): 即設已知一串有界綫性算子 $T_n(x, \tau)$,依賴于一个連續參数 $\tau\in[0, 1]$,并設 T_n 連續地依賴于 τ,設对于每个 $\tau\in[0, 1]$,存在一点,x_τ,使

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|T_n(x_\tau;\tau)\|=\infty,$$

那末必存在 x, 使 $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|T_n(x;\ \tau)\|=\infty.$$

对 τ 的一个預定的不可数集中的值成立。这些定理推广的另一方面乃是减弱綫性的假定。在这方面，有 I. S. Gál 的一系列的工作，这里不詳述。

由共鳴定理直接推出下面一个应用很多的定理。它的直接証明(見[16])是較長的。

定理 6　設 $T_n(n=1, 2, \cdots)$ 是由 (B) 型空間 X 到 (B) 型空間 Y 中的綫性有界算子。为了对于每个 $x\in X$, T_nx 收斂，必須且只須下列兩条件同时成立;

1) $(\|T_n\|)$ 是有界数列，即存在一个与 n 無关的正数，使
$$\|T_n\|\leqslant M(\text{一切 } n);$$

2) 对于 X 中一稠集 D 中的每个元 x, T_nx 收斂。

注　如果 T_nx 对每个 $x\in X$ 收斂，令
$$\lim_{n\to\infty}T_nx=Tx,$$
那末 T 是綫性算子。T 也是有界的，因为由本定理，
$$\|Tx\|=\lim_{n\to\infty}\|T_nx\|\leqslant\lim_{n\to\infty}\|T_n\|\|x\|\leqslant M\|x\|.$$

証　**充分性**　設 x 是 X 中任意元。依假定，对于預定的 $\varepsilon>0$, 可以取 $z\in D$, 使 $\|x-z\|<\frac{\varepsilon}{3M}$。依假定 (T_nz) 收斂，从而对于一切大于某自然数 $n_0=n_0(\varepsilon)$ 的 n 及任意自然数 p, 有
$$\|T_{n+p}z-T_nz\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$
于是
$$\|T_{n+p}x-T_nx\|\leqslant\|T_{n+p}x-T_{n+p}z\|+\|T_{n+p}z-$$
$$-T_nz\|+\|T_nz-T_nx\|\leqslant\|T_{n+p}(x-z)\|+\frac{\varepsilon}{3}+$$
$$+\|T_n(z-x)\|\leqslant 2M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

这就是說，$(T_n x)$是基本列，依 Y 的完备性，$(T_n x)$收斂。

必要性 設$(T_n x)$对于每个 $x\in X$ 收斂。那末对于固定的 $x\in X$，存在自然数 n_0，使对于一切 $n\geqslant n_0$，

$$\|T_n x-T_{n_0}x\|\leqslant 1.$$

所以

$$n\geqslant n_0\Longrightarrow\|T_n x\|\leqslant 1+\|T_{n_0}x\|.$$

从而

$$\|T_n x\|\leqslant\max\{\|T_1(x)\|,\|T_2 x\|,\cdots,\|T_{n_0-1}x\|,\|T_{n_0}x\|+1\}.$$

这就是說，$(\|T_n x\|)$对每个 $x\in X$ 是有界集，从而依共鳴定理，$(\|T_n\|)$是有界数集。第二个条件是不足道的。証完。

本节諸定理都是很富于应用的。下面举一些应用的例。

例 1. 偏微分方程解对边界条件的連續依賴性 設

$$E(u)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{s_1+\cdots+s_r=k}a_{s_1\cdots s_r}^{(k)}(x)\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_r^{s_r}}$$

是 n 阶綫性微分算子，这里 $a_{s_1\cdots s_r}^{(k)}(x)$ 是 r 維空間中区域 A 中点 $x=(x_1,\cdots,x_r)$的連續函数。設 $\mathfrak{F}A$ 表示区域 A 的边界，$\mathfrak{F}_h A(1\leqslant h\leqslant m)$ 表示 $\mathfrak{F}A$ 的子集。令

$$L_h(u)=\sum_{k=0}^{p_h}\sum_{s_1+\cdots+s_r=k}b_{s_1\cdots s_r}^{(h,k)}(x)\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_r^{s_r}}\quad(1\leqslant h\leqslant m),$$

这里 $b_{s_1\cdots s_r}^{(h,k)}(x)$ 是定义在 $\overline{\mathfrak{F}_h A}$ 上的連續函数。这就是說，L_h 是 $\mathfrak{F}_h A$ 上的 p_h 阶微分算子。設 Σ 表示在集 A 上有直接到 n 阶的各阶連續偏导函数，并且在 $A\cup\overline{\mathfrak{F}_h A}$ 上有直到 p_h 阶的各阶連續偏导函数并滿足方程

$$E(u)=0\tag{8}$$

的函数 u 全体所組成的綫性集。設 Σ' 表示一切如下的矢函数 $u^*=(u_1^*(x),u_2^*(x),\cdots,u_m^*(x))$ 所組成的綫性集，这里 $u_k^*(x)$ 是定义在 $\overline{\mathfrak{F}_k A}$ 中的連續函数$(1\leqslant k\leqslant m)$，設 $u^*=Tu$ 表示由 $u\in\Sigma$ 到 Σ'中的算子，使

$$u^* = (L_1(u), \cdots, L_m(u)).$$

今假定：1)对于任意固定的 $u^* \in \Sigma'$，在 Σ 中恰有一个 u，满足方程 $u^* = Tu$；2)对于每个 $h(1 \leqslant h \leqslant m)$，存在一列有界閉集 (C_q^h) 满足下列三个条件：

a) $C_q^{(h)} \supset \overline{\mathfrak{F}_h A}$ $(q = 1, 2, \cdots)$；

b) $C_q^h \subset C_{q+1}^h \subset A \cup \overline{\mathfrak{F}_h A}$；

c) 对于任意有界閉集 $C \subset A \cup \overline{\mathfrak{F}_h A}$，存在 q，使 $C_q^{(h)} \supset C$。

設(u_k)是(8)的一串解，并且 $u_k \in \Sigma$，使$(L_h(u_k))(1 \leqslant h \leqslant m, k = 1, 2, \cdots)$在 $\overline{\mathfrak{F}_h A}$ 上一致收斂于 u_h^*。設 u 是边界值問題

$$E(u) = 0 \quad \text{在 } A \text{ 中}$$
$$L_h(u) = u_h^* \quad \text{在 } \mathfrak{F}_h A \text{ 上}$$

的解。那末(u_k)在每个含在 $A \cup \overline{\mathfrak{F}_h A}$ 中的有界閉集上一致收斂于 u，并且 u_k 的 p_h 以下各阶的偏导数$(1 \leqslant h \leqslant m)$一致收斂于 u 的相应导数，而(u_k)在每个含在 A 中的有界閉集中一致收斂于 u，并且 u_k 的 n 阶以下各阶偏导数各一致收斂于 u 的各相应导数(特别如果个 $p_h \geqslant n$，那末結論后半乃是前半的后果)。

証明是这样的。令(F_q)表 A 中一串不減的閉有界集，使对于每个閉有界集 $C \subset A$，必存在一个 $F_q \supset C$。例如把 n 維空間用間隔为 $1/q$ 的平行平面分划，就可以作出一串这样的 F_q 来。今把 Σ 看成 Fréchet 空間，規定准范数为：

$$\|u\| = \sum_{k=0}^{n} \sum_{s_1+\cdots+s_r=k} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} \frac{\max\limits_{F_q} \left| \dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_r^{s_r}} \right|}{1 + \max\limits_{F_q} \left| \dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_r^{s_r}} \right|} +$$

$$+ \sum_{h=1}^{m} \sum_{k=0}^{p_h} \sum_{s_1+\cdots+s_r=k} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} \frac{\max\limits_{C_q^{(h)}} \left| \dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_r^{s_r}} \right|}{1 + \max\limits_{C_q^{(h)}} \left| \dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_r^{s_r}} \right|}.$$

注意 $\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q!}\frac{a_q}{1+a_q}$ 对于任意 $a_q\geqslant 0$ 收斂，并且它的和不超过 $e-1$。不難看出 $\|u\|$ 确是准范数，現在証明 Σ 按这个准范数成为备空間。实际上，設 (v_j) 是 Σ 中的基本列，那末可以取 i 足够大，使对于每个自然数 j,

$$\|v_{i+j}-v_i\|<\frac{1}{2q!},$$

q 是預定的自然数。于是

$$\max_{C^{(q)}}\left|\frac{\partial^k v_{i+j}}{\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_r^{s_r}}-\frac{\partial^k v_i}{\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_r^{s_r}}\right|\leqslant 2q!\,\|v_{i+j}-v_i\|,$$

$$(1\leqslant h\leqslant m,\ 0\leqslant k\leqslant p_h,\ q=1,2,\cdots)$$

$$\max_{F_q}\left|\frac{\partial^k v_{i+j}}{\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_r^{s_r}}-\frac{\partial^k v_i}{\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_r^{s_r}}\right|\leqslant 2q!\,\|v_{i+j}-v_i\|,$$

$$(0\leqslant k\leqslant n,\ q=1,2,\cdots).$$

这是由下列的簡單不等式得出的，即如 $\beta<\frac{1}{2}$，由

$$\frac{\alpha}{1+\alpha}\leqslant\beta$$

可知 $\alpha\leqslant\beta+\alpha\beta$, 从而

$$\alpha\leqslant\frac{\beta}{1-\beta}\leqslant 2\beta.$$

于是不难看出 v_i 收斂于 Σ 中的函数 v。

Σ' 也看成 Fréchet 空間，这里准范数是

$$\|u^*\|=\sum_{h=1}^{m}\max_{\mathfrak{F}_h A}|u_h^*(x)|.$$

Σ' 的完备性是容易驗明的，依假定(1)，T 把 Σ 一对一地映到备空間 Σ' 之上。又 T 是連續綫性算子。事实上，令

$$M\geqslant|b_{s_1\cdots s_r}^{(h,k)}(x)|,\quad(\text{一切 } h,k,s_1,\cdots,s_r,x\in\overline{\mathfrak{F}_h A}).$$

于是当 $u, v \in \Sigma$, $\|u-v\|<\frac{1}{2}$ 时，利用与上述一样的推理可以証明

$$\|T_u - T_v\| < 2M\|u-v\|.$$

由此，可知 T 滿足 Banach 定理的条件，从而可知 $\overset{-1}{T}$ 是連續的，即 u 連續地依賴于 u^*, 这正是要証的。

当 $n=2$ 时，这定理已見于 S. Banach 的經典性書中［第三章 § 5］，对于任意 n 是由 M. Picone 証明的[23]。这里的証明比 Picone 的条件更广，是采取自 Fichera[5] 的。

例 2. Fourier 級数的發散問題　以 2π 为周期的实值連續函数全体按范数 $\|x\| = \sup_t |x(t)|$ 形成一个实 Banach 空間，熟知如果 $x(t) \in C_{2\pi}$, 它的 Fourier 級数的最初 $(n+1)$ 項之和

$$f_n(x, t) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt)$$

可以表示成

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(s, t) x(s) ds,$$

这里

$$K_n(s, t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(s-t)}{2\sin\frac{1}{2}(s-t)}.$$

对于固定的 t_0 与 n, $f_n(x, t_0)$ 是 $C_{2\pi}$ 上的綫性泛函数。为簡單起見，無伤于一般性可設 $t_0=0$, 那末 $f_n(x, 0)$ 的范数等于

$$\|f_n\| = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(s, 0)| ds.$$

事实上，把上式右边的数表示成 λ_n。那末容易看出 $\|f_n\| \leqslant \lambda_n$。反之，設 $\varepsilon < \frac{\pi}{2m+1}$, 并考察 $C_{2\pi}$ 中的函数：

$$x_s(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn} K_n(t, 0) & \text{如果 } \frac{2k\pi}{2m+1} + \varepsilon \leqslant t \leqslant \frac{2(k+1)\pi}{2m+1} - \varepsilon \\ \text{其他处是直綫形的。} & (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots); \end{cases}$$

于是

$$
\begin{aligned}
|f_n(x_\varepsilon, 0)| &= \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} K_n(s,0)x_\varepsilon(s)ds\right| = \\
&= \frac{1}{\pi}\left|\sum_{k=0}^{2m}\int_{\frac{2k\pi}{2m+1}+\varepsilon}^{\frac{2(k+1)\pi}{2m+1}-\varepsilon} K_n(s,0)x_\varepsilon(s)ds + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^{2m}\int_{\frac{2k\pi}{2m+1}-\varepsilon}^{\frac{2k\pi}{2m+1}+\varepsilon} K_n(s,0)x_\varepsilon(s)ds\right| = \\
&= \frac{1}{\pi}\left|\sum_{k=0}^{2m}\int_{\frac{2k\pi}{2m+1}+\varepsilon}^{\frac{2(k+1)\pi}{2m+1}-\varepsilon} |K_n(s,0)|ds + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^{2m}\int_{\frac{2k\pi}{2m+1}-\varepsilon}^{\frac{2k\pi}{2m+1}+\varepsilon} K_n(s,0)x_\varepsilon(s)ds\right| = \\
&= \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(s,0)|ds - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=0}^{2m}\int_{\frac{2k\pi}{2m+1}-\varepsilon}^{\frac{2k\pi}{2m+1}+\varepsilon} (|K_n(s,0)| - K_n(s,0)x_\varepsilon(s))ds\right| \geqslant \\
&\geqslant \lambda_n - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{2m}\int_{\frac{2k\pi}{2m+1}-\varepsilon}^{\frac{2k\pi}{2m+1}+\varepsilon} |K_n(s,0)|ds,
\end{aligned}
$$

由于

$$|K_n(s,0)|=\frac{1}{2}|1+2\cos t+\cdots+2\cos nt|\leqslant\frac{2n+1}{2},$$

得
$$|f_n(x_\varepsilon,0)|\geqslant\left[\lambda_n-\frac{2\varepsilon}{\pi}(2n+1)^2\right].$$

$\varepsilon>0$ 既是任意的，可知

$$\|f_n\|\geqslant\lambda_n.$$

于是証完了
$$\|f_n\|=\lambda_n.$$

Fejer 証明 [4]

$$\lambda_n=\frac{4}{\pi^2}\log n+O(1)$$

較初等的估計也可証明 $\lambda_n\to\infty(n\to\infty)$，因为

$$\lambda_n>\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{2n}\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{\left|\sin\frac{1}{2}t\right|}dt\geqslant\frac{\sqrt{2}}{4\pi}\sum_{k=0}^{2n}\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\frac{1}{\left|\sin\frac{1}{2}t\right|}dt\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\sqrt{2}}{4\pi}\sum_{k=0}^{2n}2\log t\Big|_{\alpha_k}^{\beta_k}=\frac{\sqrt{2}}{4\pi}\sum_{k=0}^{2n}-\log\left(1-\frac{2}{4k+3}\right)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{4k+3},$$

这里 $\alpha_k=\frac{(4k+1)\pi}{4n+2}$，$\beta_k=\frac{(4k+3)\pi}{4n+2}$。这里引用了

$$t\in\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right)\Longrightarrow\sin t>\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$|\sin t|\leqslant t\ (t\geqslant0)$ 及 $-\log(1-x)\geqslant x(0<x<1)$。

由共鳴定理，可知$(f_n(x,0))$不能对一切 $x\in C_{2\pi}$ 有界，从而 $\exists x\in C_{2\pi}$，使$(f_n(x,0))$發散，即 x 的 Fourier 級数發散。

例 3. 無穷联立一次方程 設 $A=(a_{ij})$是無穷陣$(i,j=1,2,\cdots)$。設 E 是由某些数列 $y=(\eta_i)(i=1,2,\cdots)$組成的 Fréchet 空間，使在这个空間中，$y\to\Theta$ 蘊涵 y 的每个坐标 $\eta_i\to0$。設对于每个 $y=(\eta_i)\in E$,

無穷一次联立方程

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}\xi_k = \eta_i \qquad (i=1, 2, \cdots) \tag{9}$$

常有一意解 $x=(\xi_k)\in(s)$。那末必存在 $f_i\in E^*(i=1, 2\cdots)$, 使对每个 $y=(\eta_i)\in E$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} f_k(y) = \eta_i.$$

証 設

$$E_1=\left\{x \middle| x=(\xi_i)\in(s), \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}\xi_k \text{ 存在且有穷}, (\eta_i)=\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}\xi_k\right)\in E\right\}.$$

在 E_1 中引入准范数

$$\|x\|_* = \|x\|_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\|x\|_i}{1+\|x\|_i},$$

这里
$$\|x\|_0 = \left\|\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}\xi_k\right)\right\| \text{ (即 } E \text{ 中的准范数);}$$

$$\|x\|_i = \sup_{n\geqslant 1} \left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\xi_k\right| \quad (i=1, 2, \cdots).$$

(不难驗証 $\|\ \|_*$ 确是准范数。現在証明 E_1 的完备性，首先設 $x_n= =(\xi_k^{(n)})$而

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_* = 0.$$

并証明
$$\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = 0 \qquad (k=1, 2, \cdots)$$

事实上，对于任意的 $y\in E$, 依假定相应的 $x\in E_1$ 一意决定，从而对任意 k, 不可能 $\alpha_{ik}=0(i=1, 2, \cdots)$。設 $\alpha_{i_k k}\neq 0$ $(k=1, 2, \cdots)$。由于 $\alpha_{i_1 1}\neq 0$,

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|_{\iota}=0$, 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_1^{(n)}=0$(事实上, $|\alpha_{i_1}\xi_1^{(n)}|\leqslant\sup\limits_{n\geqslant 1}\left|\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_{i_1k}\xi_k^{(n)}\right|=$ $=\|x_n\|_{i_1}$)。按归納法逐次可証明 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=0(k=1,2,\cdots)$。現在設

$$\|x_p-x_q\|_*\to 0 \qquad (p,q\to\infty),$$

那末可知

$$\lim_{p,q\to\infty}|\xi_k^{(p)}-\xi_k^{(q)}|=0 \qquad (k=1,2,\cdots).$$

于是必存在 ξ_k, 使 $\lim\limits_{p\to\infty}\xi_k^{(p)}=\xi_k\ (k=1,2,\cdots)$。不难驗明 $x=(\xi_k)\in E_1$ 并且

$$\lim_{p\to\infty}\|x_p-x\|_*=0.$$

事实上, 由假設, 当 p,q 充分大时, $\|x_p-x_q\|_i\leqslant\varepsilon$, 于是

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}(\xi_k^{(p)}-\xi_k^{(q)})\right|\leqslant\varepsilon(\text{一切 } n),$$

令 $q\to\infty$, 得

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}(\xi_k^{(p)}-\xi_k)\right|\leqslant\varepsilon(\text{一切 } n),$$

所以

$$\sup_n\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}(\xi_k^{(p)}-\xi_k)\right|\leqslant\varepsilon,$$

特别

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\xi_k^{(p)}\to\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\xi_k \qquad (p\to\infty)$$

对 n 一致成立。先取 p 充分大, 再取 n,m 充分大, 可使

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\xi_k-\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}\xi_k\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}(\xi_k-\xi_k^{(p)})\right|+$$

$$+\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\xi_k^{(p)}-\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}\xi_k^{(p)}\right|+\left|\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}(\xi_k^{(p)}-\xi_k)\right|\leqslant\varepsilon.$$

于是得知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}\xi_k$ 收斂且有穷，并且

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}\xi_k^{(p)} \to \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}\xi_k \quad (p\to\infty).$$

又因

$$\|x_p - x_q\|_0 = \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}\xi_k^{(p)} \right) - \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}\xi_k^{(q)} \right) \right\| \to 0 \quad (p, q\to\infty),$$

所以存在一元$(\eta_i)\in E$，使

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}\xi_k^{(p)} \right) - (\eta_i) \right\|_0 \to 0 \quad (p\to\infty).$$

由假定，

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}\xi_k^{(p)} \to \eta_i \quad (p\to\infty),\ i=1, 2, \cdots.$$

比較前結果，得

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}\xi_k \quad (i=1, 2, \cdots).$$

所以 $x=(\xi_i)\in E_1$。并且

$$\lim_{p\to\infty} \|x_p - x\|_* = 0.$$

所以 E_1 是 Fréchét 空間。

今对 $y=(\eta_i)\in E$ 求(9)的解 $x=(\xi_k)\in E_1$，把这方程表成 $y=Tx$。容易看出 T 是綫性的。因依准范数 $\| \ \|_*$ 的定义，

$$\|y\| = \|x\|_0 \leqslant \|x\|_*,$$

可知 T 是連續的。依 Banach 定理 T^{-1} 是由 E_1 到 E 中的連續綫性算子。令 $\xi_k = f_k(y)$，$x=(\xi_k)=T^{-1}y$，于是由 $\|y_n\|\to 0$ 可知相应的 $\|x_n\|_*\to 0$，从而依証明的上半部分，$\xi_k^{(n)}\to 0 (k=1,2,\cdots)$，即 f_k 是連續的，所以 $f_k\in E^*$，証完。

特别取 E 为一些特殊序列空間，并利用这些空間的共軛空間的具体形狀(見 § 3)，可得下列系：

系 i) $E=(c)$, ii) $E=(s)$, iii) $E=(l^1)$, iv) $E=l^p$, $\infty>p>1$。那末方程(9)的解可写成

$$\xi_k=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_{ki}\eta_i+\gamma_k\lim_{i\to\infty}\eta_i \quad (k=1, 2, \cdots)$$

这里的 β_{ki}, γ_k 按上述不同情形滿足下列条件：

i) $\sum_{i=1}^{\infty}|\beta_{ki}|<\infty(k=1, 2, \cdots)[\because(c)^*=(l^1)]$;

ii) $\gamma_k=0$ 并且 $\beta_{ki}=0(i\geqslant n_k)(k=1, 2, \cdots)$[注意$(s)^*$ 的形式];

iii) $\sup_i|\beta_{ki}|<+\infty(h=1, 2, \cdots)$[注意$(l^1)^*=(m)$];

iv) $\sum_{i=1}^{\infty}|\beta_{ki}|^{p'}<+\infty$, 这里 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ $(k=1, 2, \cdots)$ $[\because(l^p)^*=$ $=l^{p'}]$。

例 4. 無穷級数求和法 設有一無穷陣 $(\alpha_{ij})=A$, 数列 $x=$ $=(\xi_k)\in(s)$叫做 A-有和，是指

$$A_i(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{ik}\xi_k \quad (i=1, 2, \cdots)$$

存在且有穷，并且

$$A(x)=\lim_{i\to\infty}A_i(x)$$

也存在且有穷。这时 $A(x)$ 叫做数列 x 的 A-極限，設 $\mathfrak{A}$ 表示(s)中一切 A-有和的数列 $x=(\xi_k)$的全体。設

$$\mathfrak{B}=(\beta_{ij})$$

是另一無穷陣，我們用 $A\subset B$ 表示 $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}$ 表示(s)中一切 B-有和

的数列的全体。如果 $A\subset B$ 并且对于每个 $x\in\mathfrak{A}$, $A(x)=B(x)$, 我們写作 $A\subseteq B$。設 $I=(\delta_{ij})$ 表示單位陣：$\delta_{ij}=1$（如 $i=j$），$\delta_{ij}=0$（如 $i\neq j$）当 $I\subseteq A$, 我們説 A 是保存的 (permanent)，这意味着当数列 $x=(\xi_k)$ 的平常極限存在时，它也必 A- 有和并且它的 A- 極限等于它的平常極限。注意 I 的相应数列集 $\mathfrak{T}=(c)$, 而且 $I(x)=\lim\limits_{k\to\infty}\xi_k$, $(\xi_k)\equiv x\in(c)$。又如 $\alpha_{nk}=\frac{1}{n}(1\leqslant k\leqslant n)=0$（如 $k>n$），那末 A 極限卽平常算术中項法求和的極限。

Steinhaus-Toeplitz 定理 A（見[27], [29]）。为了無旁陣 $A=(\alpha_{ij})$ 是保存的，必須且只須

(1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\alpha_{ik}|\leqslant\alpha<\infty\ (i=1,2,\cdots)$;

(2) $\lim\limits_{i\to\infty}\alpha_{ik}=0\ (k=1,2,\cdots)$;

(3) $\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_{ik}=1$。

証　1) **必要性**　对于 $x=(\xi_k)\in(c)$ 令

$$A_{in}(x)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\xi_k,\ A_i(x)=\lim_{n\to\infty}A_{in}(x)$$

那末显然 $A_{in}(x)\in(c)^*$, 既然 A 是保存的，对每个 $x\in(c)$, $A_i(x)$ 存在，从而依定理 6, $A_i(x)\in(c)^*$。又因 $A(x)=\lim\limits_{i\to\infty}A_i(x)$, $x\in(c)$, 再用定理 6, 可知 $A(x)\in(c)^*$ 且存在正数 $\alpha<\infty$, 使

$$\|A_i\|\leqslant\alpha\qquad(i=1,2,\cdots).$$

注意 $(c)^*=(l^1)$, 所以

$$\|A_i\|=\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{ik}|,$$

从而得出 (1) 来。特别取 $x_k=(\delta_{ki})(i=1,2,\cdots)$, 那末由于 $A_{in}(x_k)=$ $=\alpha_{ik}(n\geqslant k)$, 且 A 是保存的, 可知 $A(x_k)=0$, 即

$$0=\lim_{i\to\infty}A_i(x_k)=\lim_{i\to\infty}\alpha_{ik}\qquad k=1,2,\cdots,$$

得出(2), 又特别取 $x_0=\{1,1,1,\cdots\}$, 那末依 A_i 保存性可知

$$A_{ik}(x_0)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{ik},\quad \lim A_i(x_0)=A(x_0)=1,$$

从而得出(3)。

2) 充分性 依 (1), 对每个 i, $(\alpha_{ik})\in(l^1)=(c)^*$, 从而 $A_i(x)$ 是 $(c)^*$ 中元, 且 $\|A_i\|\leqslant\alpha(i=1,2,\cdots)$。由(2),(3)得知 $\lim\limits_{i\to\infty}A_i(x_k)=0$, $\lim\limits_{i\to\infty}A_i(x_0)=1$, x_0, x_k 的意义如前部分, $x_0, x_1, x_2, \cdots$, 所張成的綫性空間 M 在(c)中稠, 从而引用定理 6 的充分部分可知 $A(x)=\lim\limits_{i\to\infty}A_i(x)$ 对每个 $x\in(c)$存在, 并且 $A(x)\in(c)^*$。但对于 $x\in M$, $Ax=Ix$, 从而, 依M 的稠性可知对一切 $x\in(c)$, $A(x)=I(x)$, 証完。

对于無穷陣 $A=(\alpha_{ij})$, 如果对于每个 $y=(\eta_i)\in(c)$, 方程組

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{ik}\xi_k=\eta_i\qquad(i=1,2,\cdots)\tag{9}$$

的解 $x=(\xi_k)\in(s)$一意决定, 那末 A 叫做可逆的(reversible)。如果 A 是保存且可逆的, 并且

$$(\alpha_i)\in(l^1),\ \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\alpha_{ik}=0(k=1,2,\cdots)\Longrightarrow\alpha_1=\alpha_2=\cdots=0,\tag{10}$$

那末 A 叫做完(perfect)的。

定理 B 設 $A=(\alpha_{ij})$是保存且可逆的。

i) 如果(10)成立, 且 B 是保存的, $A\subset B$, 那末 $A\Subset B$;

ii) 如果由 $A\subset B=(\beta_{ij})$且 B 是保存的, 必然推得 $A\Subset B$, 那末(10)

成立。

証 1) 設 $B\supset A$，那末对于每个 $x=(\xi_k)\in\mathfrak{A}$，必然 $B(x)$ 可以表示成

$$B(x)=\alpha A(x)+\sum_{r=1}^{\infty}\alpha_r(x),$$

这里 $(\alpha_r)\in(l^1)$。事实上，由于 A 的可逆性，依例 3 中的系(i)，(9)的解可以表示成

$$\xi_k=f_k(y)=\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_{ki}\eta_i+\delta_k\lim_{i\to\infty}\eta_i\qquad(k=1,2,\cdots),$$

并且 $\sum_{i=1}^{\infty}|\gamma_{ki}|<\infty(k=1,2,\cdots)$，这也就是說 $f_k\in(c)^*$。于是

$$B_i(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{ik}\xi_k=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{ik}f_k(y)\equiv F_i(y)$$

存在，从而屬于 $(c)^*$，并且

$$B(x)=F(y)=\lim_{i\to\infty}F_i(y)$$

也屬于 $(c)^*$。这也是由定理 6 得出，用到 (c) 上一串連續綫性泛函数上去。于是对于 $y=(\eta_i)$，$\eta_i=A_i(x)$。

$$\lim_{i\to\infty}\eta_i=\lim_{i\to\infty}A_i(x)=A(x)$$

且 $B(x)=F(y)\in(c)^*=(l^1)$，所以存在 $(\alpha_r)\in(l^1)$，使

$$B(x)=\alpha A(x)+\sum_{r=1}^{\infty}\alpha_r A_r(x).$$

2) 現在証明(i)：設 $x_k=(\delta_{kj})(j=1,2,\cdots)$，由于 A, B 是保存的，必然

$$A(x_k)=0=B(x_k),$$

依証明中的 1)，

$$B(x_k)=0=0+\sum_{r=1}^{\infty}\alpha_r a_{rk}\qquad(k=1,2,\cdots).$$

依条件(10), $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=0$, 从而 $B(x)=\alpha A(x)$. 而这对每个 $x\in\mathfrak{A}$ 成立,从而依 A, B 之保存性, $\alpha=1$, 从而 $x\in\mathfrak{A}\Longrightarrow B(x)=A(x)$。

3) 現在証明(ii): 設$(\alpha_r)\in(l^1)$, 并且 $\sum\limits_{r=1}^{\infty}\alpha_r\alpha_{rk}=0\ (k=1, 2, \cdots)$。对于 $\mathfrak{A}$ 之每个点,考察

$$L(x)=A(x)+\sum_{r=1}^{\infty}\alpha_r A_r(x)$$

依假定, $L(x_k)=A(x_k)$, 而

$$L(x_0)=A(x_0)+\sum_{r=1}^{\infty}\alpha_r\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{rk}.$$

因 A 是保存的,依定理 A 的(s),

$$\sum_{r=1}^{\infty}\alpha_r\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{rk}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\alpha_r\alpha_{rk}=0,$$

从而得 $L(x_0)=A(x_0)$。但在由 $\{x_k\}$ 与 x_0 張成的綫性子空間在 $(c)=\mathfrak{T}(\subset\mathfrak{A})$中稠, L 与 A 在(c)上相等。于是依定理 A, $L(x)=A(x)$ 是(c)上有界綫性泛函数。定义

$$B_i(x)=A_{i+1}(x)+\sum_{r=1}^{i}\alpha_r A_r(x),$$

那末得出 $B=(\beta_{il})$, 使 $B\supset A$, 并且依上述B 是保存的。依假定, $B\supseteq A$, 卽 $x\in\mathfrak{A}\Longrightarrow B(x)=A(x)=L(x)$, 于是

$$x\in\mathfrak{A}\Longrightarrow\sum_{r=1}^{\infty}\alpha_r A_r(x)=0,$$

而由A之可逆性,对每个$y=(\eta_i)\in(c)$, 存在$x=(\xi_k)$, 使 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_{ik}\xi_k=\eta_i$,

所以 $\sum\limits_{r=1}^{\infty}\alpha_r\eta_r=\sum\limits_{r=1}^{\infty}\alpha_r\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_{rk}\xi_k=\sum\limits_{r=1}^{\infty}\alpha_r A_r(x)=0$。于是必然 $\alpha_1=\alpha_2=$

$=\cdots=0$, 証完。

完的求和法的例 对于自然数 k, 令

$$\alpha_{ij}^{(k)}=\binom{i-1+k-j}{i-j}\Big/\binom{i-1+k}{i-1} \qquad (i\geqq j)$$

$$=0 \qquad (i<j)$$

那末与 $C^{(k)}=(\alpha_{ij}^{(k)})$ 相应的求和法叫做 k 位 Cesoro 求和法。特别

$$C_n^{(1)}(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k,\quad x=(\xi_k),$$

而 $C^{(2)}$ 实际上是接連使用 2 次求和法 $C^{(1)}$ 而得的求和法。一般 $C^{(n)}$ 是接連使用 n 次 $C^{(1)}$。不难看出 $C^{(n)}$ 是保存的且 $C^{(n)}\subseteqq C^{(m)}(n\leqq m)$, $C^{(n)}$ 的可逆性不难証明，也可証明 $C^{(n)}$ 是完的（見 [15], [19], [30]）。

例 5. Banach 空間中的弱收斂

定义： Banach 空間 E 中点列 (x_n) 叫做弱斂于 x_0, 是指对于每个 $f\in E^*$, $f(x_n)\to f(x_0)$（数列收斂），共軛空間 E^* 中点列 (f_n) 叫做*弱斂于 f_0, 是指对于每个 $x\in E$, $f_n(x)\to f_0(x)$。

注： 在 E^* 中把 E^* 本身看作 Banach 空間，也可以定义弱斂，卽 f_n 弱斂于 f_0, 是指对于每个 $x\in E^{**}$,

$$X(f_n)\to X(f_0),$$

由此可知如果 f_n 弱斂于 f_0, 那末 f_n 必*弱斂于 f_0。但逆命題一般不成立，例如不难証明 $(c)^*=(l^1)$，而已知 $(l^1)^*=(m)\supsetneqq(c)$。所謂 (l^1) 中点列 $y_n=(\eta_i^{(n)})(i=1,2,\cdots)$ *弱斂于 0, 是指对于每个 $(\xi_i)\in(c)$,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i^{(n)}=0,$$

而 y_n 弱斂于 0, 是指对于每个 $(\xi_i)\in(m)$,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i^{(n)}=0.$$

由于 $(c)\subset(m)$，特别对每个 $(\xi_i)\in(c)$，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i^{(n)}=0,$$

設 $\lim\limits_{i\to\infty}\xi_i=\xi_0$，那末

$$\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i^{(n)}=\sum_{i=1}^{\infty}(\xi_i-\xi_0)\eta_i^{(n)}+\sum_{i=1}^{\infty}\xi_0\eta_i^{(n)},\tag{11}$$

特别設 $\eta_i^{(n)}\geqslant 0$，那末，如果 y_n* 弱斂于 0，那末在(11)中，右边第一項趋于 0，而第二項趋于

$$\lim_{n\to\infty}\xi_0\|y_n\|.$$

但例如取 $\eta_i^{(n)}=\delta_{ni}$，$\|y_n\|=1$，从而对于 $\xi_0\neq 0$，y_n 不弱斂于 0！

由于 E^* 中的 f 是連續的泛函数，所以在 E 中元列的按范数收斂蘊涵弱收斂。但反之，弱收斂一般并不蘊涵按范数收斂，例如在 (l^2) 中，令 $x_n=(\delta_{ni})(i=1,2,\cdots)$，那末，由于$(l^2)$的自共軛性，每个綫性有界泛函数 $f(x)$ 可以表示成 $(x,y)\,(y\in(l^2))$。因此，$f(x_n)=\eta_n\,(y=$ $=(\eta_n))$，所以 $f(x_n)\to 0$ 对于任意 $f\in(l^2)^*$ 成立，即(x_n)弱斂于零元。但因 $\|x_n\|=1$，从而(x_n)按范数不斂于零元。

由定理 6 可知，如果 (x_n) 弱斂于 x_0，那末$(\|x_n\|)$是有界数列，不难看出

$$\|x_0\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|x_n\|.$$

更确切地說，定理 6 用到 Banach 空間 E 的共軛空間 E^* 上，得出下列結果：为了 E 中点列(x_n)弱斂于一元 $x\in E$，必須且只須 $(\|x_n\|)$ 有界并且对于 E^* 中一个稠集中的每个 f，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$。同样，定理 6 用到 Banach 空間 E 上的有界綫性泛函数列 (f_n)，可知：为了 E 上有界綫性泛函数列(f_n)* 弱斂，必須且只須 $(\|f_n\|)$ 是有界列并且对于 E 中一个

稠集中的每个元 x，$(f_n(x))$ 收斂，由此还容易得出一个有用的結果：設 E 是可分 Banach 空間，那末 E^* 中單位球 $\{f \mid f\in E^* \|f\|\leqslant 1\}$ 是 * 弱列紧的，即由任意一个滿足 $\|f_n\|\leqslant 1$ 的綫性有界泛函数列，必可取出一个子列 (f_{n_k})，使 (f_{n_k}) * 弱斂。事实上，設 D 是 E 中一个可数稠集，那末用对角綫推理法可証明 (f_n) 的一个 * 弱斂子列的存在。

在 Hilbert 空間中，弱斂与按范数收斂有着比較簡單的关系，即为了元列 (x_n) 按范数斂于 x_0，必須且只須 (x_n) 弱斂于 x_0 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x_0\|$。事实上，

$$\|x_n-x_0\|^2=(x_n-x_0,\ x_n-x_0)=\|x_n\|^2-(x_n,\ x_0)-(x_0,\ x_n)+\|x_0\|^2,$$

从而上述結果容易推出。

例 6.（机械求积公式的收斂）：設 $P(t)>0$，$x(t)$ 是連續函数。設有一如下形式的机械求积公式①：

$$\int_0^1 p(t)x(t)dt \cong \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)}x(t_k^{(n)}),\ (0\leqslant t_1^{(n)}<t_2^{(n)}<\cdots<t_n^{(n)}\leqslant 1). \tag{12}$$

設这公式对于次数 $\leqslant n$ 的一切多項式是准确的。那末为了这近似过程收斂，換句話說，为了对于任意連續函数 $x(t)$。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)}x(t_k^{(n)})=\int_0^1 p(t)x(t)dt, \tag{13}$$

必須且只須存在一个与 n 無关的常数 M，使

$$\sum_{k=0}^{n}|A_k^{(n)}|\leqslant M\quad (n=1,2,\cdots). \tag{14}$$

这个結果的充分性首先由 B. A. Стеклов 証明，而必要性由 G. Pólya 証明②。这結果的証明由定理 6 直接得出。事实上，考察 (B) 型空間

① $\cong$ 表示近似地相等。

② 參看 И. П. Натансон [20]，стр. 621。

$C[0,1]$，一切多項式全体是 C 中稠集，这是熟知 Weierstrass 定理①的后果，既然当 $n\geqslant n_0$ 时，对于一切 n_0 次以下的多項式，(12)的兩側相等，所以(13)对于每个多項式 $x(t)$ 成立。(12)的左边可以看成是 C 上的有界綫性泛函数，它的范数是

$$\sum_{k=0}^{n}|A_k^{(n)}|,$$

从而上述結果是定理 6 的后果。

特别如在公式(12)中一切 $A_k^{(n)}\geqslant 0$，那末在(12)中令 $x(t)\equiv 1$，得

$$\sum_{k=0}^{n}|A_k^{(n)}|=\sum_{k=0}^{n}A_k^{(n)}=\int_0^1 p(t)dt.$$

是定数，从而上述定理中的条件(14)自然滿足。从而在这情形下(卽一切 $A_k^{(n)}\geqslant 0$)，(13)对于一切 $x(t)\in C$ 成立。

例 7. (Lagrange 插值公式的發散——Faber 定理)②对于 $[a,b]$ 中每个节点陣

$$(t_k^{(n)})\quad(1\leqslant k\leqslant n,\ n=1,2,\cdots),$$

必存在 $x\in C[a,b]$，使与节点 $(t_k^{(n)})$ 相应的 Lagrange 插值公式

$$L_n(x)(t)=\sum_{k=1}^{n}x(t_k^{(n)})l_k^{(n)}(t)$$

不一致收斂于 $x(t)$，这里

$$l_k^{(n)}(t)=\frac{\omega_n(t)}{\omega_n'(t_k^{(n)})(t-t_k^{(n)})}\quad \omega_n(t)=\prod_{k=1}^{n}(t-t_k^{(n)}).$$

事实上，依定理 4 只須証明由 $C[a,b]$ 到它自己之中的有界綫性算子 (L_n) 列的范数 $\|L_n\|$ 不一致有界。但已知

① 参看 И. П. Натансон，实变数函数論，第 4 章 § 5。

② 見 Натансон [20]。

$$\|L_n\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \sum_{k=1}^{n} |l_k^{(n)}(t)|.$$

并且可以証明上式右边大于①

$$\frac{\log n}{8\sqrt{\pi}},$$

从而依定理 4, $L_n x$ 不可能在 $C[a, b]$ 中对每个 x 收斂，这正是所要証的。

例 8. (Orlicz 关于特异积分的定理)②：設 $K_n(s, t)$ 在正方形 $a \leqslant s, t \leqslant b$ 中可測，并設存在常数 M，使对于一切 $n=1, 2, \cdots$ 及殆一切 $s \in [a, b]$

$$\int_a^b |K_n(s, t)| dt \leqslant M, \tag{15}$$

对于殆一切 $t \in [a, b]$,

$$\int_a^b |K_n(s, t)| ds \leqslant M. \tag{16}$$

那末对于每个 $x \in L^p[a, b]$，特异积分

$$T_n(x) = \int_a^b K_n(s, t) x(t) dt$$

对殆一切 s 存在，并且作为 s 的函数屬于 $L^p[a, b]$，如果还設 $T_n(x)$ 在 L^p 中一个稠集 D 上按 L^p 的范数收斂于 x，那末 $T_n(x)$ 对于每个 $x \in L^p$ 收斂于 x。

事实上，設 $p>1$ 二重积分

$$\int_a^b \int_a^b |K_n(s, t)| \, |x(t)|^p ds\, dt$$

① 見 Натансон [20] стр 512。

② 見 W. Orlicz [22]。

依条件(16)存在，并且其值不超过$M\|x\|^p$，从而对于殆一切s，依 Fubini 定理

$$\int_a^b |K_n(s,t)||x(t)|^p\,dt$$

存在。依 Hölder 不等式，設$\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}$，

$$\int_a^b |K_n(s,t)||x(t)|dt=\int_a^b |K_n(s,t)|^{1/p}|x(t)||K_n(s,t)|^{1/q}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\left[\int_a^b |K_n(s,t)||x(t)|^p\,dt\right]^{1/p}\left[\int_a^b |K_n(s,t)|\,dt\right]^{1/q}\leqslant$$

$$\leqslant M^{1/q}\left[\int_a^b |K_n(s,t)||x(t)|^p\,dt\right]^{1/p},$$

所以$\int_a^b |K_n(s,t)||x(t)|dt$存在，即$T_n(x)$对殆一切$s\in[a,b]$存在，并且是$L^p$中的函数。又不难看出

$$\int_a^b |(T_n(x))(s)|^p ds\leqslant M^{p/q}M\|x\|^p=M^p\|x\|^p.$$

所以

$$\|T_n\|\leqslant M.$$

依定理 6 及这里假定的条件，T_nx 对 L^p 中每个 x 按 L^p 的范数收斂于 x。

由本节的几个主要定理还可以推出几个所謂值域定理([30])。即在 Banach 空間的情形，有界綫性算子的值域与它的共軛算子是否具有有界逆的問題密切相关。

定理 7. 設T是由 Banach 空間E到 Banach 空間E_0中的有界綫性算子。为了$TE=E_0$，必須且只須T^*有有界逆$(T^*)^{-1}$。

証 1) **必要性**：設 $TE=E_0$。設 T^* 沒有有界逆，必存在一串元 (f_n), $f_n\in E_0^*$, 使 $\|f_n\|=1$ $(n=1,2,\cdots)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\|T^*f_n\|=0$。令

$$\|T^*f_n\|=\beta_n,\quad g_n=\frac{f_n}{\sqrt{\beta_n}+\frac{1}{n}},$$

那末
$$\lim_{n\to\infty}\|g_n\|=\infty,\ \lim_{n\to\infty}\|T^*g_n\|=\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n}{\sqrt{\beta_n}+\frac{1}{n}}=0. \qquad (*)$$

由于 $TE=E_0$, 对于每个 $y_0\in E_0$, 必存在一元 $x_0\in E$, 使 $y_0=Tx_0$, 于是

$$|g_n(y_0)|=|(T^*g_n)x_0|\leqslant\|x_0\|\|T^*g_n\|,$$

从而
$$\lim_{n\to\infty}|g_n(y_0)|=0.$$

这既然对每个 $y_0\in E_0$ 成立，依共鳴定理，必然 $(\|g_n\|)$ 有界，与 $(*)$ 冲突。这就是說，必存在正数 α, 使

$$\|f\|=1,\ f\in E_0^*\Longrightarrow\|T^*f\|\geqslant\alpha,$$

即 $(T^*)^{-1}$ 有界。

2) **充分性**：設 $(T^*)^{-1}$ 是有界的，如果能証对某一 $\varepsilon>0$, $T\bar{S}(\Theta;\varepsilon)$ 在某一球 $\bar{S}_{E_0}\left(\Theta,\frac{1}{n}\right)$ 中稠密，那末，依 Banach 定理，可知 $T\bar{S}(\Theta;\varepsilon)$ 包含这个球，利用 T 的綫性，即可知 $TE=E_0$。姑設 $T\bar{S}(\Theta,\varepsilon)$ 在諸球 $\bar{S}_{E_0}\left(\Theta,\frac{1}{n}\right)$ 中都不稠。于是 E_0 中有这样的点列 (y_n) 存在，使 $y_n\in\!\!\!\!/\,\overline{T\bar{S}(\Theta,\varepsilon)}$ $(n=1,2,\cdots)$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\Theta$。$\overline{T\bar{S}(\Theta,\varepsilon)}$ 是閉凸集，从而存在 $f_n\in E_0^*(n=1,2,\cdots)$, 使

$$f_n(y_n)>\sup_{\|x\|\leqslant\varepsilon}f_n(Tx).$$

这样
$$\sup_{\|x\|\leqslant\varepsilon}|f_n(Tx)|=\varepsilon\|T^*f_n\|<\|y_n\|\|f_n\|,$$

即
$$\|T^*f_n\|<\frac{1}{\varepsilon}\|y_n\|\|f_n\|,$$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n\|=0$, 这与 $(T^*)^{-1}$ 的有界性矛盾。証完。

定理 8′. 設 T 是由 Banach 空間 E 到 Banach 空間 E_0 中的綫性有界算子。为了 $T^*E_0^*=E^*$, 必須且只須 T 具有有界逆算子。

証　必要性: 設存在一列元 $x_n\in E\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$, $\|x_n\|=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\|Tx_n\|=0$。設 $\|Tx_n\|=\beta_n$, 令

$$z_n=\frac{x_n}{\sqrt{\beta_n}+\frac{1}{n}},$$

那末 $\lim\limits_{n\to\infty}\|z_n\|=\infty$, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\|Tz_n\|=\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n}{\sqrt{\beta_n}+\frac{1}{n}}=0.$$

假如对于每个 $g\in E^*$, 存在 $f\in E_0^*$, 使 $T^*f=g$, 那末

$$0=\lim_{n\to\infty}f(Tz_n)=\lim_{n\to\infty}g(z_n).$$

这既然对于每个 $g\in E^*$ 成立, 依共鳴定理, $(\|z_n\|)$ 有界, 这与上面矛盾, 証完。

充分性: 設 $\overset{-1}{T}$ 有界, 設 $g\in E^*$。

$$g(\overset{-1}{T}y)\equiv f(y)\quad(y\in TE),$$

于是 f 是綫性泛函数, 定义在 TE 上, 并且因

$$\|f(y)\|\leqslant\|g\|\|\overset{-1}{T}y\|\leqslant\|g\|\|\overset{-1}{T}\|\|y\|,$$

$f\in(TE)^*$。按 Hahn-Banach 定理, f 可以延拓成 E_0^* 中的元(仍表示成 f)。那末

$$f(Tx)=g(\overset{-1}{T}Tx)=g(x)\quad(x\in E),$$

从而

$$T^*f=g,$$

即 $T^*E_0^*=E^*$。

由以上两个定理并利用 Banach 定理立刻得出下列系:

系: 設 T 是由 Banach 空間 E 到 Banach 空間 E_0 中的有界綫性算子, 下列四个条件是相互等价的:

1) T 把 E 一对一地映到 E_0 之上；

2) T^* 把 E_0^* 一对一地映到 E 之上；

3) T 与 T^* 各有有界逆 $\overset{-1}{T}$ 与 $\overset{-1}{T}{}^*$；

4) $TE=E_0$ 且 $T^*E_0^*=E^*$。

定理 9. 設 T 是由 Banach 空間 E 到 Banach 空間 E_0 中的有界綫性算子。令

$$\mathfrak{N}(T)\equiv\{x\,|\,x\in E,\ Tx=\Theta\},\quad \mathfrak{N}(T^*)\equiv\{f\,|\,f\in E_0^*,\ T^*f=\Theta\}$$

各表示 T 与 T^* 的零点集。令

$$\mathfrak{N}(T)^{\perp}\equiv\{g\,|\,g\in E^*,\quad x\in\mathfrak{N}(T)\Longrightarrow g(x)=0\},$$

$$\mathfrak{N}(T^*)^{\perp}\equiv\{y\,|\,y\in E_0,\quad f\in\mathfrak{N}(T^*)\Longrightarrow f(y)=0\}.$$

那末

1) $TE=E_0\Longrightarrow T^*E_0^*=\mathfrak{N}(T)^{\perp}$；

2) $T^*E_0^*=E^*\Longrightarrow TE=\mathfrak{N}(T^*)^{\perp}$。

証: 1)設 $f\in T^*E_0^*$, 那末 $\exists g\in E_0^*$, 使 $f=T^*g$, 从而

$$x\in\mathfrak{N}(T)\Longrightarrow f(x)=(T^*g)(x)=g(Tx)=0,$$

即 $f\in\mathfrak{N}(T)^{\perp}$。反之，設 $g\in E^*$, 并且 $x\in\mathfrak{N}(T)\Longrightarrow g(x)=0$。依假定 $TE=E_0$, 对于任意 $y\in E_0$, 必存在 $x\in E$, 使 $y=Tx$。令

$$f(y)=g(x),$$

那末因 $Tx=Tx'\Longrightarrow x-x'\in\mathfrak{N}(T)\Longrightarrow g(x)=g(x')$, 所以 f 是 E_0 上一意决定的綫性泛函数。依假定，利用 Banach 定理，T 是开映象，从而当 $y_n\in E_0$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\Theta$ 时，对于任意 $\varepsilon>0$ 可取正数 $\eta(\varepsilon)$, 使 $\bar{S}_{E_0}(\Theta;\eta(\varepsilon))\subset T\bar{S}(\Theta;\varepsilon)$，于是取 $n(\varepsilon)$, 使

$$n\geqslant n(\varepsilon)\Longrightarrow\|y_n\|<\eta(\varepsilon),$$

便得 $x_n\in E$, 使 $Tx_n=y_n$, 而

$$n\geqslant n(\varepsilon)\Longrightarrow\|x_n\|\leqslant\varepsilon,$$

即 $\lim\|x_n\|=0$。于是 f 是連續的。但上面 $y=Tx$, 可知 $f\in E_0^*$, 而 $g=T^*f$。所以 $T^*E_0^*=\mathfrak{N}(T)^{\perp}$。

2) 仿 1) 的証，$TE\subset\mathfrak{N}(T^*)^\perp$ 也是明显的。設 $y_0\in\mathfrak{N}(T^*)^\perp$。依假定与定理 2′, $\overset{-1}{T}$ 是有界的。从而 TE 是 E_0 中的閉集，因为如果 $y_n=Tx_n$ $(n=1, 2, \cdots)$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y$, 那末

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\overset{-1}{T}y_n=\overset{-1}{T}y,$$

所以 $y=T(\overset{-1}{T}y)\in TE$。因此，如果 $y_0\notin TE$, 依 Hahn-Banach 定理必存在 $f_0\in E_0^*$, 使

$$f_0(Tx)=0\ \ (x\in E),\ \ f_0(y_0)=1.$$

但 $$f_0(Tx)=0(x\in E)\Longrightarrow f_0\in\mathfrak{N}(T^*),$$

而 $f_0(y_0)=1$, 与 $y_0\in\mathfrak{N}(T^*)^\perp$ 矛盾。由此可知 $\mathfrak{N}(T^*)^\perp\subset TE$, 証完。

为了后几节的应用，在这里証明几个关于弱斂的結果。

定理 10. (**Pettis**): 如果 Banach 空間 E 是自反的，那末 E 的任意閉綫性子空間 E_0 也是自反的。

証 E 上的有界綫性泛函数 $f(x)$ 限制在 E_0 上也是 E_0 上的有界綫性泛函数 φ, 但这个 E_0 上的泛函数 φ 的范数不超过 $\|f\|$。于是 $f\to\varphi$ 是由 E^* 到 E_0^* 中的有界綫性算子，表示成 T: $Tf=\varphi$。T 的共軛算子是由 E_0^{**} 到 $E^{**}=E$ (依假定)中的有界綫性算子: $T^*X_0=x_0\in E$, 从而对于 $f\in E^*$,

$$f(x_0)=(T^*X_0)(f)=X_0(Tf)=X_0(\varphi). \tag{17}$$

但依 Hahn-Banach 定理，对任意 $\varphi\in E_0^*$, 必至少存在一个 $f\in E^*$, 使 $Tf=\varphi$, 从而对每个 $\varphi\in E_0^*$, $\exists f\in E^*$, 使

$$X_0(\varphi)=f(x_0)$$

成立，而如果能証上述的 $x_0\in E_0$, 那末 $f(x_0)=\varphi(X_0)$, 从而 E_0 的自反性得証。为了証明这点，姑設 $x_0\in E\setminus E_0$, 那末必存在 $f_0\in E^*$, 使 $f_0(x_0)\neq 0$, 但 $x\in E_0\Longrightarrow f_0(x)=0$。这就是說，$f_0$ 作为 E^* 中的元，$f_0\neq\Theta$, 而如令 $\varphi_0=Tf_0$, 那末 φ_0 作为 E_0^* 中的元是 Θ, 从而 $\varphi_0(x_0)=0$, $X_0(\varphi_0)=0$, 但 $f_0(x_0)\neq 0$, 与上面的等式(17)矛盾，証完。

定理 11. (**Banach**)：如果 Banach 空間 E 的共軛空間 E^* 是可分的，那末 E 也是可分的。

証 既然 E^* 是可分的，E^* 的單位球表面 $\{f \mid \|f\|=1, f\in E^*\}$ 中有一可數稠集 $\{f_n\}(n=1, 2, \cdots)$。既然 $\|f_n\|=1$，可选 $x_n\in E$，使 $\|x_n\|=1$ 且 $|f_n(x_n)|>\frac{1}{2}$。$\{x_n\}$ 張成一个閉可分綫性子空間 E_0。我們將証明 $E=E_0$。

如果 $E\supsetneqq E_0$，那末必存在 $f_0\in E^*$ 使 $\|f_0\|=1$，而 $x\in E_0 \Longrightarrow f_0(x)=0$。令 $f_n'=f_n-f_0$，則

$$\|f_n'\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|f_n'(x)|\geqslant|f_n'(x_n)|=$$

$$=|f_n(x_n)-f_0(x_n)|=|f_n(x_n)|>\frac{1}{2}.$$

既然 $\|f_0\|=1$，而上式对于一切 n 成立。这与 $\{f_n\}$ 在單位球表面上稠的假定矛盾，証完。

定理 12. 自反 Banach 空間 E 的單位球 $S=\{x \mid x\in E, \|x\|\leqslant 1\}$ 是弱列紧的，即对于 S 中任意点列 (x_n)，必可抽出一个子列 (x_n') 弱斂于 E 中一个点。

証(**角谷靜夫**)：取 E 中一个点列 (x_n)，$\|x_n\|\leqslant 1(n=1, 2, \cdots)$。$(x_n)$ 張成一个可分閉綫性子空間 E_0，依定理 7，E_0 是自反的，即 $E_0=(E_0^*)^*$，从而依定理 10，E_0^* 也是可分的。对于一切 $f\in E_0^*$，令

$$X_n(f)=f(x_n),$$

那末 $X_n\in E_0^{**}$ 并且 $\|X_n\|\leqslant 1$。既然 E_0^* 可分，在前面例 5 中曾指出 $(E_0^*)^*$ 的單位球必是 $*$ 弱列紧的，即 (X_n) 含一子列 (X_n')，使对于每个 $\varphi\in E_0^*$，

$$\lim_{n'\to\infty} X_n'(\varphi)=X_0(\varphi)\quad (x_0\in E_0^{**}=E_0).$$

这就是說可以取一 $x_0\in E_0$，使对于每个 $\varphi\in E_0^*$，

$$\lim_{n'\to\infty}\varphi(x_n')=\varphi(x_0).$$

既然每个 $f\in E^*$ 限制在 E_0 上时成为 E_0^* 中的元，所以对于每个 $f\in E^*$，

$$\lim_{n'\to\infty} f(x_{n'})=f(x_0),$$

即 $(x_{n'})$ 弱斂于 x_0。

定理 13. 可分賦范綫性空間 E 的共軛空間 E^* 中的單位球 $\Sigma=\{f\,|\,f\in E^*, \|f\|\leqslant 1\}$ 是 * 弱可分的，即存在可数集 $\Delta\subset E^*$，使对每个 $f_0\in E^*$，$\exists f_n\in\Delta$，$f_n\to f_0$（* 弱）。

証　取 E 的稠集 (x_n)，对 $f\in\Sigma$，$f\to\varphi_n(f)=(f(x_1),\cdots,f(x_n))$ 可以看作是由 Σ 到 l_n^2 中的算子。因 l_n^2 可分，可取 Σ 中的点列 $(f_{n,m})(m=1,2,\cdots)$，使 $\varphi_n(f_{n,m})\ (m=1,2,\cdots)$ 在 Σ 的 φ_n 一象 $\varphi_n(\Sigma)$ 中稠，令 $\Delta=(f_{n,m})\ (n,m=1,2,\cdots)$，考任意 $f_0\in\Sigma$，依假定，存在 (f_{n,m_n})，使 $|f_{n,m_n}(x_i)-f_0(x_i)|<\frac{1}{n}(1\leqslant i\leqslant n)$。所以

$$\lim_{n\to\infty} f_{n,m_n}(x_i)=f_0(x_i)\quad(i=1,2,\cdots),$$

而因 (x_i) 在 E 中稠，且 $\|f_{n,m}\|\leqslant 1$，所以 $f_{n,m_n}\to f_0$（* 弱），証完。

習題五

1. 在 $L^p(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ 中 $(1<p<\infty)$，求証为了点列 (x_n) 按范数收斂于 x_0，必須且只須 (x_n) 弱斂于 x_0 并且

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x_0\|.$$

2. 求証在 l^1 中，强極限与弱極限兩概念是相同的。

3. 在綫性賦范空間中，为了集 M 是列緊的、必須且只須每个弱斂于 0 的綫性泛函数列在 M 上一致收斂于 0（Гельфанд）。

4. 求証为了賦范綫性空間是局部緊的（即从任意一列滿足 $\|x_n\|\leqslant 1$ 的元列 (x_n) 中必可選出一个按范数收斂的子列来），必須且只須空間是有穷維的。

提示：充分性——用 Bolzano-Weierstrass 定理。必要性：求証对每个 $\varepsilon>0$，存在 E 中一个有穷維綫性子空間 H，使單位球 $S=\{x\,|\,x\in E, \|x\|<1\}$ 中每点对 H 的距离 $\leqslant\varepsilon$，然后証：如 $\varepsilon<|\tau_0|$，τ_0 是滿足 $0<|\tau_0|<1$ 的数，而如 $E\neq H$，必然存在 $x\in S$，使 $\inf_{y\in H}\|x-y\|\geqslant|\tau_0|$，由此导出矛盾。

5. 設 (x_n) 是 Banach 空間 E 中一串元。如果对于每个 $f\in E^*$，

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|$$

是收斂級数，那末必存在正数 μ，使对于每个 $f \in E^*$，

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| \leqslant \mu \|f\|. \qquad \text{(Гельфанд)}.$$

6. 为了 Banach 空間 E 中元列 (x_n) 滿足下列条件：对于每个 $f \in E^*$，$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|$ 收斂，必須且只須存在正数 μ，使对于任意自然数 n 及任意 $\varepsilon_i = \pm 1$，

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \right\| \leqslant \mu. \qquad \text{(Гельфанд)}.$$

7. 求証習題 6 中的条件等价于下列条件：存在正数 μ，使对于任意一串自然数 $n_1 < < n_2 < n_3 < \cdots$，

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} x_{n_i} \right\| \leqslant \mu \quad (\text{每个 } k) \qquad \text{(Гельфанд)}.$$

8. 为了在 Banach 空間 E 的共軛空間 E^* 中的元列 (f_n) 使級数 $\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)|$ 对于每个 $x \in E$ 收斂，必須且只須对于每个 $F \in E^{**}$，

$$\sum_{i=1}^{\infty} |F(f_i)|$$

收斂(Гельфанд)。

9. 設 $E E_1$ 是賦范綫性空間，T 是由 E 到 E_1 中的有界綫性算子，那末如果 $x_n \in E$ 而 (x_n) 在 E 中弱斂，(Tx_n) 在 E_1 中也必弱斂。

10. 定义在数直綫的閉区間 $[a, b]$ 上并在 Banach 空間 E 中取値的函数 $x(t)$ 叫做囿变的，是指对于任意 $f \in E^*$，$f(x(t))$ 是 t 的平常囿变函数、求証、如果 $x(t)$ 是 $[a, b]$ 上的囿变函数，那末必存在常数 μ，使对于每个 $f \in E^*$，

$$\underset{a \leqslant t \leqslant b}{\operatorname{var}}\ f(x(t)) \leqslant \mu \|f\|. \qquad \text{(Гельфанд)}.$$

11. 定义在数直綫的閉区間 $[a, b]$ 上的并在 Banach 空間上取値的函数 $x(t)$ 叫做有和函数，是指对于每个 $f \in E^*$，$f(x(t)) \in L^1[a, b]$。求証。如果 $x(t)$ 是有和函数，那末必存在常数 μ，使对于每个 $f \in E^*$，

$$\int_a^b |f(x(t))|\, dt \leqslant \mu \|f\|. \qquad \text{(Гельфанд)}.$$

12. 設 $(t_k^{(n)})$ $(1 \leqslant k \leqslant n,\ n = 1, 2, \cdots)$ 是数直綫 $[a, b]$ 中的节点陣。設 $\varphi_k^{(n)}(t)(1 \leqslant$

$\leqslant k\leqslant n, n=1,2,\cdots$) 是 $[a,b]$ 上連續函数。令

$$\lambda_n=\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\sum_{k=1}^{n}|\varphi_k^{(n)}(t)|.$$

为了对于每个 $x\in C[a,b]$,

$$\Phi_n(x)(t)\equiv\sum_{k=1}^{n}x(t_k^{(n)})\varphi_k^{(n)}(t)$$

在 $[a,b]$ 上一致收斂于 $x(t)$, 必須且只須对于每个多項式 $z(t)$, $\Phi_n(z)\to z$ 在 $C[a,b]$ 中成立,并且存在常数 μ,使对于一切 n, $\lambda_n\leqslant\mu$。

13. 令
$$t_k^{(n)}=\frac{2k\pi}{2n+1}\quad(0\leqslant k\leqslant n)$$

$$T_n(x)(t)=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}x(t_k^{(n)})\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-t_k^{(n)})}{\sin\frac{t-t_k^{(n)}}{2}},$$

$$U_n(x)(t)=\frac{1}{2}\left[T_n(x)\left(t+\frac{\pi}{2n+1}\right)+T_n(x)\left(t-\frac{\pi}{2n+1}\right)\right],$$

那末对于每个 $x\in C_{2\pi}$, $U_n(x)(t)$ 在数直綫上一致收斂于 $x(t)$。

提示: 三角多项式全体在 $C_{2\pi}$ 中成为稠集(Натансон 实变数函数論第 4 章)。

又注意[1]
$$\|U_n\|\leqslant(2\pi+4\pi^2)\ (一切\ n)$$

14. 設 $p(t)$ 是 $[a,b]$ 上正值連續函数, $\{\omega_n(t)\}$ 是在 $L_p^2[a,b]$ [即使 $\|x\|^2=\int_a^b p(t)|x(t)|^2dt<+\infty$ 的一切可测函数 $x(t)$ 全体按范数 $\|x\|$ 組成的 Hilbert 空間] 中把 $1, t, t^2,\cdots$ 按 E. Schmidt 程序直交化而得出的直交多項式組。設 $t_1^{(n)},\cdots,t_n^{(n)}$ 是 $\omega_n(t)$ 的零点,按由小到大的序次排列。設 $L_n(x)(t)$ 是按节点 $(t_k^{(n)})$ 所作的 Lagrange 插值多項式:

$$L_n(x)(t)=\sum_{k=1}^{n}x(t_k^{(n)})l_k^{(n)}(t),$$

这里
$$l_k^{(n)}(t)=\frac{\omega_n(t)}{\omega_n'(t_k^{(n)})(t-t_k^{(n)})}$$

那末对于任意 $x\in C[a,b]$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b p(t)|L_n(x)(t)-x(t)|^2dt=0.$$[2]

---

[1] 見 Натансон[20], стр. 566—570]。

[2] 見 Натансон[20], стр. 547, 548 的輔定理。

15. 設 $x(t)\in C_{2\pi}$, 而 $S_n(x)(t)$ 表示 $x(t)$ 的 Fourier 級数的部分和,令

$$\sigma_n(x)(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k(t).$$

求証 $\sigma_n(x)(t)$ 在全数直棧上一致收斂于 $x(t)$,(Fejer)①

16. 給共鳴定理一个直接証明(只論可数多个算子的情形)。

提示: 令 $F_i=\{x\mid x\in E,\ \|T_n(x)\|\leq i,\ n=1,2,\cdots\}$, 那末 F_i 是閉集,并且整个空間 $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$。利用"綱",推理完成定理的証明。[Kaczmarz und Steinhaus]。

17. 在 $l^p(1<p<\infty)$ 中,为了 $x_n=(\xi_k^{(n)})$ 弱斂于 $x_0=(\xi_k)$, 必須且只須($\|x_n\|$)是有界数列且当 $n\to\infty$ 时对于每个 k,

$$\xi_k^{(n)}\longrightarrow\xi_k.$$

在 $L^p[0,1](1<p<\infty)$ 中, 为了 $(x_n(t))$ 弱斂于 $x_0(t)$, 必須且只須 ($\|x_n\|$) 有界而且当 $n\to\infty$ 时,对于每个 $\tau\in[0,1]$,

$$\int_0^\tau x_n(t)dt\longrightarrow\int_0^\tau x_0(t)dt\ (n\to\infty)$$

参 考 文 献

[1] Banach, S.: Sur les fonctionnelles linéaires, II, Studis math. 1 (1929), 223-239.

[2[Banach, S. et Steinhaus, H.: Sur le principe de la condensation de singularite's, Fund math. 9 (1927), 50—51.

[3] du Bois Reymond, P.: Untersuchungen, über die Konvergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellung formeln, Abh. Akad. München 12 (1876), 1—103.

[4] Fejér, L.: Lebesguesehen Konstanten und divergente Fourierreihen, J. f. reiné u. angew math. 138 (1910) 22—53.

又 Sur les singularities des séries de Fourier de fonctions continues, Ann. E'c. norm. sup 118 (1911) 63—103.

[5] Fichera, G.: Lezioni sulle trasformazione lineari. tome 1.

[6] 深宮政范 (Fukamiya, M.): Banach の一定理に就いて位相数学 3:1 (1940), 63—64.

[7] Gál, I. S.: Sur la convergence d'interpilations linéaires, I.

① 見 Натансон [20], стр. 566 -570, 又 508--9。

Fouctierss borness, comptes Rendus Paris 230 (1950), 1374--6.

[8] Gál, I. S.: Sur la méthode de résonance et un théorénal concernant les espaces de type (B) Ann Inst. Fourier 3 (1951), 23—30.

[9] Gál I. S.: On sequences of operations in complete Vector spaces Ames. Math. Monthly 60 (1953), 527—538.

[10] Gál, I. S.: The principle of condensation of singularities Duke math. J. 20 (1953) 27—35.

[11] Гельфанд И. М.: Sur un lemme de la théorie des espaces linesires, Зап. Матем. т-ва (4) 13 (1936), 35—40.

[12] Grün Wald, G.: über Divergenz erscheinung der Lagrangeschen Interpolations polynome stetigen Funktionen, Ann. Math. 37 (1936). 908—918.

[13] Hahn H.: über Folgen linearer Operationen, Monatshefte f. math, u. Phys 32 (1922), 3—88.

[14] Hankel, H.: Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen. math. Ann. 20 (1992), 63—112.

[15] Kaczmarz, S.: und Stainhaus, H.: Theorie der Orthogonalreihen.

[16] Канторович, Л. В. 泛函分析与应用数学，数学进展第一卷（1955）第4期。

[17] Lebesgue, H.: Sur les intégrales singulières, Ann. Toulouse 1 (1909), 25—117.

[18] Lorentz, G. G.: Bernstein polynomials, 1953.

[19] Mazur, S. Studia Math. 2 (1930), 40.

[20] Натансон, И. П.: Конструктивная теория функций, 1949.

[21] Orlicz, W.: Über Folgen linearen Operationen, die von einem Parameter abhaügen, Studia math. 5 (1934), 160—170.

[22] Orlicz, W.: Ein Satz über die Erweiterung von linearen Operationen, Studia math. 5 (1934) 127—140.

[23] Picone, M.: Fondamenti di Analisi fanzionale lineare, Corsi dell Istituto Naz. di Alta Matem. 1943.

[24] Pólya, G.: über die Konvërganz von Quadratus verfahren, math. Zeitschr 37 (1933), 264—286.

[25] Riemann, B.: Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonemetrische Reihe (Habilitationsschrift 1854) (全集俄文本 1948, 225—262 頁)。

[26] Schur, I.: Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen, J. f. math. 151 (1920), 79—111.

[27] Steinhaus, H.: quelques remarques sur la généralisation de la notion de limite, Prace matematyczne—Fizyczne. 22 (1911), 121—134.

[28] Szauder, J.: über die Umkehrung linearer stetiger Funktional operationen, Studia math. 2 (1930). 1—6.

[29] Toeplitz, O.: über allgemeine lineare Mittelbildungen, prace matematyczne-Fizyczne 22 (1911). 113—119.

[30] Hausdorff, F., Crelles, J. 167 (1932), 294.

[31] 吉田耕作，位相解析，I.

§6. 抽象函数

前面已經提到过作为算子的特例的抽象函数，即定义在实数直綫或复数平面的一个子集并在某赋准范綫性空間中取值的算子，本节討論抽象函数的一些簡單性質，也就是說，这种抽象函数的分析性質——連續性、微分、积分及其他。

定义 1. 定义在数域K中某个区間G上并在赋准范綫性空間E中取值的抽象函数$x(t)$叫做在t_0連續，是指映象$t_0\longrightarrow x(t_0)$是連續的，換句話說，是指

$$t_n\to t_0,\ t_n,\ t_0\in G\Longrightarrow\|x(t_n)-x(t_0)\|\to 0(n\to\infty).$$

如果在任意$t\in G$, $x(t)$都連續，則称$x(t)$在G上为連續。

注 仿乎常的数学分析，可以証明，如果$K=R$而G是R中一个有穷閉区間$[\alpha, \beta]$，或如果K是复数域而G是K中一个有界閉集，那末当$x(t)$是連續的函数时，它必一致連續，这就是說，对于每个$\varepsilon>0$，必存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使

$$t_1, t_2 \in G,\ |t_1 - t_2| < \delta \Longrightarrow \|x(t_1) - x(t_2)\| < \varepsilon.$$

例 1. 前面已經說过，一个随机过程 $x(t, \omega)$ 可以看成是定义在实数区間 $[\alpha, \beta]$ 上并在 $S(\Omega, \beta, P)[P(\Omega)=1]$ 中取值的抽象函数。随机过程叫做按概率連續，是指对于每个 $t \in [\alpha, \beta]$，

$$\lim_{\tau \to t} P(\omega \mid |x(\tau, \omega) - x(t, \omega)| > \varepsilon) = 0,$$

不难驗証，这等价于下列事实。卽抽象函数 $x(t) = x(t, \omega)$ 是在 $S(\Omega, \beta, P)$ 中取值的連續函数。这意味着：所謂随机过程 $x(t)$ 是連續的，是指只要时間变化足够小，$x(t)$ 的变化超过某定量的概率是任意小的。

例 2. 在平稳随机过程理論中，常考具有穷的兩阶矩量，卽鑒于 $P(\Omega) = 1 < +\infty$，設

$$M(|x(t)|^2) = \int_\Omega |x(t, \omega)|^2 P(d\omega) < +\infty.$$

这时，随机过程 $x(t, \omega)$ 可以看作是在 $L^2(\Omega, \beta, P)$ 中取值的抽象函数。这时，随机过程叫做按 M^2 連續，是指它是在 L^2 中取值的連續函数。可以看出，如果随机过程 $x(t)$ 按 M^2 連續，那末它也必按概率連續，这是因为函数列的平方平均收斂蘊涵按測度收斂。依照概率論的术語，定义随机变量 $x(t, \omega)$ 的期望值为

$$M(x(t)) = \int_\Omega x(t, \omega) P(d\omega),$$

其方差为
$$D(x(t)) = M(x(t) - M(x(t)))^2,$$

定义随机过程 $x(t)$ 的相关函数

$$R(u) = \frac{M\{[x(t+u) - Mx(t+u)][x(t) - Mx(t)]\}}{\sqrt{D(x(t))D(x(t+u))}}.$$

对于弱平稳机随机过程，卽設

$$M(x(t+u)) = M(x(t)) = M(x(0))$$

$$M(x(t)x(u)) = M(x(t-u)x(0)) = M\{x(u)x(0)\}$$

$R(u)$ 与 t 的值無关，特别設 $M(x(t)) = 0,\ D(x(t)) = 1.$

那末 $$R(u)=M\{x(u)x(0)\} \text{ 及 } Mx^2(0)=1$$

所以
$$\begin{aligned}M(x(t+u)-x(t))^2&=M[x^2(t+u)-2x(t+u)x(t)+x^2(t)]=\\&=Mx^2(t+u)-2Mx(t+u)x(t)+Mx^2(t))=\\&=1-2R(u)+1=2-2R(u)=2(1-R(u)).\end{aligned}$$

而
$$\begin{aligned}|R(u+\Delta u)-R(u))|&=|M(x(0)x(u+\Delta u)-M(x(0)x(u))|=\\&=|M\{x(0)[x(u+\Delta u)-x(u)]\}|\leqslant\\&\leqslant\sqrt{M(x(0)^2)M[(x(u+\Delta u)-x(u)^2]}=\\&=\sqrt{M[(x(u+\Delta u)-x(u)^2]}=\sqrt{2[1-R(\Delta u)]}\text{①},\end{aligned}$$

从而为了弱平稳随机过程 $x(t)$ 是按 M^2 連續，必須且只須它的相关函数 $R(u)$ 連續，也必須且只須 $R(u)$ 滿足条件 $\lim\limits_{t\to 0} R(t)=1$。为此通常称滿足这最后一条件（$M[x(t+u)-x(t)]^2\to 0$）的平稳随机过程 $x(t)$ 叫做連續的。

定义 2. 定义在数域 K 中的区域 G 上并在賦准范綫性空間 E 中取值的抽象函数 $x(t)$ 叫做在 $t_0\in G$ 处强可导（或强可微分）是指存在 $x_0\in E$, 使

$$\lim_{\tau\to 0}\left\|\frac{x(t_0+\tau)-x(t_0)}{\tau}-x_0\right\|=0.$$

这时 x_0 叫做 $x(t)$ 在 t_0 处的强导数，表示成 $x_0=x'(t_0)$, $x(t)$ 叫做在 t_0 处弱可异（或弱可微分）是指存在 $x_0\in E$, 使对于每个 $f\in E^*$[即 E 的共軛空間],

$$\lim_{\tau\to 0} f\left(\frac{x(t_0+\tau)-x(t_0)}{\tau}\right)=f(x_0)$$

这时 x_0 叫做 $x(t)$ 在 $t=t_0$ 处的弱导数。 函数 $x(t)$ 叫做在全区域 G 中强或弱可导，是指它在 G 中的每点处各相应的是强或弱可导。

注 1 不难看出，如果 x_0 是 $x(t)$ 在 $t=t_0$ 处的强导数它也必是

① 这里引用 Cauchy—Буняковский—Schwarz 不等式。

$x(t)$ 在 t_0 处的弱导数，但逆命題不必成立①。

注 2) 若 $x(t)$ 为强可导，則 $x(t)$ 为連續的，这是很显然的事。

例 1. 在随机过程中的研究中，常考察过程 $x(t,\omega)$ 的按概率收斂的导数。即满足

$$\lim_{h\to 0} P\left(\left\{\omega \left| \frac{x(t+h,\omega)-x(t,\omega)}{h} - Y \right| > \varepsilon\right\}\right) = 0$$

的元 $Y\in S(\Omega,\mathfrak{B},P)(P(\Omega)=1)$ 叫做过程 $x(t,\omega)$ 在 t 处的按概率收斂的导数。

例 2. 在随机过程理論中，也常考察具有穷 P 阶矩量

$$M(|x(t)|^p) < +\infty$$

的过程，而定义按 p 次平均收斂的导数 Y 为满足

$$M\left(\left|\frac{x(t+h)-x(t)}{h} - Y\right|^p\right) \to 0 \quad (h\to 0)$$

的元 $Y\in L^p(\Omega,\mathfrak{B},P)$。

几何解釋：定义在閉区間 $[\alpha,\beta]$ 上幷在賦准范空間 E 中取值的函数 $x(t)$ 可以看作是 E 中的一条曲綫，如果 $x(t)$ 在 $t=t_0$ 处有强导数，我們說曲綫在 $t=t_0$ 处有切綫，切綫方向由矢 $x'(t_0)$ 决定。特别如 E 表示平常 3 維欧几里得空間，那末这定义与平常微分几何中所用的相当。仿此，我們定义曲綫綫段 $x(t)(t\in[\alpha,\beta])$ 的長度为

$$\sup \sum_{i=1}^{n} \|x(t_i)-x(t_{i-1})\|,$$

如果这一上确界存在：这里上端是对 $[\alpha,\beta]$ 的一切有穷分割 $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=\beta$ 而取的。如果这上确界存在，曲綫 $x(t)$ 叫做可度長的。为了長度存在，仿平常欧几里得的情形必須引入圍变函数的概念。

定义 3. 定义在区間 $[\alpha,\beta]$ 上幷在賦准范綫性空間 E 中取值的抽象函数 $x(t)$ 叫做在 $[\alpha,\beta]$ 上圍变的，是指存在常数 μ，使对于 $[\alpha,\beta]$

① 例如見 Гельфанд [9]，第一篇 §9。

的每个分割 $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$。

$$\sum_{i=1}^{n}\|x(t_i)-x(t_{i-1})\|\leqslant\mu. \tag{1}$$

滿足(1)的最小正数 μ 叫做 $x(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的全变分表示成

$$\bigvee_{\alpha}^{\beta}x(t).$$

注 Гелафанд[3] 証明，自反空間中每个可度長曲綫必殆遍有切綫，換句話說，如果 E 是自反空間，囿变抽象函数必殆遍有强导数。这显然是实变数函数論中結果的自然推广①，但在一般(不自反的) Banach 空間中相应結果不成立即，囿变抽象函数可以在每点 t 处旣無强导数，又無弱导数 [見 Гелафанд[3]，第一篇的 §9]。这里不詳論了。

下面討論抽象函数的 Riemann 积分。

定义 4. 設 $x(t)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的抽象函数，在 Fréchet 空間 E 中取值，对 $[\alpha,\beta]$ 的有穷分割 $\mathscr{P}:\alpha=t_0<t_1\cdots<t_n=\beta$，作和

$$S_{\mathscr{P}}=\sum_{i=1}^{n-1}x(t_i)(t_{i+1}-t_i).$$

如果半序定向列$(S_{\mathscr{P}})$[$\mathscr{P}$ 按"細分"次序]收斂于 E 中一元 z，那末$x(t)$叫做在 $[\alpha,\beta]$ 上 Riemann 可积分的，而 z 叫做 $x(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的 Riemann 积分，表示作

$$z=\int_{\alpha}^{\beta}x(t)dx.$$

下面是关于連續抽象函数的 Riemann 积分的几个簡單結果，与平常数学分析中的結果类似。

---

① 例如見 И. П. Натансон 实变数函数論。

定理 1. 在有穷閉区間 $[\alpha,\beta]$ 上定义的在 Banach 空間 E 中取值的連續抽象函数 $x(t)$ 必在 $[\alpha,\beta]$ 上 Riemann 可积分。

証　取 $\varepsilon>0$，由于 $x(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上連續，故一致連續，可取 $\delta>0$，使

$$|t_1-t_2|<\delta,\ t_1,\ t_2\in[\alpha,\beta]\Longrightarrow\|x(t_1)-x(t_2)\|<\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}.$$

取分割 $\mathscr{P}_0=\mathscr{P}(\varepsilon):\alpha=t_0<t_1<\cdots t_n=\beta$ 使 $t_k-t_{k-1}<\delta(1\leqslant k\leqslant n)$。于是当取分割 $\mathscr{P}_1,\mathscr{P}_2\succ\mathscr{P}_0$ 时，不难看出

$$\|S_{\mathscr{P}_1}-S_{\mathscr{P}_2}\|\leqslant\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}(\beta-\alpha)=\varepsilon,$$

从而，$(S_{\mathscr{P}})$ 是基本定向列。由于已設 E 是完备的，可知 $(S_{\mathscr{P}})$ 在 E 中收斂于一元。

注　設 $x(t)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上 Riemann 可积分的抽象函数，在一 Banach 空間 E 中取值，如果 $\|x(t)\|$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上按 Riemann 可积分的平常函数，那末

$$\left\|\int_\alpha^\beta x(t)dt\right\|\leqslant\int_\alpha^\beta\|x(t)\|dt. \tag{2}$$

事实上，只須注意

$$\|S_{\mathscr{P}}\|=\left\|\sum_{i=0}^{n-1}x(t_i)(t_{i+1}-t_i)\right\|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\|x(t_i)\|(t_{i+1}-t_i),$$

从而对定向列 $(\mathscr{P})$ 取極限，就得出(2)来。又不难看出，如果 $x(t)$ 是 Riemann 可积分的抽象函数，而 $f\in E^*$，那末

$$f\left(\int_\alpha^\beta x(t)dt\right)=\int_\alpha^\beta f(x(t))dt.$$

这式右边是平常数値函数 $f(x(t))$ 的 Riemann 积分。

定理 2. 假如抽象函数 $x(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有关于 t 的連續强导函

数 $x'(t)$, 并設 $x(t)$ 的值属于一个 Banach 空間，那末

$$\int_{\alpha}^{\beta} x'(t)dt = x(\beta) - x(\alpha). \tag{3}$$

証 事实上，对于任意 $f \in E^*$,

$$f\left(\int_{\alpha}^{\beta} x'(t)dt\right) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x'(t))dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} f(x(t))dt =$$

$$= f(x(\beta)) - f(x(\alpha)).$$

最后等式乃是引用数学分析中的 Newton-Leibniz 公式而得的。这就是說，对于 E 中的元

$$z = \int_{\alpha}^{\beta} x'(t)dt - x(\beta) + x(\alpha),$$

$f(z) = 0$ 对于每个 $f \in E^*$ 成立，从而 $z = u$, 即(3)得証①。

在一些問題中，需要比上述 Riemann 积分更一般的 Lebesgue 积分，而为此，要考察"可測"抽象函数。例如在概率論中，我們有时要考虑在一 Banach 空間 E 中取值的随机变量 x, 而为了定义它的平均值，我們仿效 E 为有穷維空間的特例，即如 $x = (\xi, \cdots, \xi_n)$, 那末每个 ξ_i 是一个平常随机变量，而那时 x 的"平均矢"乃是一个式、它的第 i 坐标是

$$\mathfrak{M}(\xi_i) \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{4}$$

这里要求(4)中每个平均値存在，仿此，E. Mourier 定义在 Banach 空間 E 中取值的随机变量 x 的平均值，乃是 E 中一元，表为 $\mathfrak{M}(x)$, 満足

$$f(\mathfrak{M}(x)) = \mathfrak{M}(f(x)) \quad (f \in E^*). \tag{5}$$

这里要求(5)式右边的每个平常随机变量 $f(x)(f \in E^*)$ 的平均值存在。

① 如果 $\int_{\alpha}^{\beta} x'(t)dt$ 存在則 $x'(t)$ 为弱导数也成立。

这意味着对于每个 $f\in E^*$, $f(x)$ 是平常可测函数，而且它的 Lebesgue 积分 $\mathfrak{M}(f(x))$存在。与这适应的乃是"弱可测性"与 Гельфанд-Pettis 积分概念。 此外，我們也介紹一下"强可测性"与 Bochner 积分的概念。

定义 5. 在測度空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ 中定义幷在 Banach 空間 E 中取值的函数 $x(s)$ 叫做弱可测的，是指对于每 $f\in E^*$, $f(x(s))$是$(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ 上的平常数值可测函数。特别我們常考察 $\Omega=$ 实数直綫上的区間 $[a, b]$, μ 为 Lebesgue 测度的情形。

定义 6. 考察測度空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$。設 Ω 表示成为有穷多个互不相交的可测集 $A_1, \cdots, A_n$ 的幷集，而 $x(s)$ 在每个 A_i 上取常定值 $\in E$ (Banach 空間)，那末 $x(s)$ 叫做抽象阶段函数。$(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$上抽象函数 $x(s)$ 叫做强可测，是指存在一串在$(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$上在$E$中取值的阶段函数 $(x_n(s))$, 使对于殆一切 s,

$$x(s)=\lim_{n\to\infty} x_n(s).$$

注 由定义直接看出强可测抽象函数必是弱可测函数。逆命題只在一定条件下才成立。

定理 3 (**Pettis**) 为了測度空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ 上的抽象函数 $x(s)$是强可测的，必須且只須 $x(s)$ 是弱可测的且是可分值的，这里所謂 $x(s)$ 是可分值，乃是指存在 E 的一个可分閉綫性子空間 E_1 及 Ω 中可测子集 Ω_1 使 $\mu(\Omega\setminus\Omega_1)=0$, 而

$$s\in\Omega_1\Longrightarrow x(s)\in E_1.$$

証 1) **必要性**: 若 $x(s)$ 为强可测，則 $x(s)$ 为弱可测那是显然的了，現在只要証 $x(s)$ 可分值。

設 $x(s)$ 为强可测，从而存一串阶段函数 $\{x_n(s)\}$ 使对于殆一切 s,

$$x(s)=\lim_{n\to\infty} x_n(s) \qquad (\text{按}E\text{中范数收斂}), \tag{6}$$

于是对于一切 $n=1, 2, \cdots$, $\{x_n(s)\}$ 共在 E 中至多取可数多个不同值，

而这可数多个元在E中張成一个可分閉綫性子空間E_1。如Ω_1表Ω中使(6)成立的一切s, 那末依假定，

$$\mu(\Omega \setminus \Omega_1)=0,$$

并且$s\in\Omega_1 \Longrightarrow x(s)\in E_1$, 从而$x(s)$是可分值的。

2) **充分性:** 設$x(s)$是可分值弱可測抽象函数。無妨設E本身便是可分的 Banach 空間。我們首先証明$\|x(s)\|$是实值可測函数。依§5的定理，E^*中單位球$\Sigma=\{f \mid \|f\|\leqslant 1, f\in E^*\}$是$*$弱可分的，卽存在$E^*$中一个可数列$(f_i)$ $(i=1, 2, \cdots,)$, 使每个$f\in\Sigma$是(f_i)的一个子列的弱極限。对于任意实数α, 令

$$M=\{s \mid \|x(s)\|\leqslant\alpha\}, \quad M_f=\{s \mid |f(x(s))|\leqslant\alpha\}, f\in E^*。$$

那末

$$M\subset\bigcap_{f\in\Sigma} M_f,$$

因为如果$s\in M$, 那末

$$|f(x(s)|\leqslant\|f\|\|x(s)\|\leqslant\alpha_0, \quad (f\in\Sigma)$$

反之，如果s固定，$x(s)$是E中一个元，从而存在$f\in\Sigma$, 使(§3定理)

$$\|x(s)\|=|f(x(s)|.$$

于是

$$\bigcap_{f\in\Sigma} M_f\subset M.$$

故

$$M=\bigcap_{f\in\Sigma} M_f$$

現在我們来証明

$$M=\bigcap_{i=1}^{\infty} M_{f_i},$$

而依上述，为此，只須証明

$$\bigcap_{f\in\Sigma} M_f=\bigcap_{i=1}^{\infty} M_{f_i}. \tag{7}$$

但上式左边是右边的子集，这是明显的。反之，若 s 是右边的集中的一点，那末由于 (f_i) 在 Σ 中 * 弱稠，所以对于每个 $f\in\Sigma$，必存在 (f_i) 的一个子列 $(f_{i'})$，使

$$|f(x(s))|=\lim_{i\to\infty}|f_{i'}(x(s))|\leqslant\alpha,$$

从而(7)的右边也是左边的子集，而(7)得証。由假定，既然每个 $f(x(s))$ 是可測函数。所以 M_{f_i} 是可測集，从而 M 是可測集，即 $\|x(s)\|$ 是可测函数。

依假定，$x(s)$ 的值集合在可分空間 E 中。由可分性可知 E 可以被一組半徑 $<\frac{1}{n}$ 的开球列 $\{A_{in}\}(i=1,2,\cdots)$ 复盖。設 A_{in} 的中心是 x_{in}，依上述 $\|x(s)-x_{in}\|$ 是 s 的可測实值函数，于是

$$B_{in}=\{s\,|\,x(s)\in A_{in}\}$$

是可測集。但
$$\Omega=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_{in}.$$

今当
$$s\in B'_{in}\equiv B_{in}\diagdown\bigcup_{j=1}^{i-1}B_{jn}\ \text{时令}\ x_n(s)=x_{in},$$

那么由于
$$\bigcup_{i=1}^{\infty}B'_{in}=\Omega,\ \text{可知对于每个}\ s,$$

$$\|x(s)-x_n(s)\|<\frac{1}{n}. \tag{8}$$

既然 B_{in} 可测，B'_{in} 也可測，而 $x_n(s)$ 在 B'_{in} 上取定值，从而不难看出 $x_n(s)$ 是一串阶段函数的極限，即 $x_n(s)$ 是强可測的，由(8)可知 $x(s)$ 也是强可測的。

定义 7. 强可測函数 $x(s)$ 叫做按 Bochner 可积分是指 $\|x(s)\|$ 为 Lebesgue 可积分实值函数。

注 1: 依前定理，由 $x(s)$ 的强可測性可知 $\|x(s)\|$ 是可測的，从而上述定义是合理的。对于按 Bochner 可积分的抽象函数 $x(s)$，我們定

义它的 Bochner 积分如下$\left(\text{这种积分表示成}\int_\Omega x(s)\mu(ds)\right)$。

首先考察阶段函数 $x(s)$，設 Ω 分解成互不相交可测集 A_i 的并$(1\leqslant i\leqslant n)$：

$$\Omega=\bigcup_{i=1}^{n}A_i,$$

而在 A_i 上，$x(s)=d_i$。这时定义 Bochner 积分为

$$\int_\Omega x(s)\mu(ds)=\sum_{i=1}^{n}d_i\mu(A_i).$$

設 $x(s)$ 是一般按 Bochner 可积分的抽象函数，設 $x(s)$ 表示成一串阶段函数 $\{x_n(s)\}$ 的殆遍强極限。卽 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(s)=x(s)$。定义

$$y_n(s)=\begin{cases}x_n(s) & \text{如果 } \|x_n(s)\|\leqslant\|x(s)\|\left(1+\dfrac{1}{n}\right),\\ 0 & \text{如果 } \|x_n(s)\|>\|x(s)\|\left(1+\dfrac{1}{n}\right),\end{cases}$$

那末 $y_n(s)$ 是阶段函数，而且

$$\|y_n(s)\|\leqslant\|x(s)\|\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\|x(s)-y_n(s)\|=0\quad(\text{殆遍})。\quad(?)\tag{9}$$

旣然 $\|x(s)\|$ 是可积分的，对于任意 $\delta>0$，可取一可测集 A，使 $\mu(A)<<\infty$ 并且

$$\int_{\Omega\setminus A}\|x(s)\|\mu(ds)\leqslant\delta.$$

于是，因为 $y_n(s)$ 是阶段函数，

$$\left\|\int_{\Omega\setminus A}y_n(s)\mu(ds)\right\|\leqslant\int_{\Omega\setminus A}\|y_n(s)\|\mu(ds)\leqslant\int_{\Omega\setminus A}\|x(s)\|\cdot$$

$$\cdot\mu(ds)\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant\delta\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

因 $x(s)-y_n(s)$ 是强可測的，$\|x(s)-y_n(s)\|$ 必是可測的，从而由(9)及 $\mu(A)<\infty$ 可按 Егоров 定理取一可測集 $A_1\subset A$，使 $\mu(A\setminus A_1)<\delta$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\|x(s)-y_n(s)\|=0$$

一致成立，从而对于 A_1 中的 s，

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\|y_n(s)-y_m(s)\|=0$$

一致成立。于是

$$\left\|\int_{A_1}(y_n(s)-y_m(s))\mu(ds)\right\|\leqslant\int_{A_1}\|y_n(s)-y_m(s)\|\mu(ds)\to 0$$
$$(n,\ m\to\infty).$$

由于 E 的完备性，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{A_1}y_n(s)\mu(ds)=y_0\quad((y_0\in E))$

存在。既然

$$\int_{\Omega}y_n(s)\mu(ds)=\int_{\Omega\setminus A}y_n(s)\mu(ds)+\int_{A_1}y_n(s)\mu(ds)+\int_{A\setminus A_1}y_n(s)\mu(ds),$$

而右边第一項按范数 $<\delta\left(1+\frac{1}{n}\right)$，第二項当 $n\to\infty$ 时强收斂，第三項按范数

$$\leqslant\int_{A\setminus A_1}\|y_n(s)\|\mu(ds)\leqslant\int_{A\setminus A_1}\|x(s)\|\mu(ds)\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

从而由 $\|x(s)\|$ 之可积分性及 $\mu(A\setminus A_1)<\delta$，当取 δ 适当小时，前述的第三項按范数任意小。由于 $\delta>0$ 是任意的，可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}y_n(s)\mu(ds)(\text{强})$$

在 E 中存在，我們称这个元叫做 Bochner 积分

$$\int_{\Omega}x(s)\mu(ds)$$

的值記为 $\int_{\Omega} x(s)\mu(ds) = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} y_n(s)\mu(ds)$. 注意这样定义的 Bochner 积分的值是与上述的阶段函数列 $(y_n(s))$ 的特殊选择無关的。事实上，如果有另一串阶段函数 $(z_n(s))$ 使

$$\|z_n(s)\| \leqslant \|x(s)\|\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

且 $$\lim_{n\to\infty} \|x(s)-z_n(s)\| = 0 \quad (\text{殆遍})$$

那末不难看出(因 $\|x(s)\|$ 可积分)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} z_n(s)\mu(ds) = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} y_n(s)\mu(ds), \ (\text{强})$$

因为如把 $(y_n(s))$ 与 $(z_n(s))$ 并成一个列 $(w_n(s))$ (例如令 $w_{2n-1}(s) = y_n(s)$, $w_{2n}(s) = z_n(s)$ $(n = 1, 2, 3\cdots)$, 那末

$$\|w_n(s)\| \leqslant \|x(s)\|\left(1+\frac{1}{n}\right), \ \lim_{n\to\infty} \|x(s)-\omega_n(s)\| = 0 \ (\text{殆遍})$$

从而 $$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} w_n(s)\mu(ds) = w_0 \quad (\text{强})$$

在 E 中存在，而这个列 $\left(\int_{\Omega} w_n(s)\mu(ds)\right)$ 的两个子列

$$\left(\int_{\Omega} y_n(s)\mu(ds)\right), \ \left(\int_{\Omega} z_n(s)\mu(ds)\right)$$

必收斂于同值 w_0。即

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} y_n(s)\mu(ds) = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} z_n(s)\mu(ds) = w_0.$$

注1. 由上述 Bochner 积分的定义直接看出，如果 $x(s)$ 在 Ω 上按 Bochner 可积分，那末它在任意可測集 $A \supset \Omega$ 上也按 Bochner 可积分并且

$$\left\|\int_A x(s)\mu(ds)\right\| \leqslant \int_A \|x(s)\|\mu(ds).$$

由于 Lebesgue 积分的絕对連續性立刻得出 Bochner 不定积分的絕对連續性，卽对于任意 $\varepsilon>0$, 可以取 $\delta>0$, 使对于任意可測集 $A\subset\Omega$,

$$\mu(A)<\delta\Longrightarrow\left\|\int_A x(s)\mu(ds)\right\|\leqslant\varepsilon.$$

由定义不难看出不定积分

$$\int_A x(s)\mu(ds) \tag{10}$$

是$\mathfrak{B}$上的，在E上取值的加法函数：卽当

$$A_1, A_2, \cdots A_n\in\mathfrak{B},\ A_i\cap A_j=\phi\quad(i\neq j,\ i,\ j=1, 2, \cdots, n)$$

时，

$$\int_{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i} x(s)\mu(ds)=\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}x(s)\mu(ds).$$

(10)也是$\mathfrak{B}$上全加法的集函数，事实上，如果

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i,\ A_i\cap A_j=\phi\quad(i\neq j),\ \mu(A_i)<\infty\quad i, j=1, 2, \cdots$$

那末

$$\int_A x(s)\mu(ds)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}x(s)\mu(ds)\quad(\text{强})^{①}$$

这由不定积分的絕对連續性容易推出。

定理 4. 設T是由 Banach 空間E到 Banach 空間E_1中的有界線性算子，而$x(s)$是在E中取值的按 Bochner 可积分的函数，那末$Tx(s)$是在E_1中取值的按 Bochner 可积分的函数，并且对于任意 $A\in\Omega$,

$$\int_A (Tx(s))\mu(ds)=T\int_A x(s)\mu(ds).$$

① 以后沒有注明，就是强收斂。

証　按 Bochner 积分的定义，取在 E 中取值的一串阶段函数 $y_n(s)$，使 $\|y_n(s)\|\leqslant\|x(s)\|\left(1+\frac{1}{n}\right)$ $(n=1, 2, \cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(s)=x(s)$（强）（殆遍）。

由阶段函数的 Bochner 积分值的定义直接看出

$$\int_A Ty_n(s)\mu(ds)=T\int_A y_n(s)(ds).$$

又

$$\|Ty_n(s)\|\leqslant\|T\|\,\|y_n(s)\|\leqslant\|T\|\,\|x(s)\|\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

$$\lim Ty_n(s)=Tx(s)\quad（强）（殆遍）。$$

由此不难仿前面的推理（定义 Bochner 积分时）証明

$$\lim_{n\to\infty}\int_A Ty_n(s)\mu(ds)=\int_A Tx(s)\mu(ds)\quad（强）。$$

于是由 T 的連續性可知

$$\lim_{n\to\infty} T\left[\int_A y_n(s)\mu(ds)\right]=T\int_A x(s)\mu(ds),$$

从而証完。

注　特别令 $E_1=K$，从而，$T=f\in E^*$，便可知对于每个按 Bochner 意义可积分的抽象函数 $x(s)$，及每个 $f\in E^*$，$f(x_n(s))$ 必按 Lebesgue 可积分，且

$$\int_A f(x(s))\mu(ds)=f\left(\int_A x(s)\mu(ds)\right).$$

与此相关，我們可以叙述 Pettis 积分定义如下：

定义 5. 測度空間$(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$上的，在 Banach 空間 E 中取值的函数 $x(s)$ 叫做按 Pettis 可积分，是指存在 $x_0\in E$，使对于每个 $f\in E^*$，下述的 Lebesgue 积分存在：

$$\int_\Omega f(x(s))\mu(ds)=f(x_0).$$

这时，我們写作：

$$(P)\int_{\Omega} x(s)\mu(ds)=x_0,\ \text{或就写成}\ \int_{\Omega} x(s)\mu(ds)=x_0$$

并称这元为 $x(s)$ 在 $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ 上的 Pettis 积分。

注 由定义看出，按 Pettis 可积分的函数必是弱可测的函数。又由 Hahn-Banach 定理看出，如果 Pettis 积分存在，它是一意决定的。不难看出，对于按 Pettis 可积分的函数 $x(s)$, $y(s)$ 及数 α, β, $\alpha x(s)+$ $+\beta y(s)$ 也按 Pettis 可积分并且

$$\int_{\Omega}[\alpha x(s)+\beta y(s)]\mu(ds)=\alpha\int_{\Omega} x(s)\mu(ds)+\beta\int_{\Omega} y(s)\mu(ds).$$

如果 $x(s)$ 是阶段函数，即 $\Omega=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $A_i\cap A_j=\phi(i\neq j)$, 而

$$x(s)=\alpha_i \text{ 如 } s\in A_i\ (i=1,2,\cdots,n),$$

那么不难看出 Pettis 积分

$$\int_{\Omega} x(s)\mu(ds)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(A_i).$$

由前定理后的注。可知按 Bochner 可积分的函数必按 Pettis 可积分，并且这时 Bochner 积分与 Pettis 积分相等，特别如取 $E=R$, 那末兩种积分都化成平常 Lebesgue 积分。

对于 Pettis 积分，也存与定理 4 相仿的定理成立。

定理 5. 設 E, E_1 是数域 K 上的 Banach 空間，T 是由 E 到 E_1 中的有界綫性算子。如果 $x(s)$ 是测度空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ 上的在 E 中取值的按 Pettis 可积分函数，那末 $Tx(s)$ 是在 E_1 中取值的按 Pettis 可积分的函数并且它的 Pettis 积分是 $x(s)$ 的 Pettis 积分的 T- 象。

$$\int_{\Omega} Tx(s)\mu(ds)=T\int_{\Omega} x(s)\mu(ds).$$

証 我們只須証明对于每个 $\varphi\in E_1^*$, $\varphi(Tx(s))$ 按 Lebesgue 可积分，并且积分須等于 $\varphi(Tx_0)$，这里 x_0 表示 $x(s)$ 的 Pettis 积分。

設 T^* 是 T 的共軛算子，那末，对于 $\varphi\in E_1^*$，令 $f=T^*\varphi(f\in E^*)$，从而 $f(x(s))$ 是 Lebesgue 可积分的，并且它的 Lebesgue 积分是 $f(x_0)=$ $=(T^*\varphi)(x_0)=\varphi(Tx_0)$。注意

$$\varphi(T(x(s))=(T^*\varphi)(x(s))=f(x(s)).$$

我們有

$$\int_\Omega \varphi\{T[x(s)]\}\mu ds=\int_\Omega f[x(s)]\mu ds=f[x_0]=\varphi\{T[x_0]\}.$$

所以 $Tx(s)$ 按 Pettis 可积分，且它的 Pettis 积分值等于 Tx_0，証完。

注 Pettis 曾指出，如果某种抽象函数的积分定义当函数的値空間 E 变成 R 时化成平常 Lebesgue 积分，且滿足定理 5，那末这个积分必等于 Pettis 积分，換句話說这函数也必按 Pettis 可积分，且积分值也等于 Pettis 积分的值。这是因为只須取 $E_1=K$ 就够了。

关于 Bochner 积分的另外处理方式，可見 Hille[5]，第三章，关于抽象函数的积分的綜合介紹，請見 Hildebrandt[4]。

有許多应用問題中，常考如下的抽象函数組成的空間：設 $(\Omega,\mathfrak{B},\mu)$ 是測度空間，考察它上面一切弱可測，在 Banach 空間 E 中取値使 $\|x(t)\|$ 可測并滿足

$$\int_\Omega \|x(t)\|^p\mu(dt)<+\infty$$

的函数 $x(t)$ 的全体，表示成 $L^p(\Omega;E)$，这里积分了解成 Pettis。我們証明这也是 Banach 空間 $(p\geqslant 1)$。我們只考 $\mu(\Omega)<+\infty$ 的情形，为簡單起見，設 $\mu(\Omega)=1$。

定理 6. $L^p(\Omega,E)$ 是 Banach 空間 $(p\geqslant 1)$。这里范数是

$$\|x(t)\|=\left[\int_\Omega \|x_n(t)\|^p\mu(dt)\right]^{\frac{1}{p}},$$

証 $L^p(\Omega, E)$ 是線性空間，这一点不难看出。我們只須証明。它按范数

$$\|x(t)\|_p=\left[\int_{\Omega}\|x(t)\|^p\mu(dt)\right]^{\frac{1}{p}} \tag{11}$$

的完备性，因为(11)确定义一个范数，也不难看出。为此，設

$$\|x_n(t)-x_m(t)\|_p\to 0(n, m\to\infty), x_n(t)\in L^p(\Omega, E). \tag{12}$$

取一串实数 $\sigma_n>0$，使 $\sum_{R=1}^{\infty}\sigma_R<+\infty$，以及另一串正数 ε_R，使

$$\sum_{R=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_R}{\sigma_R^p}<+\infty.$$

由(12)可以选一串自然数 $n_1<n_2<n_3<\cdots<n_R<\cdots$ 使

$$\int_{\Omega}\|x_{n_R+q}(t)-x_{n_R}(t)\|^p\mu(dt)<\varepsilon_R(R=1, 2, \cdots), \ q \text{ 任意。} \tag{13}$$

令
$$A_R=\{t\,|\,\|x_{n_{R+1}}(t)-x_{n_R}(t)\|<\sigma_R\},$$

那末依定理 3 的証明，A_R 是 Ω 中可測集（$\in\mathfrak{B}$）。注意

$$\varepsilon_R>\int_{\Omega}\|x_{n_{R+1}}(t)-x_{n_R}(t)\|^p\mu(dt)\geqslant$$

$$\geqslant\int_{\complement A_R}\|x_{n_{R+1}}(t)-x_{n_R}(t)\|^p\mu(dt)\geqslant\sigma_R^p\mu(\complement A_R)=\sigma_R^p(1-\mu(A_R)),$$

从而
$$\mu(A_R)>1-\frac{\varepsilon_R}{\sigma_R^p}.$$

于是不难証明

$$\mu\left(\bigcap_{i=R}^{\infty}A_i\right)=\mu\left(\complement\bigcup_{i=R}^{\infty}\complement A_i\right)=1-\mu\left(\bigcup_{i=R}^{\infty}\complement A_i\right)\geqslant$$

$$\geqslant 1-\sum_{i=R}^{\infty}\mu(\complement A_i)\geqslant 1-\sum_{i=R}^{\infty}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i^p}.$$

由假定，取 R 足够大，可使 $\mu\left(\bigcap\limits_{i=R}^{\infty} A_i\right)$ 任意小。因此，对于 Ω 中的殆每个 t，当取 k 足够大时，

$$\|x_{n_{R+1}}(t)-x_{n_R}(t)\|<\sigma_R.$$

E 既是完备的，并且 $\sum\sigma_R<+\infty$，可知 $x_{n_R}(t)=x_{n_1}(t)+\sum\limits_{i=2}^{R}[x_{n_i}(t)-x_{n_{i-1}}(t)]$ 当 $R\to\infty$ 时收敛于 E 中一元 $x(t)$（殆一切 t）。于是

$$\|x_{n_R}(t)\|\to\|x(t)\| \quad (\text{殆遍})①$$

由(12)可知 $\|x_n(t)\|_p$ 有界，从而依 Fatou 辅助定理，

$$\int_\Omega \|x(t)\|^p\mu(dt)<+\infty.$$

又因 $x_{n_R}(t)$弱可测，所以对于每个 $f\in E^*$，$f(x_{n_R}(t))$ 可测，从而它們的殆遍收斂極限 $f(x(t))$ 也可測，卽 $x(t)$ 弱可測。从而 $x(t)\in L^p(\Omega,E)$。現在証明 $x(t)$ 乃是 $x_n(t)$ 在 $L^p(\Omega,E)$ 中的極限。事实上，在(13)中令 $q\to\infty$，依 Fatou 輔定理，

$$\int_\Omega \|x(t)-x_{n_R}(t)\|^p\mu(dt)\leqslant\varepsilon_R \quad (R=1,2,\cdots),$$

卽
$$\|x(t)-x_{n_R}(t)\|_p\leqslant\varepsilon_R^{\frac{1}{p}}.$$

注意

$$\|x_n(t)-x(t)\|_p\leqslant\|x_n(t)-x_{n_R}(t)\|_p+\|x_{n_R}(t)-x(t)\|,$$

依(13)，当取 $n\geqslant n_R$ 时，可知上式右边 $\leqslant\alpha\varepsilon_R$，从而

$$\|x_n(t)-x(t)\|_p\to 0 \quad (n\to\infty).$$

証完。

关于类似的抽象函数空間以及应用，可参看，例如[8][9]。

---

① 这里 $\|x_{n_R}(t)\|$ 是表对固定的 $t\in\Omega$，E 中元 $x_{n_R}(t)$ 的范数。

关于 Wiener 积分. 設 $B(t)\equiv B(\omega, t)(-\infty\leqslant\alpha<t<\beta\leqslant+\infty)$ 是一 Wiener 过程，即一平稳随机过程，满足下列条件：

1) 对于任意 $s, t\in(\alpha, \beta)$,

$$\mathfrak{M}[B(s)]=0$$

2) $t<s\leqslant u<v\ (t, s, u, v\in(\alpha, \beta))\Longrightarrow\mathfrak{M}[(B(s)-B(t))(B(v)-B(u))]=\mathfrak{M}[B(s)-B(t)]\,\mathfrak{M}[B(v)-B(u)]=0$.

3) 对于 $s>t$, $(s, t\in(\alpha, \beta))$,

$$\mathfrak{M}([B(s)-B(t)]^2)=s-t.$$

考察平常函数空間的实 Hilbert 实間 $L^2(\alpha, \beta)$ 以及抽象函数空間的实 Hilbert 空間 $L^2(\Omega, \mathfrak{B}, P)(P(\Omega)=1$。于是

$$\mathfrak{M}(x(\omega))=(x, 1),\ ((x, y)\equiv(x-\mathfrak{M}(x(\omega)), y-\mathfrak{M}(y(\omega))),$$

这里 1 表示 Ω 上恒等于 1 的函数，(x, y)表示 $L^2(\Omega)$ 中的内积，注意由上述假定，$\mathfrak{B}(t)$ 是 (α, β) 上在 $L^2(\Omega)$ 中取值的抽象函数。設 H 表示 $L^2(\alpha, \beta)$ 中右連續并在 α, β 的附近 $=0$ 的阶段函数全体，那末容易看出 H 是 $L^2(\alpha, \beta)$ 中稠綫性子空間。对于 $x(t)\in H$, 例如設

$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta,\ x(t)=\alpha_\nu\ \text{如}\ t_{\nu-1}<t\leqslant t_\nu,\ 1\leqslant\nu\leqslant n, \tag{14}$$

而令 $\alpha_1=\alpha_n=0$。对于这个 $x(t)$, 定义 Stieltjes 型积分如下：令

$$I(x)=\sum_{\nu=2}^{n-1}\alpha_\nu(B(t_\nu)-B(t_{\nu-1})). \tag{15}$$

于是 $I(x)$ 的值与 x 的特殊表現方式(14)無关，并且 $I(x)$是由$L^2(\alpha, \beta)$ 的子集 H 到 $L^2(\Omega)$ 中的映象，并且对于 $x, y\in H$①:

(i) $I(\alpha x+\beta y)=\alpha I(x)+\beta I(y)$,

(ii) $(I(x), 1)=\mathfrak{M}(I(x))=0$,

① 在討論中，(x, y), $\|x\|$ 同时用来表現 $L^2(\alpha, \beta)$ 与 $L^2(\Omega)$ 中的内积与范数，但只要注意所論的内容，不致發生混淆。

(iii) $(I(x), I(y))=\mathfrak{M}(I(x)I(y))=C(I(x), I(y))=(x, y)$,

(iv) $\|I(x)\|^2=\mathfrak{M}(I(x)^2)=\|x\|^2$。

事实上,取阶段函数 x, y 的共同分割 (t_i) 如(14), 那末 (i) 由定义(15)直接推得。(ii) 由前面的假定 1) 得出。注意对于 $x\in H$,

$$\|I(x)\|^2=\sum_{\nu=2}^{n-1}\alpha_\nu^2\mathfrak{M}([B(t_\nu)-B(t_{\nu-1})]^2)+$$

$$+2\sum_{\sigma<\nu}\alpha_\sigma\alpha_\nu\mathfrak{M}[(B(t_\sigma)-B(t_{\sigma-1})]\cdot(B(t_\nu)-B(t_{\nu-1})].$$

而依假定 2) 3), 上式右边第二项 $=0$, 第一项中的平均值项等于 $t_\nu-$ $-t_{\nu-1}$, 从而

$$\|I(x)\|^2=\sum_{\nu=2}^{n-1}\alpha_\nu^2(t_\nu-t_{\nu-1})=\int_\alpha^\beta x(t)^2dt=\|x\|^2.$$

于是(iv)得証，而由“極化”(iv), 便得(iii), 因为 $L^2(\alpha, \beta)$ 与 $L^2(\Omega)$都是 Hilbert 空間:

$$[I(x), I(y)]=\frac{1}{4}\{\|I(x+y)\|^2-\|I(x-y)\|^2\}=$$

$$=\frac{1}{4}\{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\}=(x, y).$$

对現在把映象 I 和 H 延拓到全 $L^2(\alpha, \beta)$ 上去。由于 H 在 $L^2(\alpha, \beta)$ 中稠,所以对于每个 $x\in L^2(\alpha, \beta)$, 可取一列 $x_n\in H$, 使

$$\|x_n-x\|^2\to 0,$$

于是

$$\|I(x_m)-I(x_n)\|=\|x_m-x_n\|\leqslant\|x_m-x\|+\|x-x_n\|\to 0\ (m, n\to\infty),$$

从而 $(I(x_m))$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的基本列。于是存在一元 $X\in L^2(\Omega)$, 使 $(I(x_m))$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收斂于 X。不难看出 $X=X(\omega)(\omega\in\Omega)$殆遍一意决定,与收斂于 x 的 H 中元列 (x_n) 的特殊选擇無关。我們定义 $I(x)=$ $=X$, 从而 $I(x)=\lim\limits_{n\to\infty}I(x_n)$。$I(x)$ 叫做 $x\in L^2(\alpha, \beta)$ 的 Wiener 积分。

于是 $I(x)$ 是由 $L^2(\alpha, \beta)$ 到 $L^2(\Omega)$ 中的映象，并且仍然滿足 (i) (ii) (iii)(iv)。事实上，对于 $x, y \in L^2(\alpha, \beta)$，令 $x_n, y_n \in H$，使 $x_n \to x$, $y_n \to y$，从而 $\alpha x_n + \beta y_n \to \alpha x + \beta y$ $(n \to \infty)$，于是

$$I(\alpha x+\beta y)=\lim_{n\to\infty} I(\alpha x_n+\beta y_n)=$$
$$=\alpha \lim_{n\to\infty} I(x_n)+\beta \lim_{n\to\infty} I(y_n)=\alpha I(x)+\beta I(y),$$

即証明了 (i)。又由于內积的連續性可知

$$(I(x), 1)=(\lim_{n\to\infty} I(x_n), 1)=\lim_{n\to\infty}(I(x_n), 1)=0,$$

得 (ii)。又同理

$$(I(x), I(y))=(\lim_{n\to\infty} I(x_n), \lim_{n\to\infty} I(y_n))=$$
$$=\lim_{n\to\infty}(I(x_n), I(y_n))=\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n)=(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n)=(x, y),$$

得 (iii)，而 (iv) 由 (iii) 直接得出。

既然 $I(x) \in L^2(\Omega)$, $I(x)$ 是一个随机变量，而由 (ii) 知它的平均值 $=0$，而由 (iv) 知 $\mathfrak{M}(I(x)^2)=\|x\|^2$，从而，用概率論的語言，$I(x)$ 是 $N(0, \|x\|^2)$ 型的正規随机变量。这里我們不細論了。

Wiener 积分 $I(x)$ 平常表示成

$$I(x)=\int_\alpha^\beta x(t)dB(t), \quad x \in L^2(\alpha, \beta).$$

注意如果 $(x_\lambda)(\lambda \in \Lambda)$ 是 $L^2(\alpha, \beta)$ 一組相互直交的元，那末随机变量 $(I(x_\lambda))(\lambda \in \Lambda)$ 是相互独立的。証从略。

注意(i)—(iv)説明 I 是由 $L^2(\alpha, \beta)$到 $L^2(\Omega)$ 中的保范綫性算子。借此可以导出 Wiener 过程的 Fourier 展开。事实上，考察$[0, \pi]$上的 Wiener 过程 $B(t)=B(\omega, t)$。設 $B(\omega, 0)\equiv 0$。作 Wiener 积分

$$X=\int_0^\pi x(t)dB(t), \quad x(t) \in L^2(0, \pi).$$

取 $L^2(0,\pi)$ 中的完全規格化直交組 $(e_n(t))$, $n=1,2,\cdots$。令

$$X_n=\int_0^\pi e_n(t)dB(t),\quad n=1,2,\cdots.$$

依上述，X_n 各是遵守正态分布 $N(0,\|\varphi_n\|^2)=N(0,1)$ 的随机变量。由 (e_n) 的相互直交可以知道 (X_n) 的相互独立。任意 $x(t)\in L^2(0,\pi)$ 可以用 Fourier 展开表示

$$x(t)=\sum_{R=0}^{\infty}\alpha_n e_n(t),\quad \alpha_n=(x,e_n),$$

这里無穷級数的和表示二次平均收斂的極限。令

$$X=\int_0^\pi x(t)d\beta(t)$$

那末由 Wiener 积分的性質(iv)不难看出

$$\left\|X-\sum_{R=0}^{n}\alpha_R X_R\right\|=\left\|x-\sum_{R=0}^{n}\alpha_R e_R\right\|\to 0.\quad (n\to\infty),$$

从而
$$X=\sum_{R=0}^{\infty}\alpha_R X_R.$$

特别取
$$x(t)\equiv\chi_s(t)=\begin{cases}1 & \text{如果 } 0\leqslant t\leqslant s\\ 0 & \text{如果 } s<t\leqslant\pi,\end{cases}$$

那末，令 $\alpha_n(s)=(\chi_s,e_n)=\int_0^s e_n(t)dt$。注意

$$\int_0^\pi \chi s(t)dB(t)=B(s)-B(0)=B(s).$$

于是
$$B(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(s)x_n,\quad \alpha_n(s)=\int_0^s e_n(t)dt.$$

特别取 $L^2(0,\pi)$ 的完全規格化直交組

$$e_0(t)=\sqrt{\frac{1}{\pi}},\quad e_n(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nt,\quad n=1,2,\cdots$$

那末
$$\alpha_0(s)=\int_0^s e_0(t)dt=\frac{s}{\sqrt{\pi}},$$

$$\alpha_n(s)=\int_0^s e_n(t)dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^s \cos nt dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin ns}{n},\quad n=1,2,\cdots,$$

从而
$$B(t)\simeq\frac{t}{\sqrt{\pi}}X_0+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin nt}{n}X_n,$$

这里

$$X_0=\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}d\beta(t)=\frac{\beta(\pi)}{\pi},\quad X_n=\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nt d\beta(t),\ n=1,2,\cdots,$$

而 $X_0, X_1, \cdots$ 是相互独立的，遵从正态分布 $N(0,1)$ 的随机度量。

下面簡單介紹在 Banach 空間中取值的复变数函数，这在 § 7 中要用到。

定义 9. 設 E 是复 Banach 空間，$x(\xi)$ 是表示定义在复数平面上某区域 G 中并在 E 中取值的抽象函数。$x(\xi)$ 叫做解析函数，是指对于每个 $\xi\in G$,

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{x(\xi+\delta)-x(\xi)}{\delta}\quad (\delta \text{ 表示复数}) \tag{16}$$

存在。这里極限是指按 E 中的收斂而取的。

(16)中的式正是 $x(\xi)$ 在 ξ 处的导函数值 $x'(\xi)$。由定义 2 下的注，对于任意 $f\in E^*$，这时 $f'(x(\xi))\equiv\frac{df(x(\xi))}{d\xi}$ 存在 $(\xi\in G)$，从而 $f(x(\xi))$ 是平常的复数值解析函数。由此，平常复数值解析函数的許多性質可以直接推到抽象解析函数上来。特别抽象解析函数必在 G 中每点处連

續。

設 $x(\lambda)$ 是有界区域 G 中的抽象解析函数，那末

$$\{\|x(\lambda)\| \mid \lambda\in G\},\tag{17}$$

是有界实数集。实际上，对于每个 $f\in E^*$, $\{f(x(\lambda))\mid\lambda\in G\}$ 是有界集，而令 $X_\lambda(f)=f(x(\lambda))$，那末 $X_\lambda\in E^{**}$，即对于每个 $f\in E^*$, $\{\|X_\lambda(f)\|\}$ 是有界集，并且 $\|X_\lambda\|=\|x(\lambda)\|$。由共鳴定理可知 $\{\|X_\lambda\|\mid\lambda\in G\}$ 是有界数集，从而(17)是有界数集。

定理 7(Liouville 定理). 設抽象解析函数 $x(\lambda)$ 对于一切复数 λ 有意义而且 $\|x(\lambda)\|$ 有界，那末 $x(\lambda)\equiv x_0$ 是 E 中的固定元。

証 对于任意 $f\in E^*$, $f(x(\lambda))$ 是在全复平面有界：

$$|f(x(\lambda))|\leqslant\|f\|\|x(\lambda)\|,$$

依平常解析函数的 Louville 定理①, $f(x(\lambda))$ 对于每个 $f\in E^*$ 是常数。設 $x(\lambda)$ 不是 E 中的定元，那么 $x(\lambda)$ 至少取 E 中两个不同値，例如設 $x(\lambda_1)=x_1\neq x_2=x(\lambda_2)$。依 Hahn-Banach 定理，$\exists f\in E^*$ 使 $\|f\|=1$, $f(x(\lambda_2))\neq f(x(\lambda_1))$，这导出矛盾。証完。

定理 8. 設 G 是复数平面中的一个区域，Γ 为 G 中一个可度長曲綫。設 $x(\xi)$ 是定义在 G 上并在复 Banach 空間 E 中取值的連續抽象函数。取 $\lambda_0,\cdots,\lambda_n\in\Gamma$，这里 λ_0 与 λ_n 各表示 Γ 的端点(如果 Γ 不封閉)，而 $\lambda_0,\cdots,\lambda_n$ 沿 Γ 按次序排列，ξ_R 是 $(\lambda_{R-1},\lambda_R)$ 上的任一点。作和

$$S_{\mathscr{P}}=\sum_{R=1}^{n}x(\xi_R)(\lambda_R-\lambda_{R-1}).$$

这里 $\mathscr{P}$ 表示 Γ 的分割 $(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$。令

$$\delta(\mathscr{P})=\max_{1\leqslant R\leqslant n}|\lambda_R-\lambda_{R-1}|$$

那末当 $\delta(\mathscr{P})\to 0$ 时，$S_{\mathscr{P}}$ 有一固定的極限($\in E$)。

---

① 參看 Привалов 复变函数論教程。

我們表示成

$$\lim_{\delta(\mathscr{P})\to 0} S_{\mathscr{P}} = \int_{\Gamma} x(\lambda)d\lambda = X,$$

这 X_0 称作抽象函数 $x(\lambda)$ 在 Γ 上的积分。

証　令 Γ 的两个分割 $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2$, 而关系 $\mathscr{P}_1 \succ \mathscr{P}_2$, 是表示 $\mathscr{P}_2$ 的分点都是 $\mathscr{P}_1$ 的分点。那末 Γ 的一切有穷分割的全体 $\{\mathscr{P}\}$ 組成一个定向半序集。Γ 既是复数平面上一个閉有界集，$x(\lambda)$ 在 Γ 上一致連續。令

$$\omega_{\mathscr{P}}(x) = \max_{1\leqslant R\leqslant n} \sup_{\substack{\lambda', \lambda'' \text{在} \lambda_{R-1}, \lambda_R \text{之間} \\ \lambda', \lambda'' \in \Gamma}} \|x(\lambda') - x(\lambda'')\|.$$

当 $\mathscr{P}, \mathscr{P}' \succ \mathscr{P}_0$ 时，設 Γ 也表示曲綫 Γ 的長，就有

$$\|S_{\mathscr{P}} - S_{\mathscr{P}'}\| \leqslant \omega_{\mathscr{P}_0}(x)\cdot\Gamma.$$

由于 $x(\lambda)$ 的一致連續性，只須取 $\delta(\mathscr{P}_0)$ 足够小，可使 $\omega_{\mathscr{P}_0}(x) < \frac{\varepsilon}{\Gamma}$，从而

$$\lim_{\delta(\mathscr{P})\to 0} S_{\mathscr{P}}$$

存在，証完。

定理 9(Cauchy 定理). 設 $x(\lambda)$ 在閉可度長曲綫 Γ 上連續且在 Γ 所圍的区域中是抽象解析函数，那末

$$\int_{\Gamma} x(\lambda)d\lambda = \Theta.$$

証　由于积分的定义，对于任意 $f \in E^*$,

$$f\left(\int_{\Gamma} x(\lambda)d\lambda\right) = f\left(\lim_{\delta(\mathscr{P})\to 0} \sum_{R=1}^{n} x(\xi_R)(\lambda_R - \lambda_{R-1})\right) =$$

$$= \lim_{\delta(\mathscr{P})\to 0} \sum_{R=1}^{n} f(x(\xi_R))(\lambda_R - \lambda_{R-1}) = \int_{\Gamma} f(x(\lambda))d\lambda,$$

所以如令 $y=\int_\Gamma x(\lambda)d\lambda(\in E)$，依平常 Cauchy 定理

$$f(y)=\int_\Gamma f(x(\lambda))d\lambda=0.$$

f 既是任意的，所以 $y=\Theta$。

定理 10. 設 $x(\lambda)$ 是定义在复数平面的区域 G 上的抽象解析函数，而設 Γ 是 G 中一个閉可度長曲綫，并且 Γ 所圍成的区域完全含在 G 中。又設当 τ 沿 Γ 运轉一周时，$\arg(\tau-\lambda)$ 增加 2π（这里 λ 在 Γ 所圍成的区域中）。那末

$$x^{(n)}(\lambda)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-\lambda)^{n+1}}.$$

証 对于任意 $f\in E^*$，$f(x^{(n)}(\lambda))=[f(x(\lambda)]^{(n)}$ 都成立，依平常解析函数的微商公式

$$[f(x(\lambda))]^{(n)}=\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(x(\tau))d\tau}{(\tau-\lambda)^{n+1}}$$

卽可得出

系 1（**Taylor 展开**）如果 $x(\lambda)$ 是圓形区域 $\{\lambda\,|\,|\lambda-\lambda_0|<\rho_0\}$ 中的抽象解析函数，且在这圓上有一正数 M，使 $\|x(\lambda)\|\leqslant M$。那末在这圓中，Taylor 展开式成立：

$$x(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{(n)}(\lambda_0)}{n!}(\lambda-\lambda_0)^n. \tag{18}$$

証 对于上述圓中任意一点 λ：$|\lambda-\lambda_0|=\rho<\rho_0$，所以依定理 10，令 Γ 表示上述圓周，

$$\|x^{(n)}(\lambda_0)\|\leqslant n!\,M\rho^{-n}.$$

上式对于一切 $\rho<\rho_0$ 成立，所以

$$\|x^{(n)}(\lambda_0)\|\leqslant n!\,M\rho_0^{-n}.$$

由此可知 (18)右边的無穷級数在圓 $|\lambda-\lambda_0|<\rho_0$ 中絕对收斂，从而收斂于 E 中一元 $y(\lambda)$。对于每个 $f\in E^*$, $f(x^{(n)}(\lambda))=[f(x(\lambda))]^{(n)}$, 所以依平常的 Taylor 展开式:

$$f(x(\lambda))=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x(\lambda_0))}{n!}(\lambda-\lambda_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(x^{(n)}(\lambda_0))}{n!}(\lambda-\lambda_0)^n=$$

$$=f\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{(n)}(\lambda_0)}{n!}(\lambda-\lambda_0)^n\right).$$

上面等式既然对于任意 $f\in E^*$ 成立，所以(18)成立。

系2 (Laurent 展开式) 設 $x(\lambda)$ 是环形区域

$$0\leqslant\rho_1<|\lambda-\lambda_0|<\rho_2\leqslant\infty$$

中的抽象解析函数，設 Γ 是环形区域中一个环繞圓 $|\lambda-\lambda_0|=\rho_1$ 一周的閉可度長曲綫。那末在这区域中

$$x(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(\lambda-\lambda_0)^n, \tag{19}$$

这里

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}x(\lambda)(\lambda-\lambda_0)^{-n-1}d\lambda.$$

証 首先注意，依 Cauchy 定理，a_n 的值对于环形区域中任一环繞內圓 $|\lambda-\lambda_0|=\rho_1$ 一周的閉可度長曲綫 Γ 是一样的。設 Γ 是以 λ_0 为中心以 ρ 为半徑的圓周，这里 $\rho_1<\rho<\rho_2$。那末

$$\|a_n\|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\|x(\lambda)\||\lambda-\lambda_0|^{-n-1}d\lambda\leqslant\frac{M_\rho}{2\pi}\rho^{-n-1}2\pi\rho=M_\rho\rho^{-n}$$

这里 $M_\rho=\max\limits_{|\lambda-\lambda_0|=\rho}\|x(\lambda)\|$。把上面不等式中的 ρ 換成 $\rho_2-\varepsilon>|\lambda-\lambda_0|$ 并把

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\||\lambda-\lambda_0|^n$$

与等比級数
$$\sum_{n=1}^{\infty} M\rho_{2-\varepsilon}\frac{|\lambda-\lambda_0|^n}{(\rho_2-\varepsilon)^n}$$
比較，可知
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda-\lambda_0)^n$$
絕对收斂。又当 $n\leqslant -1$ 时，同样可証 $\|a_n\|\leqslant M_\rho\rho^{-n}$，从而
$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(\lambda-\lambda_0)^n$$
也絕对收斂。所以
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(\lambda-\lambda_0)^n$$
在环形区域中絕对收斂。对于任意 $f\in E^*$，于是
$$f\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(\lambda-\lambda_0)^n\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(a_n)(\lambda-\lambda_0)^n$$
而
$$f(a_n)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(x(\lambda))(\lambda-\lambda_0)^{-n-1}d\lambda,$$
所以依平常解析函数論中的 Laurent 展开，
$$f(x(\lambda))=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(a_n)(\lambda-\lambda_0)^n$$
既然 $f\in E^*$ 是任意的，(19)得証。

注 在系 2 的条件下不难看出，特别
$$\int_\Gamma x(\lambda)d\lambda=2\pi i a_{-1}$$
这里 a_{-1} 是 $x(\lambda)$ 的 Laurent 展开式中 $(\lambda-\lambda_0)^{-1}$ 项的系数。

習 題 六

1. 定义在閉区間 $[\alpha,\beta]$ 上并在 Banach 空間 E 中取値的函数 $x(t)$ 叫做弱囿变的，是指对于任意 $f\in E^*$，$f(x(t))$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的平常囿变函数。求証如果 $x(t)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的弱囿变函数，那末存在常数 μ，使对于每个 $f\in E^*$，

$$\underset{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}{\mathrm{var}}\ f(x(t))\leqslant\mu\|f\|.$$

提示　利用閉圖象定理。

2. 求証如果 $x(t)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的按 Pettis 可积分的抽象函数，那末必存在常数 μ，使对于每个 $f\in E^*$，

$$\int_\alpha^\beta |f(x(t))|\,dt\leqslant\mu\|f\|.$$

3. 設 $(\Omega,\mathfrak{B})$ 是一可測空間。定义在 $\mathfrak{B}$ 上并在 Banach 空間 E 中取値的函数 $x(A)$ 叫做抽象全加法集函数，是指对于

$$A=\bigcup_{i=1}^\infty A_i,\ A_i\in\mathfrak{B},\ A_i\cap A_j=\phi\ (i\neq j),\ (i,j=1,2,\cdots,)$$

$$x(A)=\sum_{i=1}^\infty x(A_i)=(\text{弱})-\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n x(A_i),$$

求証对于抽象全加法集函数 $x(A)$，存在常数 μ，使对于每个 $A\in\mathfrak{B}$，

$$\|x(A)\|\leqslant\mu.$$

4. 求証 $[\alpha,\beta]$ 上一切按 Bochner 可积分的抽象函数的全体按范数

$$\|x\|=\int_\alpha^\beta \|x(t)\|\,dt$$

形成一个 Banach 空間。同样証明范数的 p 次冪可积分的函数全体形成 Banach 空間：

$$\|x\|_p=\left(\int_\alpha^\beta \|x(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}},\quad p>1.$$

5. 为了定义在 $[0,1]$ 上并在 (l) 中取値的抽象函数

$$x(t)=(\xi_R(t))\quad (R=1,2,\cdots)$$

是囿变函数，必須且只須每个 $\xi_R(t)(R=1,2,\cdots)$ 是平常囿变函数并且

$$\sum_{R=1}^\infty \underset{0\leqslant t\leqslant 1}{\mathrm{var}}\ \xi_R(t)<+\infty.$$

（李文清）

6. 为了 $[\alpha,\beta]$ 上的抽象函数 $x(t)$ 是弱囿变函数，必須且只須存在常数 μ，使对于任意

的数 $\varepsilon_i=\pm1$, 及 $[\alpha,\beta]$ 的任意分割 $\alpha<t_1<\cdots<t_n<\beta$,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(x(t_{i+1})-x(t_i))\right\|\leqslant\alpha,\quad (\text{Гелбфанд}).$$

参 考 文 献

[1] Alexiewicz, A.: On differentiation of vector-valued function, Studia Math. 11 (949) 185—196.

[2] Bochner, S.: Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorroumes sind, Fund math, 20 (1933), 262—276.

[3] Гельфанд, И. М.: Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren, Матем сб. 4 (1938), 235—284.

[4] Hildebrandt, T. H.: Integration in abstract spaces, Bull, Amer. Math, Soc. 59 (1953), 111—139.

[5] Hille, E.: Functional analysis and semi-groups, 1948 [特别第三章]。

[6] 伊藤清，概率論 1956.

[7] Хинчин, А. Я.: Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse, Math: Ann. 109 (1934), 604—615.

[8] Ладыженская, О. А.: О решении нестационарных операторных уравнений, Матем, св. 39:4 (1956), 491—524.

[9] Mourier, E.: Éléments aléatoires dans un espace de Banach Ann. Inst. Henri Poincarè.

[10] Pettis, B. J.: Onintégration in vector spaces. Trans. Amer. Math, Soc. 44 (1938), 277—304.

[11] Яглон, А. М.: 平稳隨机函数导論，数学进展 2:1 (1956) 3—152.

[12] 吉田耕作: 位相解析 I. 1952.

[13] Б. В. Гнеденко: 概率論教程（有中譯本)。

§7. Banach 代数

在§2. 中已見到，由一个 Banach 空間 E 到另一 Banach 空間 E_1 中的一切有界綫性算子的全体形成一个 Banach 空間。如果 $E=E_2$, 那末

在这个算子的 Banach 空間——我們表示成 $\mathfrak{E}(E)$——中，还可以定义乘法：

$$(T_1 \cdot T_2)(x) = T_1(T_2(x)) \quad (x \in E).$$

不难驗明这个乘法在 $\mathfrak{E}(E)$ 中滿足

締合律：　　　　$T_1(T_2T_3) = (T_1T_2)T_3$,

分配律：

$$(T_1+T_2)T = T_1T + T_2T,\ T(T_1+T_2) = TT_1 + TT_2,$$
$$(\alpha T_1)(\beta T_2) = \alpha\beta T_1T_2 \quad (\alpha, \beta \in k),$$
$$1 \cdot T = T,$$
$$IT = TI = T,$$

这里 $T, T_1, T_2, T_3 \in \mathfrak{E}(E)$，$I$ 是 E 上的不变算子。按照代数学的术語，我們說 $\mathfrak{E}(E)$ 形成一个数域 K(即以 K 为系数域)上的代数。当取 E 为有穷(n)維空間时，对于取定的一个基，$\mathfrak{E}(E)$ 实現成平常 K 上的 $n\times n$ 方陣所成的完全方陣环(Voll-matrigenring)，这个代数，同时是 Banach 空間，而且代数的結構与 Banach 空間的結構是相联系着的。事实上，因

$$\|T_1T_2x\| \leqslant \|T_1\|\,\|T_2x\| \leqslant \|T_1\|\,\|T_2\|\,\|x\|,$$

从而
$$\|T_1T_2\| \leqslant \|T_1\|\,\|T_2\|,$$

并且 $\|I\| = 1$。于是对于 $T, T_1, T_0, T_2 \in \mathfrak{E}(E)$：

$$\|(T_1 - T_0)T\| \leqslant \|T_1 - T_0\|\,\|T\|,$$
$$\|T(T_1 - T_0)\| \leqslant \|T\|\,\|T_1 - T_0\|,$$
$$\|TT_1 - T_0T_*\| \leqslant \|TT_1 - TT_*\| + \|TT_* - T_0T_*\| \leqslant$$
$$\leqslant \|T\|\,\|T_1 - T_*\| + \|T - T_0\|\,\|T_*\|,$$

所以当 $T_n \to T_0, T'_n \to T_*$ 时，必然 $T_nT'_n \to T_0T_*$，即 $(T, T') \to TT'$ 是由 $\mathfrak{E}(E)\times\mathfrak{E}(E)$ 到 $\mathfrak{E}(E)$ 中的連續映象。这样提供了一种新的結構的模型即 Banach 代数的結構。这里只叙述 Banach 代数的最簡單的性質，特别証明，上面举出的 Banach 代数在这一意义下可以看成是最一般

的[定理 2]。关于 Banach 代数理論的这一泛函分析重要分支的詳細叙述，將放在本講义后半部[1]。

定义 1. 所謂数域 K 上的 Banach 代数[2] R，是指 K 上的 Banach 空間 R，其中还定义了乘法，$(x, y)\to xy$，使 R 按这乘法成为 K 上的代数[3]，并且使

$$x\to xy, \quad y\to xy,$$

都是由 R 到 R 中的連續映象，即

$$\|x_n - x\|\to 0 \Longrightarrow \|x_n y - xy\|\to 0 \quad (n\to\infty);$$

$$\|y_n - y\|\to 0 \Longrightarrow \|xy_n - xy\|\to 0 \quad (n\to\infty).$$

除上述的，由 Banach 空間 E 到它自己之中的一切有界綫性算子全体所形成的 Banach 代数 $\mathfrak{E}(E)$，这一重要例子之外，下面举出几个有用的例。

例 1. K 本身就是 K 上的 Banach 代数，其中运算就是平常的加法与乘法，范数就是数的絕对值。

例 2. 在 Banach 空間 $C(\Omega)$ 中，引入乘法 $(x, y)(t) = x(t)y(t)$ $(t\in\Omega)$，范数 $\|x\| = \sup\limits_{t\in\Omega} |x(t)|$，$x = x(t)\in C(\Omega)$。

那末 $C(\Omega)$ 成为 Banach 代数，并且注意

$$\|xy\|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|.$$

例 3. 設 $L(z)$ 表示一切滿足 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |\xi_n| < +\infty$ 的数列 $x = (\xi_n)$ $(n = 0, \pm 2, \cdots)$ 按加法

$$(\xi_n) + (\eta_n) = (\xi_n + \eta_n),$$

---

[1] 这里的材料主要取自关鑒直田方增“賦范环論”的第一章。目前，Banach 代数方面的書，已經不少了，例如 Loomis[10]，Наймарк[13] 等。

[2] 我們按照 [8] 的規定，称一般的非交換的作 Banach 代数，而把历史上用慣的名詞賦范环留作称呼交換 Banach 代数。

[3] 参看，例如 van der Waerden，B：Moderne Algebra，2. Bd。

与乘法
$$(\xi_n)\cdot(\eta_n)=(\zeta_n),\ \zeta_n=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\xi_{n-k}\eta_k.$$
与范数
$$\|x\|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\xi_n|$$
組成的 Banach 代数。不难看出如果把 x 与絕对收斂的三角級数:
$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi_n e^{int},\ \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\xi_n|<+\infty\right)$$
等同，那末上述运算就是三角級数的相应运算。这个 Banach 代数 $L(z)$ 叫做 Wiener 环，表示成 W。

例 4. 設在 Banach 空間 $L=L(-\infty,\infty)$ 中 (L 为表示定义于实数直綫上一切絕对有和复数值函数 $x(t)$ 的全体，加法与数乘法如常)，定义乘法为
$$(x*y)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)y(\tau)d\tau.$$
范数定义为
$$\|(x)\|=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt.$$
我們証明，对于任意 $x,y\in L$, $x*y$ 有定义且仍 $\in L$。显然，$x(\tau-\sigma)\cdot y(\sigma)$ 是可測函数，所以依 Fubini 定理，
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau-\sigma)\cdot y(\sigma)d\tau d\sigma=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau-\sigma)y(\sigma)d\sigma=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}y(\sigma)d\sigma\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau-\sigma)d\tau,$$
其中如三个积分中有一个有穷，則其他兩个也有穷，并且三者相等。但由于 Lebesgue 測度对直綫上平移 $\tau\to\tau-\sigma$ 之不变性，可知

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(\sigma)d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau-\sigma)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\sigma)d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)d\tau \neq \infty.$$

所以依 Fubini 定理，对于殆一切 τ，

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau-\sigma)y(\sigma)d\sigma$$

存在，并且把它当作 τ 的函数时，它是可测的，絕对有和的。这时，

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau-\sigma)y(\sigma)d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} y(\sigma)d\sigma,$$

所以

$$\|x*y\| = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau-\sigma)y(\sigma)d\sigma \right| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|\, d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |y(\sigma)|\, d\sigma = \|x\| \|y\|.$$

从而証明了 $x*y \in L(-\infty, \infty)$，而且証明了 $\|x*y\| \leqslant \|x\| \|y\|$，从而保証了积的連續性。再引用 Fubini 定理及变数替换，可知

$$x*(y*z) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau-\sigma)d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} y(\sigma-\zeta)z(\zeta)d\zeta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} z(\zeta)d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau-\sigma)y(\sigma-\zeta)d\sigma =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} z(\zeta)d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau-\zeta-\sigma)y(\sigma)d\sigma = (x*y)*z,$$

即乘法是綿合的，于是不难看出 L 是 Banach 代数。

例 5. 設 D_n 是定义在 $[0,1]$ 上的一切有連續 n 阶导函数的复数

値函数 $x=x(t)(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的全体。这里运算就是平常关于函数的运算，范数定义成

$$\|x\|=\sum_{k=0}^{n}\frac{\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x^{(k)}(t)|}{k!}.$$

如果 $\|x\|=0$，那么 $\max|x^{(0)}(t)|=0$，就是 $x(t)\equiv 0$，容易証明 $\|x\|$ 滿足范数的一切条件。我們只須証明

$$\|xy\|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|,$$

首先，令 $\alpha_k=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x^{(k)}(t)|$，$\beta_k=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|y^{(k)}(t)|$.

引用 Leibniz 定理，得

$$(xy)^{(k)}(t)=\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}x^{(s)}(t)y^{(k-s)}(t).$$

所以

$$\|xy\|=\sum_{k=0}^{n}\frac{\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|(xy)^{(k)}(t)|}{k!}\leqslant\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}\frac{1}{k!}\alpha_s\beta_{k-s}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{n}\frac{\alpha_i}{i!}\cdot\sum_{j=0}^{n}\frac{\beta_j}{j!}=\cdots.$$

由数学分析中所知道的函数列在一致收斂的条件下逐項微分的定理可以証明 D_n 做为賦范綫性空間的完备性，于是不难看出 D_n 是 Banach 代数。

例 6. 設 A 表示一切在复数平面上的單位圓 $|\zeta|\leqslant 1$ 中連續并在 $|\zeta|<1$ 中解析的函数 $x(\zeta)$ 全体。范数定义成

$$\|x(\zeta)\|=\max_{|\zeta|\leqslant 1}|x(\zeta)|,$$

运算就是平常函数的运算。这时，依范数收斂就是在全圓 $|\zeta|\leqslant 1$ 上的一致收斂。不难証明 A 是 Banach 代数。

例 7. 令 $V^{(p)}(p\geqslant 1)$ 表示$[0, 1]$上一切絕对連續且具有 p 次冪有和的导函数 $x(t)$ 全体，运算定义如常，而范数定义成

$$\|x(t)\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|+\sqrt[p]{\int_0^1|x'(t)|^p dt}.$$

这里乘法确实在全 $V^{(p)}$ 中有定义，因为如果 x, y 都是絕对連續，則它們在$[0, 1]$上也連續且有界，幷且依假定，$\|x\|$ 与 $\|y\|$ 都 $<+\infty$，从而依 Minkowski 不等式

$$\left\{\int_0^1|x'(t)y(t)+y'(t)x(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|y(t)|\left[\int_0^1|x'(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|\left[\int_0^1|y'(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}<+\infty,$$

由是知 $\|x\cdot y\|<+\infty$，所以 $x\cdot y\in V^{(p)}$。現在用 $\|\alpha\|$ 表示:

$$\left[\int_0^1|x'(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}},$$

那末

$$\|x\cdot y\|\leqslant\max_t|x(t)|\cdot\max_t|y(t)|+\max_t|x(t)|\,\|y'\|_p+$$

$$+\max_t|y(t)|\,\|x'\|_p\leqslant\|x\|\cdot\|y\|.$$

剩下只要証明 $V^{(p)}$ 的完备性，設 $\|x_n-x_m\|\to 0(n, m\to\infty)$。那末(i)$x_n(t)$ 在$[0, 1]$中一致收斂。設它的極限是 $x(t)$，因为 $x_n(t)$ 在$[0, 1]$中絕对連續，$x(t)$ 也必連續。(ii)$x_n'(t)$ 在$[0, 1]$中按 p 次冪平均收斂；从而存在一个 p 次冪有和的函数 $y(t)$，使 $\|x_n'-y\|_p\to 0(n\to\infty)$。既然 $x_n(t)$ 絕对連續，必然

$$x_n(t)=\int_0^t x_n'(\tau)d\tau,$$

所以

$$\left|x_n(t)-\int_0^t y(\tau)d\tau\right|=\left|\int_0^t t_n'(\tau)d\tau-\int_0^t y(\tau)d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^t |x_n'(\tau)-y(\tau)|d\tau\leqslant\int_0^1 |x_n'(\tau)-y(\tau)|d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\left[\int_0^1 |x_n'(\tau)-y(\tau)|^p d\tau\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\int_0^1 1^q d\tau\right]^{\frac{1}{q}}=$$

$$=\|x_n'-y\|_p\to 0(n\to\infty),$$

[这里 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,引用了 Hölder不等式]

所以:
$$\int_0^t y(\tau)d\tau=\lim_{n\to\infty}x_n(t)=x(t).$$

但 $\int_0^t y(\tau)d\tau$ 的导函数殆遍等于 $y(t)$,所以殆遍 $y(t)=x'(t)$。

又
$$\|x_n-x\|=\max_t|x_n(t)-x(t)|+\left[\int_0^1 |x_n'(t)-x'(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\max_t|x_n(t)-x(t)|+\left[\int_0^1 |x_n'(t)-y(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\to 0(n\to\infty),$$

于是 $V^{(p)}$ 的完备性得証。

例 8. 設 $D_m^{(\infty)}$ 表示定义在閉直綫 $[-\infty, +\infty]$(即把 $-\infty$, $+\infty$ 添加到实数集 R 中)上一切具有 m 阶絕对有和且連續的导函数的絕对有和函数的全体,由于閉直綫上連續性蘊涵有界性,容易看出这种函数按平常意义的綫性組和与乘积仍属于 $D_m^{(\infty)}$。

对于 $x\in D_m^{(\infty)}$，定义

$$\|x\|=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\max_{-\infty<t<\infty}|x^{(k)}(t)|+\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\int_{-\infty}^{\infty}|x^{(k)}(t)|dt.$$

按这个范数的收斂意味着 $x(t)$ 及其到第 m 阶为止的各阶导函数不但在全实数軸上一致收斂，并且也平均收斂。注意

$$\|xy\|=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\max_{t}\left|\sum_{r=0}^{k}C_k^r x^{(r)}(t)y^{(k-r)}(t)\right|+$$

$$+\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{r=0}^{k}C_k^r x^{(r)}(t)y^{(k-r)}(t)\right|dt\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\max_{t}|x^{(k)}(t)|\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!}\max_{t}|y^{(j)}(t)|+$$

$$+\sum_{k=0}^{m}\sum_{r=0}^{k}\frac{\max_{t}|y^{k-r}(t)|}{r!(k-r)!}\int_{-\infty}^{\infty}|x^{(r)}(t)|dt\leqslant\|x\|\cdot\|y\|,$$

从而不难証明 $D_m^{(\infty)}$ 是 Banach 代数。

定义 2. Banach 代数叫做賦范环，是指这代数中的乘法滿足变换律①。

例 在定义 1 下所举的諸例中，Banach 代数 $K, C(\Omega), W, L, D_n, A, V^{(p)}, D_m^{(\infty)}$ 都是賦范环。$\mathfrak{S}(E)$ 一般是非交换的。现在只証明 L 中乘法的交换性，为此，注意

$$x*y=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau-\sigma)y(\sigma)d\sigma=\int_{-\infty}^{\infty}x(-\sigma)y(\tau+\sigma)d\sigma=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}y(\tau-\sigma)x(\sigma)d\sigma=y*x.$$

① 顧名思义，"賦范环"这一名詞并不很明确，只是为了尊重历史的發展，仍保存这一命名，但只用于交换的情形。

定义 3. Banach 代数中的元 e 叫做主單位元，是指对于代数中的任意元 x，必然 $xe=ex=x$。

例　K 中的主單位元就是数 1；$C(\Omega)$, W, D_n 中的主單位元就是恒等于 1 的函数；$\mathfrak{E}(E)$ 中主單位元就是不变算子 I。

反例　幷非一切 Banach 代数都有主單位元。我們先証明 L 無主單位元。姑設它有主單位元 x_0 那末对于一切 $x\in L$，必然。

$$x_0*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x_0(t-\sigma)x(\sigma)d\sigma=x(t). \tag{1}$$

取 $x(t)$ 为区間 $[-\tau, 0]$ 或 $[0, \tau]$ $(\tau>0)$ 的特征函数，那末

$$\int_{-\tau}^{0}x_0(t-\sigma)d\sigma=\begin{cases}1 & \text{如果}\quad -\tau\leqslant t\leqslant 0,\\ 0 & \text{如果}\quad t\notin[-\tau, 0];\end{cases}$$

$$\int_{0}^{\tau}x_0(t-\sigma)d\sigma=\begin{cases}1 & \text{如果}\quad 0\leqslant t\leqslant \tau,\\ 0 & \text{如果}\quad t\notin[0, \tau].\end{cases}$$

注意第一积分可以改写成

$$\int_{0}^{\tau}x_0(t+\sigma)d\sigma=\begin{cases}1 & \text{如果}\ -\tau\leqslant t\leqslant 0,\\ 0 & \text{如果}\ t\notin[-\tau, 0],\end{cases}$$

依不定积分的微分定理，可知

在 $[-\tau, 0]$ 内部殆遍 $x_0(t+\tau)=0$,

在 $[0, \tau]$ 内部殆遍 $x_0(t-\tau)=0$,

所以对于一切 $\tau>0$, $x_0(t)$ 在 $[0, \tau]$ 及 $[-\tau, 0]$ 内部殆遍等于 0。旣然 τ 是任意的正数，所以 $x_0(t)$ 殆遍等于 0，代入(1)，得知对于任意 $x(t)\in$ $\in L$, $x(t)=0$，这是荒謬的。因此 L 确实無主單元。

又注意 $D_m^{(\infty)}$ 如果設 $m\geqslant 2$ 也沒有主單元。事实上，依 Fourier 变式的理論①，对于任意 $x\in D_m^{(\infty)}$，必然

① 見 Bochner-Chandrasekharan 傅利叶变式，第一章。

$$\lim_{|t|\to\infty} x(t)=0,$$

$D_{m}^{(\infty)}$ 中的乘法既是平常函数的乘法，显然 $D_{m}^{(\infty)}$ 無主單元。

定义 4. 数域 K 上的 Banach 代数 R 中的子集 N 叫做 R 的 Banach 子代数（或相应地（赋范）子代数），是指 N 按 R 中的运算与范数成为一个 Banach 代数（或相应地，赋范代数，这里所指的赋范代数即是满足 Banach 代数的一切条件，但其相应地 Banach 空間换成不必完备的赋范綫性空間。

例 1. K 可以看成是任何具有主單位元 e 的 Banach 代数 R 的 Banach 子代数，只須把数 α 与 R 中的元 αe 等同就够了。

例 2. 設 E 是 Hilbert 空間 $L^2[0, 1]$。考察 $\mathfrak{C}(E)$ 中凡形狀为:

$$Hx=\int_0^1 H(s, t)x(s)ds$$

的算子的全体 N，其中設

$$H(s, t)\in L^2([0, 1]\times[0, 1]),$$

（即單位正方形 $[0, 1]\times[0, 1]$ 上一切平方有和函数的全体）不难証明 N 是 $\mathfrak{C}(E)$ 中的赋范子代数。注意如果算子 H_1, H_2 的核各是 $H_1(s, t)$, $H_2(s, t)$，那末积 $H_1\cdot H_2$ 的核乃是

$$\int_0^1 H_1(s, \tau)H_2(\tau, t)d\tau.$$

又設 F 是 N 中一切有穷秩算子的全体，也就是説，凡核可以表示成有穷和

$$H(s, t)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(s)\psi_i(t)$$

的积分算子的全体，其中 $\varphi_i, \psi_i\in L^2[0, 1]$。$F$ 是 N 中的子代数。但由

积分方程理論①可知 F 在 N 中不是閉的，从而 F 不是 N 的 Banach 子代数。

定义 5. 数域 K 上的 Banach 代数 R 叫做与 K 上的 Banach 代数 R_1 同構②是指由 R 到 R_1 有一个代数的同構 $x\to x_1$ ($x\in\mathscr{R}$，$x_1\in R_1$)，使当 $x\to x_1$, $y\to y_1$ 时，

$$\lambda x+\mu y\to\lambda x_1+\mu y_1,\ xy\to x_1y_1(\lambda,\mu\in K),$$

并且映象 $x\to x_1$ 保持范数不变，卽 $\|x\|=\|x_1\|$，其中 $\|x\|$ 与 $\|x_1\|$ 各表示 R 与 R_1 中的范数。

例　設 Banach 代数具主單位元 e 并且 $\|e\|=1$，那末它的子代数 $\{\alpha e\,|\,\alpha\in K\}$ 同構于 K。

定理 1. 每个 Banach 代数必同構于一个具主單位元的 Banach 代数的 Banach 子代数。

証　設 R 不含主單位元，否則不待証了。令

$$R'=\{x+\lambda e\,|\,x\in R,\lambda\in K\}.$$

其中 e 表示不屬于 R 的一个元。在这种"形式和"的 R' 中定义运算与范数如下:

$$(x+\lambda e)+(y+\mu e)=(x+y)+(\lambda+\mu)e,\ \alpha(x+\lambda e)=\alpha x+(\alpha\lambda)e,$$

$$(x+\lambda e)\cdot(y+\mu e)=(xy+\lambda y+\mu x)+(\lambda\mu)e,$$

$$\|x+\lambda e\|=\|x\|+|\lambda|.$$

于是 $x_n+\lambda_n e\to x_0+\lambda_0 e$ (λ_n, $x_0\in R$) $\Longleftrightarrow x_n\to x_0$ (在 R 中) 且 $\lambda_n\to\lambda$ (在 K 中)。容易驗明 R 是 Banach 代数并且 e 是 R' 中的主單位元。R 同構于 R 的 Banach 子代数

$$\{x+\lambda e\,|\,\lambda=0,x\in R\}.$$

例 1. 已經知道 L 沒有主單位元，依定理 1 添加主單位元(卽用定理 1 的方法作一 Banach 代数，使它包含与 L 同構的一个 Banach 代数)

① 請参看 F. Piesz et B. Sz. Nagy, §69。

② Banach 代数的同構实际就是 Banach 空間的等値，同时又保存乘法。

后，所得的 Banach 代数表示成 $V^{(a)}$。

例 2. 設

$$W^{(a)}=\left\{X(s)+\lambda \mid \lambda\in K,\ X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{ist}dt,\ -\infty<s<+\infty,\right.$$

$$\left. x(t)\in L\right\}.$$

在 $W^{(a)}$ 中定义运算如平常函数的加法、乘法，范数定义成

$$\|x(s)+\lambda\|=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt+|\lambda|.$$

注意 $x(t)+\lambda e(\in V^{(a)})\to x(s)+\lambda(\in W^{(a)})$ $\left(这里\ x(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{ist}dt\right)$ 是由 $V^{(a)}$ 到 $W^{(a)}$ 的映象 τ。依照 Fourier 变式的理論①，特别由 L 中函数 Fourier 变式的一意性可知 τ 是一对一的。由关于結式的 Fourier 变式的定理可知 τ 是同構，附帶地得知 $W^{(a)}$ 是賦范环。

定理 2. 具有主單位元的 Banach 代数 R 可以經过改賦另一个拓扑等价的范数后，同構于 Banach 代数 $\mathfrak{C}(I)$ 的某一 Banach 子代数。

証 設 e 是 R 的主單位元。由于

$$x(\lambda y+\mu z)=\lambda xy+\mu xz,$$

并且 $y\longrightarrow xy$ 是連續映象，$y\longrightarrow xy$ 是 R 上一个連續綫性算子，我們用 $A_x(\in\mathfrak{C}(R))$ 表示它。因为

$$(x_1+x_2)y=x_1y+x_2y,\ (\lambda x)y=\lambda(xy),\ (x_1x_2)y=x_1(x_2y),$$

可知 R 与 $\mathfrak{C}(R)$ 中的子集 $\mathfrak{A}=\{A_x|x\in R\}$ 按对应 $x\to A_x$ 代数同态。現在考察 $\mathfrak{A}$ 在 $\mathfrak{C}(R)$ 中的特征。旣然 $x(yz)=(xy)z$，所以

① 見 Bochner-Chandrasekharan[2]，第一章 §6，及 Ахиезер，逼近論講义，第三章[1]。

$$A_x(yz)=(A_xy)z.$$

反之，如果 $A\in\mathfrak{S}(R)$ 滿足

$$A(yz)=(Ay)z(\text{一切 } y,\ z\in R),$$

那末 $A\in\mathfrak{A}$；事实上，特别令 $z=e$，那末上式成为 $Az=(Ae)z$，而如令 $a=Ae$，那末 $Az=az$，对于任意 $z\in R$成立，从而 $A=A_a\in\mathfrak{A}$。

現在証明 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{S}(R)$ 中的閉集。事实上令

$$A_{x_n}\to A\in\mathfrak{S}(R),\quad x_n\in R,$$

那末对于一切 $y\in R$，

$$A_{x_n}y\to Ay.$$

由于 Banach 代数中乘法的連續性可知

$$A(yz)=\lim_{k\to\infty}A_{x_{n_k}}(yz)=\lim_{k\to\infty}(A_{x_{n_k}}y)z=(Ay)z,$$

从而 $A\in\mathfrak{A}$。于是得知 $\mathfrak{A}$ 是完备的賦范綫性空間。又

$$\|A_x\|=\sup_{\|y\|\leqslant 1}\|A_xy\|=\sup_{\|y\|\leqslant 1}\|xy\|\geqslant\frac{\|xe\|}{\|e\|}=\frac{\|x\|}{\|e\|},$$

因而
$$A_{x_n}\to A_{x_0}\Longrightarrow x_n\to x_0,$$

于是由 $\mathfrak{A}$ 到 R 中的映象 $A_x\longrightarrow x$ 是連續的。它也是一对一的，

因为
$$A_x=A_y\Longleftrightarrow A_{x-y}=0\Longleftrightarrow\|A_{x-y}\|=0\Longrightarrow\|x-y\|=$$
$$=0\Longrightarrow x=y\Longrightarrow A_x=A_y.$$

依 Banach 定理（§5），$x\to A_x$ 是同胚映象。如令 $\|x\|_1=\|A_x\|(x\in R)$，那末这范数与 R 上原来的范数拓扑等价。由于 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{S}(R)$ 中的 Banach 子代数，定理証完。

注　如不設 R 具主單位元，$x\to A_x$ 一般只是由 R 到 $\mathfrak{S}(R)$ 中的連續映象且是代数同态，卽不必是一对一的。

例　在任意 Banach 空間 E 中，規定 $xy=\Theta(x,y\in E)$，那末 $\|xy\|\leqslant\|x\|\|y\|$，不难証明 E 是 Banach 代数。这时每个 $A_x=\Theta$，从而 $x\to A_x$ 不是同構！

系 1.　具有主單位元 e 的 Banach 代数 R 在必要时可改賦以拓扑

等价的范数 $\|x\|_1$,使

$$\|e\|_1=1,\ \|xy\|_1\leqslant\|x\|_1\cdot\|y\|_1.$$

証 只須令 $\|x\|_1=\|A_x\|$(見定理 2: 証)。

系 2. 在任意 Banach 代数 R 中,$(x,y)\to y$ 是由 $R\times R$ 到 R 中的連續映象。

証 先于必要时对 R 添加主單位元,成为 Banach 代数 R, 并把 R' 改賦 $f(R')$ 中的范数,即得証明。

在下面除特别声明外,所考慮的 Banach 代数常設是含主單位元的并且它的范数滿足定理 2 系 1 的条件。

定义 6. Banach 代数 R 中的元 y 叫做元 x 的右逆,而 x 叫做 y 的左逆,是指 $xy=e$。如 y 同时是 x 的左逆与右逆,那末 y 叫做 x 的逆。如果 x 在 R 中有逆,那末 x 叫做 R 的正則元,而如果 x 在 R 中無逆,那末 x 叫做 R 的特异元。

注 如在代数中所熟知,如 x 既有左逆也有右逆,那末这二者必相等,并且这时逆是一意的,通常表示成 x^{-1}。

例 1. 如 $R=K$, 那末凡其中非零元必有逆。

例 2. 为了 $T\in f(E)$(E 是 Banach 空間)在 $f(E)$ 中有逆,必須且只須 T 是由 E 到 E 上的映象并且存在正数 μ, 使

$$x\in E\Longrightarrow\|Tx\|\geqslant\mu\|x\|.$$

注意在算子理論中这种"有逆"往往称做"具有界逆",而一般由一个空間中的子集 $\mathfrak{D}(T)$ 到另一空間中的子集 $\mathfrak{W}(T)$ 上的任意一对一算子都可以看成是有逆 $\frac{-1}{1}$ 的,$\frac{-1}{1}$ 是以 $\mathfrak{W}(T)$ 为定义域,以 $\mathfrak{D}(T)$ 为值域的算子。

例 3. 一般有右逆的元,不必有左逆。例如 E 是 (l^2), 令其基为 $(e_1,e_2,e_3,\cdots\cdots)$: $e_k=(\delta_{ki})$ $(i=1,2,\cdots\cdots)$。定义 $Te_n=e_{n+1}$。$(n=1,2,\cdots\cdots)$, 而 $Ue_{n+1}=e_n$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$, $Ue_1=0$, 那末对于一切 $x\in E$; $\|Tx\|=\|x\|$, $UT=I$, 但 $TU\neq I$, 因为 $TUe_1=\Theta$。因此 T 是無逆的。

定理 3. Banach 代数 R 中正則元全体組成一个开集，$G(R)$，而且 $x\to x^{-1}$ 是定义 $G(R)$ 上的連續映象。

証　首先証明 $\|e-x\|<1\Longrightarrow x\in G(R)$。事实上，令

$$y_n=e+\sum_{k=1}^{n}(e-x)^k,$$

那末

$$xy_n=(e-(e-x))(e+\sum_{k=1}^{n}(e-x)^k)=e-(e-x)^{n+1},$$

而因
$$\|(e-x)^{n+1}\|\leqslant\|e-x\|^{n+1}<1,$$
所以 $n\to\infty\Longrightarrow(e-x)^{n+1}\to 0$，从而 $xy_n\to e(n\to\infty)$。我們可以証明。

$$e+\sum_{k=1}^{\infty}(e-x)^k$$

絕对收斂，令它的和是 $y(=\lim\limits_{n\to\infty}y_n)$，那末 $xy=e$。同理，証 $yx=e$。所以 $x\in G(R)$。

其次証 $G(R)$是开集。今設 $x_0\in G(R')$，那末 x_0^{-1} 存在，而

$$x_0x_0^{-1}=x_0^{-1}x_0=e.$$

由于积的連續性，有 x_0 的鄰域 $U(x_0)$ 存在，使 $U(x_0)x_0^{-1}\subset U(e)=\{x\mid\|x-e\|<1,\ x\in R\}$，并且 $x_0^{-1}U(x_0)\subset U(e)$。所以，如果 $y\in U(x_0)$，則 yx_0^{-1} 有逆元 z，即 $yx_0^{-1}z=e$。于是 y 有右逆。同理可証 y 有左逆。所以 $y\in G(R)$，这說明 $G(R)$是开集。

最后証明 $x\to x^{-1}$ 是定义在 $G(R)$上的連續函数。首先注意，若 $x_n\to e$，能取 n 足够大 $(\geqslant n_0)$，使 $\|x_n-e\|<\frac{1}{2}$，那末

$$\|x_n^{-1}\|=\|[e-(e-x_n)]^{-1}\|=\|e+(e-x_n)+(e-x_n)^2+$$
$$+\cdots\|<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdots=2.$$

令
$$N=\sup_{n\geqslant 1}\|x_n^{-1}\|.$$

那末 $$\|e-x_n^{-1}\|=\|x_n^{-1}(x_n-e)\|\leqslant N\|x_n-e\|.$$

因 $\|x_n-e\|\to 0$, 所以 $x_n^{-1}\to e(n\to\infty)$。設一般地 $x_n\to x\in G(R)$, 那末当 n 大于某定数 n_0 时，$x_n\in G(R)$。因 $x_nx^{-1}\to e$, 所以

$$(x_nx_n^{-1})^{-1}\to e,$$

即 $xx_n^{-1}\to e$, 而 $x_n^{-1}=(x^{-1}x)x_n^{-1}=x^{-1}(xx_n^{-1})\to x^{-1}(n\to\infty)$，証完。

定义 7. Banach 代数 R 中子集 J 叫做左(右)幻，是指

1) $J\neq R$;

2) $x\in J, y\in J\Longrightarrow\lambda x+\mu y\in J(\lambda, \mu\in K)$;

3) $y\in J, x\in R\Longrightarrow xy\in J$(或相应地 $yx\in J$)。

既是左幻又是右幻的集叫做兩側幻。

注 在賦范环的情形，沒有区分左、右的必要，簡称幻，由 Θ 一个元組成的集 $\{\Theta\}$ 是一个不足道的兩側幻，叫做零幻。注意，任意多个左(右、兩側)幻的交仍是左(右、兩側)幻。

例 1. 在 Banach 代数 $\mathfrak{E}(E)$ 中，对于固定的元 $x_0\in E$,

$J(x_0)\equiv\{T\mid Tx_0=\Theta, T\in\mathfrak{E}(E)\}$.

是一个左幻，但不是兩側幻。例如按定义 6 下例 3, $U\in I(e_1)$, 但$(UT)(e_1)=e_1$, 从而 $UT\notin J(e_1)$。

例 2. 在 Banach 代数 $C(\Omega)$中，令 $t_0\in\Omega$, 那末 $J(t_0)\equiv\{x\mid x(t_0)==0, x\in C(\Omega)\}$ 是兩側幻。同理，对于 Ω 中任意子集 z,

$$J(z)\equiv\bigcap_{t_0\in z}J(t_0)=\{x\mid t\in z\Longrightarrow x(t)=0, x\in C(\Omega)\}$$

是幻。

例 3. 設 R 是無主單元的 Banach 代数，R' 是由 R 添加主單元 e 而成的 Banach 代数，那末 R 可以看作是 R' 的兩側幻。事实上，在等同 x 与 $x+oe$ 之后，$(x+\lambda e)y=xy+\lambda y\in R, y(x+\lambda e)=yx+\lambda y\in R$。

例 4. 設 $E=L^2[0, 1]$, 那末核 $H(s, t)\in L^2[[0, 1]\times[0, 1]]$ 的积

分算子的全体N[見定义 4 后例 2]是$\mathfrak{S}(E)$中的幻①。

定义 8. 左(右、兩側)幻叫做極大左(右、兩側)幻，是指它不是任何其他左(右、兩側)幻的眞子集。

例 1. 在 $C(\Omega)$中，$J(t_0)=\{x\,|\,x\in C(\Omega), x(t_0)=0\}$ 是極大幻。事实上，取 $y\notin J(t_0)$，卽 $y(t_0)\neq 0$，那末对于任意 $z\in C(\Omega)$，

$$z(t)=\left(z(t)-\frac{z(t_0)}{y(t_0)}y(t)\right)+\frac{z(t_0)}{y(t_0)}y(t),$$

这里，上式右边第一項屬于 $J(t_0)$，第二項是 $y(t)$的倍，故在 $J(t_0)$中添加了 y 后生成整个賦范环 $C(\Omega)$，从而 $J(t_0)$是極大幻。

例 2. 在定义 7 下例 3 是 R^1 中的極大兩側幻。

定理 4. 左(右、兩側)幻的閉包仍是左(右、兩側)幻。每个左(右、兩側)幻必含在一个極大左(右、兩側)幻中。

証 設 J 是左幻，令 $x_0, y_0\in\bar{J}$，那末必存在 $x_n, y_n\in J$，使

$$x_n\to x_0,\quad y_n\to y_0.$$

如果 $\alpha\in K$，$z\in R$，那末 $x_n+y_n\to x_0+y_0$，$\alpha x_n\to\alpha x_0$，$zx_n\to zx_0$。从而 x_0+y_0；αx_0，zx_0 都仍含在 $\bar{J}$ 中。如果 $\bar{J}=R$，那末 $e\in\bar{J}$，卽存在 $x_n\in J$，使 $x_n\to e$。于是依定理 3，当 n 足够大时，x_n 有逆元 x_n^{-1}，从而 $e=x_n^{-1}x_n\in J$，与 J 是幻的假定冲突。

包含一个左幻 J 的一切左幻按包含关系形成一个序集，設 $\{J_\alpha\}$ 是其中一个全序子集，那末容易看出。

$$J_0=\bigcup_\alpha J_\alpha$$

是含 J 的左幻，从而依 Zorn 輔定理，存在一个含 J 的極大左幻。

系 1. 極大左(右、兩側)幻必是閉的。

系 2. 为了 Banach 代数 R 中一元 x 有左(右)逆，必須且只須它不包含在任何極大左(右)幻中。

① 証明略，見 F. Riesz et B. Sz. Nagy[14]，pp. 158—160。

証 1) 設 x 有左逆，那末 $zx=e$。如 x 包含在極大左幻 J 中，那末 $e=zx$ 也含在 J 中，得出矛盾。

2) 設 x 無左逆，那末 $Jx=\{yx \mid y\in R\}$ 不包含 e, 且是一个包含 x 的左幻。依定理 4, 必有一个極大左幻包含 J_x, 从而也含 x。

定理 5. 为了元 x_0 屬于一切極大左幻，必須且只須下面任一条件成立：

(1) 对于任意 $y\in R$, $e+yx_0$ 有左逆；

(2) 对于任意 $y\in R$, $e+yx_0$ 有兩側逆；

(3) 对于任意 $y\in R$, $e+x_0y$ 有兩側逆；

(4) 对于任意 $y\in R$, $e+x_0y$ 有右逆；

(5) x_0 屬于一切極大右幻。

証 設 x_0 屬于一切極大左幻。設存在 $y\in R$, 使 $e+yx_0$ 無左逆，依定理 4 的系，必存在一个極大左幻 J, 使 $J\ni e+yx_0$。但 $x_0\in J$, 所以 $e\in J$, 这不可能。于是(1)成立。反之，設对于任意 $y\in R$, $e+yx_0$ 有左逆。設 x_0 不屬于某極大左幻 J, 那末

$$J'=\{a-yx_0 \mid a\in J,\ y\in R\}\neq R,$$

它或是一左幻包含 J, 而依 J 的極大性，$J'=J$, 但这不可能，因 $x_0\in J'$, $x_0\notin J$。或 $J'=R$, 因而存在 $a\in J$, $y\in R$, 使 $e=a-yx_0$, 即 $a=e+yx_0$。但已設 $e+yx_0$ 有左逆，与 $a\in J$ 矛盾。从而条件(1)也是充分的。

現在証(1)$\Longrightarrow$(2)。設 $e+yx_0$ 有左逆，表此逆为 $e+z$ 的形式，那末 $(e+z)(e+yx_0)=e$, 而 $e+yx_0$ 是 $e+z$ 的右逆，且 $z=-yx_0-zyx_0$。依上面的証明，x_0 屬于一切極大左幻，所以 z 屬于一切極大左幻，从而依上面的証明，$e+z$ 有左逆。但于是这左逆也必等于 $e+yx_0$, 从而 $e+$ $+z$ 是 $e+yx_0$ 的兩側逆。

(2)$\Longrightarrow$(3)：設 $e+yx_0$ 有兩側逆 $e+z$, 那末注意

$$(e+z)(e+yx_0)=(e+yx_0)(e+z)=e,$$

从而

$$\therefore (e-x_0y-x_0zy)(e+x_0y)=e-x_0(z+yx_0+zyx_0)y=e,$$

$$(e+x_0y)(e-x_0y-x_0zy)=e-x_0(z+yx_0+yx_0z)y=e,$$

即 $e-x_0y-x_0zy$ 是 $e+x_0y$ 的兩側逆。

(3)$\Longrightarrow$(4)是显然的。(4)$\Longrightarrow$(5)的証明仿証明的第一部分，同样可以証(5)$\Longrightarrow$(4)$\Longrightarrow$(3)$\Longrightarrow$(2)$\Longrightarrow$(1)，証完。

定义 9. 一切極大左幻的交与一切極大右幻的交是相同的叫做 Banach 代数的根基。当根基$=\{\Theta\}$时，代数称为零根基的代数或半單純代数。

注 依定理 4 的系 2，根基中的元必是特异元。

例 1. 賦范环 $C(\Omega)$ 的根基是 $\{\Theta\}$，因为它的根基含在一切 $J(t)$ 中 $(t\in\Omega)$。

例 2. $K^{(n)}$ 表示一切 n 次的复系数多項式 $x=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$ 的全体，加法定律如常，乘法定义成

$$\sum_{k=0}^{n}a_kz^k\cdot\sum_{k=0}^{n}b_kz^k=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{k}a_{k-l}b_l\right)z^k,$$

范数定义成 $\|x\|=\sum_{k=0}^{n}|a_k|$。那末 $K_1^{(n)}$ 是賦范环，及滿足 $a_0\neq 0$ 的 $\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$ 必有逆，因为用遞推公式 $b_k=-\frac{1}{a_0}(b_0a_k+\cdots+b_{k-1}a_1)$，$k\geqslant 1$，$b_0=1/a_0$，即可得出 $\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$ 的逆元 $\sum_{k=0}^{n}b_kz^k$ 的得数来。但这样則当 $x_0=z$ 时，$(e+yx_0)$ 对一切 $y\in K^{(n)}$ 有逆，从而 x_0 屬于根基，而 $x_0\neq\Theta$，所以 $K^{(n)}$ 的根基包含一切滿足 $a_0=0$ 的元 $\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$。

例 3. $\mathfrak{E}(E)$ 是半單純代数，事实上，如有一非零元 T 屬于根基，那

末$(I+TZ)^{-1}$对于每个$z\in\mathfrak{E}(E)$，存在(I 表示不变算子)。今取$a\in\in E$，使$T_a\neq\Theta$。令$T_a=b$，取E上的有界綫性泛函数f，使$f(b)=1$，令$U(x)=f(x)a$，那末因

$$\|U_x\|=|f(x)|\,\|a\|\leqslant\|f\|\,\|a\|\,\|x\|,$$

从而$U\in\mathfrak{E}(E)$。因$TU(x)=f(x)b$，$UTU(x)=f(x)f(b)\cdot a$，所以$(TU)^2(x)=f(x)b=TU(x)$，即$(TU)^2=TU$。于是令$z=-U$，依上述$(I-TU)^{-1}$存在。但另一方面

$$(I-TU)^2=I-2TU+(TU)^2=I-TU,$$

从而两边乘$(I-TU)^{-1}$，得$I-TU=I$, $TU=\Theta$，与$b\neq\Theta$矛盾。

定义 10. 复数λ叫做属于 Banach 代数R中元a的豫解集$\rho(a)$，或它的譜集$\sigma(a)$，各相应地是指$a-\lambda e$是正則元或特异元。当$\lambda\in\rho(a)$时，$(\lambda e-a)^{-1}$平常表示成$R(\lambda;a)$，叫做a的豫解元。

注 在从数学物理中提出的很多問題中，要求解形如

$$Ax-\lambda x=b$$

的方程，未知元在一个 Banach 空間E中寻找，$A\in\mathfrak{E}(E)$，$\lambda\in K$，b是E中已知元。如果$\lambda\in\rho(A)$，那末对于任意$b\in E$，上面的方程有一意解

$$x=-R(\lambda;A)b.$$

定理 6. 如果$\lambda_0\in\rho(a)$，那末

$$|\lambda-\lambda_0|<[\lim_{n\to\infty}\|R(\lambda_0;a)^n\|^{\frac{1}{n}}]^{-1}\Longrightarrow\lambda\in\rho(a),$$

而且这时

$$R(\lambda;a)=R(\lambda_0;a)-(\lambda-\lambda_0)(R(\lambda_0;a))^2+(\lambda-\lambda_0)^2(R(\lambda_0;a))^3\cdots\cdots$$

注 1) 由此可知$\rho(a)$是开集。

2) 在定理的叙述中已設

$$\lim_{n\to\infty}[\|R(\lambda_0;a)^n\|^{\frac{1}{n}}]$$

存在。事实上，一般在 Banach 代数R中，对于任意元$x\in R$

$$\lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}$$

存在①，并且 $\leqslant\|x\|$，从而

$$[\lim_{n\to\infty}\|R(\lambda_0;a)^n\|^{\frac{1}{n}}]^{-1}\neq 0.$$

3）由此可知，如果 $R(\lambda;a)$ 在 λ_0 处存在，那末 $R(\lambda;a)$ 在 λ_0 的鄰域中是解析的（§5）。事实上，

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{R(\lambda;a)-R(\lambda_0;a)}{\lambda-\lambda_0}=-[R(\lambda_0;a)]^2.$$

証 考察級数 $\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda-\lambda_0|^n\alpha_n$，这里 $\alpha_n=\|R(\lambda_0;a)^{n+1}\|$。如果 $|\lambda-\lambda_0|<\left(\lim_{n\to\infty}\alpha_n^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}$，依复变数函数論中的 Cauchy-Hadamerd 定理，上述級数收斂。絕对收斂級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_0-\lambda)^n(R(\lambda_0;a))^{n+1}$$

决定 R 中一元 z。把这級数乘 $\lambda e-a$，并注意 Banach 代数中的連續性，逐項相乘是合法的。因为

$$\lambda e-a=(\lambda_0 e-a)+(\lambda-\lambda_0)e,$$

容易驗明 $z(\lambda e-a)=(\lambda e-a)z=e$，从而得知 $z=R(\lambda;a)$。

定理 7. 令 a 是 Banach 代数 R 中的一元，令

---

① 更一般地，令 (α_n) 表正数列，并且 $\alpha_{m+n}\leqslant\alpha_m\alpha_n$，那末

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n^{\frac{1}{n}}.$$

存在且 $=\inf_{n>0}\alpha_n^{\frac{1}{n}}$。証明是不难的，参看 Pálya, G and G. Sgego, Aufgaben und Lehrsäze aus der Analysis, S. 171 Auf 8.98。

$$r=\lim_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}},$$

那末当$|\lambda|>r$时，$R(\lambda;a)$存在，并且

$$R(\lambda;a)=\lambda^{-1}e+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n-1}a^n.$$

証 仿定理 6 就可以証明。

系 1. 如 Banach 代数 R 不止含一个元，那末任意元 a 的譜集是不空有界閉集。

証 由定理 6 下的注 1，$\rho(a)$ 是开集，所以其补集 $\sigma(a)$ 是閉集。依定理 7，$\lambda\in\sigma(a)\Longrightarrow|\lambda|\leqslant r=\lim\limits_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}=\inf\limits_{n>0}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant\|a\|<+\infty$，所以 $\sigma(a)$是有界的。假如 $\sigma(a)=\phi$，那末 $R(\lambda;a)$在全复数平面上存在。但依定理 6 下注 3，$R(\lambda;a)$ 成为全平面上的抽象解析函数，所以对于以$\zeta=0$为中心而半徑足够大的圆 Γ，

$$\int_{\Gamma}R(\lambda;a)d\lambda=0.$$

但依 Laurent 展开；这积分应当等于 $2\pi i\cdot e$，从而 $e=\Theta$ 与假定不符，因为已設 R 不止含一个元。証完。

系 2. 設 Banach 代数 R 按它的代数結構是体，那末 R 必与复数域同構。

証 依系 1，对每个 $a\in R$，存在复数 λ，使 $\lambda e-a$ 在 R 中無逆，而既然 R 是体，所以 $\lambda e=a$。所以每个 $a\in R$ 是 e 的倍，即 R 同構于复数域。

系 3. 对于 Banach 代数 R 中任意元 a，

$$\sup_{\lambda\in\sigma(a)}|\lambda|=\lim_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

証 由定理 7 可知

$$\sup_{\lambda\in\sigma(a)}|\lambda|\leqslant\lim_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

設
$$\rho \equiv \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda| < \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$
取 $\varepsilon > 0$, 使
$$\rho + \varepsilon < \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

依定理 6 下的注 3 及 Laurent 展开式，如果用 Γ 表示以 o 为心，以 $\rho+\varepsilon$ 为半徑的圓，那末 Γ 完全在 $\rho(a)$ 中，所以
$$R(\lambda; a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \lambda^n,$$
这里
$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\lambda; a)\lambda^{-n-1} d\lambda.$$

但因 $R(\lambda; a)$ 在 Γ 外是解析的，依 Cauchy 定理，如果 Γ' 表示以 o 为心、以 $r = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} + \varepsilon$ 为半徑的圓，a_n 也等于
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} R(\lambda; a)\lambda^{-n-1} d\lambda,$$
而依定理 7, 对于 $n > 0$, $a_{-n} = a^{n-1}$, 即
$$a^n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda e - a)^{-1}\lambda^n d\lambda.$$
所以
$$\|a^n\| \leqslant \frac{1}{2\pi} 2\pi(\rho+\varepsilon)^{n+1} \max \|(\lambda e - a)^{-1}\|$$
但 $(\lambda e - a)^{-1}$ 在 Γ 上即是解析函数，依 §5, $\|(\lambda e - a)^{-1}\|$ 在 Γ 上有界，从而对于任意 $\varepsilon > 0$,
$$\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \rho + \varepsilon,$$
所以
$$\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \rho.$$
得出矛盾，因此

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

定理 8. 設 x 是 Banach 代数 R 中的任意元，而 $p(x)$ 是 x 的多項式(即形如 $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x^k$ 的元，其中 $\alpha_k\in K$, $x^0=e$)。那末

$$\sigma(p(x))=\{p(\lambda)\,|\,\lambda\in\sigma(x)\}.$$

証 如果 $\lambda\in\sigma(x)$, 那末 $x-\lambda e$ 無逆，从而依定理 4 系 2, 存在一个左幻 J, 使 $x-\lambda e\in J$。于是 $p(x)-p(\lambda)e\in J$(由 $p(x)-p(\lambda)e$ 的因子分解看出)，即 $p(\lambda)\in\sigma(p(x))$。

反之，設 $V\in\sigma(p(x))$, 那末存在左幻 J, 使 $p(x)-Ve\in J$。$p(x)-$ $-Ve$ 可以分解成有穷多个复系数的一次因子的乘积，而这些一次因子中至少有一个無逆，因为否則 $p(x)-Ve$ 也会有逆了。設 $x-\lambda e$ 是 $p(x)-Ve$ 的一个無逆的一次因子。那末存在左幻 J', 使 $x-\lambda e\in J'$, $\lambda\in\sigma(x)$。又 $p(x)-Ve\in J'$。但由 $x-\lambda e\in J'$ 可得 $p(x)-p(\lambda)e\in J'$, 从而 $(V-p(\lambda))e\in J'$。J' 既是左幻，可知 $v=p(\lambda)$。

定理 9. 設 a 是 Banach 代数 R 中的任意元。如 G 是复数平面上含 $\sigma(a)$ 的一个开集，那末必存在 $\varepsilon>0$, 使对于 R 中一切滿足 $\|b-a\|<$ $<\varepsilon$ 的元 b, $\sigma(b)\subset G$。

証 令 F 表示 G 在复数封閉(即包括無穷远点 ∞ 的)平面上的补集，于是 $F\subset\rho(a)$。依定理 7, 当 $\lambda\to\infty$ 时，$R(\lambda;a)\to 0$。于是連續函数 $\|R(\lambda;a)\|$ 在有界閉集 F 上有有穷極大值。令

$$\mu=\max_{\lambda\in F}\|R(\lambda;a)\|$$

并令 $\varepsilon=\frac{1}{\mu}$, 設 $\lambda\in F$, $\|b-a\|<\varepsilon$, 那末因

$$b-\lambda e=b-a+(a-\lambda e)=[(b-a)R(\lambda;a)+e](a-\lambda e)$$

而 $\quad\|(b-a)R(\lambda;a)\|<\varepsilon\mu=1$, 从而 $(b-\lambda e)^{-1}$ 存在，这就是說

$$F\subset\rho(b),\ \text{或}\ G\supset\sigma(b).$$

定义 11. Banach 代数中的元 a 叫做广义幂零元，是指

$$\lim_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}=0.$$

注 广义幂零元 a 也可以定义成满足 $\sigma(a)=\{0\}$ 的元。因此广义幂零元一定是特异元。幂零元显然是广义幂零元，但反之不眞，由下面的例可以看出。

例 設 $E=L[0,1]$, $\mathfrak{R}=\mathfrak{E}(E)$。令 T 表示 Voltera 型算子

$$Tx\equiv\int_0^s H(s,t)x(t)dt,\quad x\in L[0,1],\ 0\leqslant s\leqslant 1,$$

这里 $H(s,t)$ 是三角形区域 $0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1$ 中的連續函数。令

$$\mu=\max_{0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1}|H(s,t)|.$$

令
$$\|x\|=\int_0^1|x(t)|dt.$$

不难証明 $T\in\mathfrak{R}$, 而

$$|(Tx)(s)|=\left|\int_0^s H(s,t)x(t)dt\right|\leqslant M\|x\|,$$

$$|(T^2x)(s)|=\left|\int_0^s H(s,t)(Kx)(t)dt\right|\leqslant M^2\|x\|s,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

一般

$$|(T^nx)(s)|\leqslant\|x\|\mu^n\frac{s^{n-1}}{(n-1)!}(n=1,2,\cdots\cdots).$$

当把 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda^nT^nx$ 与收斂級数

$$\|x\|+\|x\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu^{n+1}\lambda^{n+1}}{n!}$$

比較时，可以看出 $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n T^n x$ 一致收斂(对 λ 来說)。令

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n T^n x,$$

那末
$$\lambda T y = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n T^n x = y - x,$$

即方程

$$(I - \lambda T) y = x.$$

对于一切 x 有解 y。解的一意性也不难証明。因此，对于一切 λ 值，不难驗明，$(I-\lambda T)^{-1}$ 存在。換句話說，对于一切 $\lambda \neq 0$, $(\lambda I - T)^{-1}$ 存在，所以 $\sigma(T) = \{0\}$，即 T 是广义冪零元。

注意 T 不是冪零元：例如取 $H(s, t) = s - t$, 不难驗明，当 $H^{(n)}(s, t)$ 表示算子 T^n 的核时，

$$H^{(n)}(s, t) = \frac{1}{(2n-1)!}(s-t)^{2n-1},$$

从而
$$T_x^n = \int_0^s \frac{1}{(2n-1)!}(s-t)^{2n-1} x(t) dt,$$

即对于一切 $n > 0$, $T^n \neq 0$。

定理 10 为了元 a 是广义冪零元，必須且只須对于一切复数 μ.

$$\lim_{n\to\infty} \mu^n a^n = 0.$$

証 設 a 是广义冪零元，那末 $\sigma(a) = \{0\}$。从而对于一切 $\lambda \neq 0$, $(\lambda e - a)^{-1}$ 存在。換句話說，对于一切复数 μ, $(e - \mu a)^{-1}$存在，既然

$$\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = 0,$$

依定理 7, 对于一切 $\mu \neq 0$,

$$(e-\mu a)^{-1}=\left(\frac{1}{\mu}e-a\right)^{-1}\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\mu}\left[e\mu+\sum_{\lambda=1}^{\infty}a^n\mu^{n+1}\right]=$$

$$=e+\sum_{n=1}^{\infty}\mu^n a^n.$$

这級数既然对于一切 μ 收斂，从而

$$\lim_{n\to\infty}\|\mu^n a^n\|=0.$$

反之設 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu^n a^n=0$, 卽 $\lim\limits_{n\to\infty}|\mu|^n\|a^n\|=0.$

令 $\mu\neq 0$, 那末对于任意 $\varepsilon>0$, 可以取 n 足够大，使

$$|\mu|^n\|a^n\|<\varepsilon,$$

卽

$$\|a^n\|<\frac{\varepsilon}{\mu^n},\quad \sqrt[n]{\|a^n\|}<\frac{\varepsilon^{\frac{1}{n}}}{|\mu|}.$$

令 $n\to\infty$, 可知对于一切 $\mu\neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{|\mu|}.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}=0.$$

系 Banach 代数 R 的根基中的元都是广义羃零元。

証 設 a 屬于根基，那末对于一切 $y\in R$, $(e+ya)^{-1}$ 存在（定理 5),特別令 $y=-\mu e$(μ 表示任意复数)，那末

$$(e-\mu a)^{-1}$$

对于一切 μ 存在，从而依定理的証，a 是广义羃零元。

注 本系的逆命題不成立，事实上，定义 11 下的例中的 T 是 $\mathfrak{E}(E)$ $(E=L[0,1])$中的广义羃零元，但已知 $\mathfrak{E}(E)$是半單純的从而 T 不含在 $\mathfrak{E}(E)$的根基中。

設 $R(\lambda)$表示定义在复数平面上的某个区域上并在 Banach 代数 R 中取值的函数。

方程
$$R(\lambda)-R(\mu)=(\mu-\lambda)R(\lambda)R(\mu) \tag{*}$$
在綫性方程理論中起着重要的作用。

不难看出，如果 λ, μ 屬于元 x 的豫解集 $\rho(x)$，則豫解元 $R(\lambda; x)$ 滿足方程(*)。事实上，

$$\begin{aligned}R(\lambda;x)=R(\lambda;x)(\mu e-x)R(\mu;x)=\\ =R(\lambda;x)(\mu e-\lambda e+\lambda e-x)R(\mu;x)=\\ =R(\lambda;x)(\mu-\lambda)R(\mu;x)+R(\mu;x);\end{aligned}$$

从而 $R(\lambda;x)$ 滿足(*)。

是否滿足(*)的 $R(\lambda)$ 一定是某元的豫解元呢？为了(*)的解 $R(\lambda)$ 是 R 中某元的豫解元 ($\lambda\in\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}$ 为复平面中某区域)，必須且只須 $R(\lambda)$ 对于 $\lambda\in\mathfrak{D}$ 有逆元。事实上，条件的必要性是显然的，反之，設对于 $\mu\in\mathfrak{D}$, $[R(\mu)]^{-1}$ 存在。令 $x=\mu e-[R(\mu)]^{-1}$。

于是
$$\lambda e-x=(\lambda-\mu)e+[R(\mu)]^{-1}.$$

既然 $R(\lambda)$ 是(*)的解，可知
$$(\lambda-\mu)R(\lambda)R(\mu)=R(\mu)-R(\lambda),$$

于是
$$(\lambda-\mu)R(\lambda)=e-R(\lambda)R(\mu)^{-1},$$

卽
$$R(\lambda)[(\lambda-\mu)e+R(\mu)^{-1}]=e.$$

同理
$$[(\lambda-\mu)e+R(\mu)^{-1}]R(\lambda)=e,$$

卽 $R(\lambda)$ 是元 $x\equiv\mu e-R(\mu)^{-1}$ 的豫解元。

如果 R 中一个冪等元 y 与方程(*)的解 $R(\lambda)$ 交換，那末 $yR(\lambda)$ 仍是(*)的解。事实上，既然 $y^2=y$，可知

$$\begin{aligned}yR(\lambda)-yR(\mu)=(\mu-\lambda)yR(\lambda)R(\mu)=\\ =(\mu-\lambda)y^2R(\lambda)R(\mu)=(\mu-\lambda)yR(\lambda)yR(\mu).\end{aligned}$$

定理 11 方程(*)的每个在單位圓外有界的解必可表示成如下形狀：

$$R(\lambda)=z+jR(\lambda;x),$$

这里

$$z^2=\Theta,\quad j^2=j,\quad zj=jz=\Theta,\quad xj=jx=x.$$

証　如 $R(\lambda)$对于某 λ_0 的附近的值满足方程$(*)$，那末由 $(*)$得出

$$R(\lambda)[e+(\lambda-\lambda_0)R(\lambda_0)]=R(\lambda_0),$$

从而当 $|\lambda-\lambda_0|<\|R(\lambda_0)\|^{-1}$ 时，$R(\lambda)$ 可以展成 $\lambda-\lambda_0$ 的冪級数，即 $R(\lambda)$是在 λ_0 的附近解析的函数。又因为它在無穷远处是有界的，所以它在無穷远处也是解析的，于是在無穷远点附近，$R(\lambda)$ 可以展成級数

$$R(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\lambda^{-n}.$$

把这式代入方程$(*)$，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n\lambda^{-n}-\sum_{n=0}^{\infty}C_n\mu^{-n}=(\mu-\lambda)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}C_n\lambda^{-n}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}C_n\mu^{-n}\Big).$$

于是得(注意$(\lambda^{-n}-\mu^{-n})(\lambda-\mu)^{-1}=-(\lambda^{-n}-\mu^{-n})\lambda^{-1}\mu^{-1}(\lambda^{-1}-\mu^{-1})^{-1}$)

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(\lambda^{-n}\mu^{-1}+\lambda^{-n+1}\mu^{-2}+\cdots+\lambda^{-n}\mu^{-n})=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\lambda^{-n}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}C_n\mu^{-n}.$$

比較同次冪項的系数，得出

$$C_iC_j=C_jC_i\quad(i,\ j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),$$

$$C_0^2=0,\ C_0C_k=0(k=1,\ 2,\ \cdots),\ C_1^2=C_1,$$

$$C_n=C_{n-j}C_{j+1}(n>1,\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1).$$

于是得出

$$C_n=C_2C_{n-1}=(C_2)^2C_{n-2}=\cdots=C_2^{n-1}(n>1).$$

令　　$C_0=z,\ C_1=j,\ C_2=x,$

于是因 $C_1C_2=C_{2-1}C_{1+1}=C_2$，可知 $z,\ j,\ x$ 满足定理中的要求，并且

$$R(\lambda)=z+j\lambda^{-1}+x\lambda^{-2}+x^2\lambda^{-3}+\cdots=$$

$$=z+j\lambda^{-1}+jx\lambda^{-2}+jx^2\lambda^{-3}+\cdots=z+jR(\lambda;x),$$

而定理証完。

定理 12 設 $R(\lambda)$ 是方程 (*) 的解，并且在环形区域

$$0 \leqslant r_1 < |\lambda| < r_2 \leqslant +\infty,$$

中解析，于是 $R(\lambda)$ 可以分解成下列形式：

$$R(\lambda) = R_-(\lambda) + R_+(\lambda),$$

这里 $R_-(\lambda)$，$R_+(\lambda)$ 满足下列条件：

1) $R_-(\lambda)R_+(\lambda) = R_+(\lambda)R_-(\lambda) = 0$;

2) $R_-(\lambda)$ 与 $R_+(\lambda)$ 也是方程(*)的解；

3) $R_-(\lambda)$ 在区域 $|\lambda| > r_1$ 中是解析的，并且可以表示成

$$R_-(\lambda) = jR(\lambda;\ x_-),$$

这里

$$j^2 = j,\ x_- j = j x_- = x_-,$$

如果 $r_1 = 0$，元 x_- 是广义幂零元；

4) $R_+(\lambda)$ 在区域 $|\lambda| < r_2$ 中是解析的，并且可以表示成

$$R_+(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n x_0^{n+1},$$

这里

$$x_0(e-j) = (e-j)x_0 = x_0.$$

证： 設

$$R(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \lambda^n$$

是 $R(\lambda)$ 在环形区域中的 Laurent 展开。代入(*)，得

$$\sum_{-\infty}^{\infty} C_n \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu} = -\sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} C_k C_m \lambda^k \mu^m,$$

上式左边 C_n 的系数是

$$\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}\mu + \cdots \mu^{n-1}, \qquad \text{如果 } n \geqslant 1,$$

$$\begin{cases} 0 & \text{如果 } n=0, \\ -(\lambda^n\mu^{-1}+\lambda^{n+1}\mu^{-2}+\cdots+\lambda^{-1}\mu^n) & \text{如果 } n<0. \end{cases}$$

于是比較兩方的系数，得出 $C_kC_m=C_mC_k=-C_{m+k+1}$（一切 k, m）。注意左边沒有 k, m 具不同符号的項 $\lambda^k\mu^m$，从而

$$C_kC_m=\Theta(k\geqslant 0, m\leqslant -1). \qquad (**)$$

今令
$$R_+(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\lambda^n,\ R_-(\lambda)=\sum_{-\infty}^{-1}C_n\lambda^n,$$

从而
$$R(\lambda)=R_+(\lambda)+R_-(\lambda),$$

而由(**)可知定理中条件 1）滿足。$R_+(\lambda)$滿足方程(*)：

$$(\mu-\lambda)R_+(\lambda)R_+(\mu)=(\mu-\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}C_n\lambda^n\cdot\sum_{m=0}^{\infty}C_m\lambda^m=$$

$$=(\mu-\lambda)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_kC_m\lambda^k\mu^m\Big)=$$

$$=-(\mu-\lambda)\sum_{0}^{n}C_n(\lambda^{n-1}+\mu\lambda^{n-2}+\cdots+\mu^{n-1})=$$

$$=\sum_{0}^{\infty}C_n(\lambda^n-\mu^n)=R_+(\lambda)-R_+(\mu).$$

同理 $R_-(\lambda)$也滿足(*)。

$R_-(\lambda)$在無穷远处是解析的，并取值 Θ，从而依定理 1，

$$R_-(\lambda)=jR(\lambda;x_-),$$

这里
$$x_-j=jx_-=x_-,\quad j^2=j=C_{-1},$$

因为$\lambda\to\infty$时，$R_-(\lambda)\to\Theta$，即 $z=\Theta$。定义 $R(\lambda;x_-)$ 的級数在区域 $|\lambda|>r_1$ 中收斂，而如果 $r_1=0$，必然 $R(\lambda;x_-)$到处存在，从而

$$\lim_{n\to\infty}\|(x_-)^n\|^{\frac{1}{n}}=0,$$

即 x_- 是广义幂零元。

最后 $R_+(\lambda)$是在 $\lambda=0$ 处解析的，并且

$$R_+(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^n x_0^{n+1},\ x_0=C_0,$$

因为 $$C_n=-C_{n-1}C_0=C_{n-2}(-C_0)^2=\cdots=(-C_0)^n.$$

由 $R_+(\lambda)R_-(\lambda)=R_-(\lambda)R_+(\lambda)$可知 $jx_0=x_0j=\Theta$, 由此

$$(e-j)x_0=x_0(e-j)=x_0.$$

証完。

定理 13. 設 J 是 Banach 代数 R 中的閉兩側幻。在剩余环 R/J 中定义范数

$$\|X\|=\inf_{x\in X}\|x\|(X\in R/J). \tag{2}$$

这样 R/J 仍是 Banach 代数，并且当 R 含主單位元 e 时，R/J 也含主單位元，这正是 R/J 中含 e 的那个剩余类。

証 因閉兩側幻必是閉綫性子空間，由 Banach 空間理論已知 R/J 賦以范数(2)确是 Banach 空間。現在只須証

$$\|XY\|\leqslant\|X\|\|Y\|.$$

并且 R/J 中含主單位元 e 的那个剩余数 E 滿足$\|E\|=1$。事实上，

$$\|XY\|=\inf_{\substack{x\in X\\ y\in Y}}\|xy\|\leqslant\inf_{\substack{x\in X\\ y\in Y}}\|x\|\|y\|=\inf_{x\in X}\|x\|\inf_{y\in Y}\|y\|=\|X\|\cdot\|Y\|.$$

又如 $e\in E$, 依定义$\|E\|\leqslant\|e\|=1$。如$\|E\|<1$, 那末必存在 $x\in E$, 使$\|x\|<1$，但这样則 $e-x$ 是一正則元，与 $e-x\in J$ (J 是幻)矛盾。因此$\|E\|==1$。

注 因$\|X\|\leqslant\|x\|(x\in X)$，所以代数的同态 $x\to X$ 也是由 R 到 R/J 上的連續映象。

下面主要考察賦范环，这时，Banach 代数一般理論中的結果可以深刻和簡化。这时無須区分左、右，只須簡單地演"幻"，"逆"等等。

定理 14. 为了赋范环 R 中的幻 J 是極大幻，必須且只須剩余类环 R/J 同構于复数域。

証 1) 設 R/J 同構于复数域。設 J_1 是 R 中含 J 的幻。在 $R\to R/J$ 的"典范映象"(即把 R 中每个元映成 R/J 中含那个元的剩余类)之下，J 变成 R/J 中的幻，既然 R/J 是域，只能有 $J_1=J$，从而 J 是極大幻。

2) 設 J 是極大幻、R/J 沒有异于零的幻，否則設 N 是 R/J 的幻，而 τ 表示由 R 到 R/J 上的典范映象，那末 $\overset{-1}{\tau}(N)$ 是 R 中的幻，并且包含 $\overset{-1}{\tau}(\{\Theta\})=J$，从而只能有

$$\overset{-1}{\tau}(N)=\overset{-1}{\tau}(\{\Theta\}),\ \text{即}\ N=\tau(J)=\{\Theta\}.$$

依定理 4 系 2，R/J 中每个非零元有逆，即 R/J 是域。依定理 7 系 2，R/J 同構于复数域。

注 設 τ 如定理 14 的証明中所指，表示由 R 到 $R/J\cong K$ 上的同态(J 是一个極大幻，K 为复数域)。現在把 R/J 中的元与它在 K 中的象等同，那末 $\tau(x)$ 可以看成是定义在 R 上的一个泛函数。依同态关系得：对于 $x_1, x_2\in R$, $\alpha\in K$,

$$\tau(x_1+x_2)=\tau(x_1)+\tau(x_2),\quad \tau(\alpha x)=\alpha\tau(x),$$

$$\tau(x_1+x_2)=\tau(x_1)\tau(x_2),\quad \tau(0)=0,\ \tau(e)=1.$$

这样，与極大幻 J 相应的泛函数 τ，表成 fJ，是一个綫性泛函数，并且是"乘法"的。設有兩个不同的極大幻 M_1, M_2，那末必存在 $x\in M_1$, $x\notin M_2$。于是

$$f_{M_1}(x)\neq f_{M_2}(x)\ \text{即}\ f_{M_1}\neq f_{M_2}.$$

注意 $f_{M_1}(x)$ 表示滿足 $x-\lambda e\equiv 0(\mathrm{mod}\ M_1)$ 的那个复数 λ，因为

$$f_{M_1}(x-\lambda e)=0\Longleftrightarrow f_{M_1}(x)=f_{M_1}(\lambda e)=\lambda.$$

因此，有时把 $f_{M_1}(x)$ 表示成 $x(M_1)$。

定义 12. 赋范环 R 上的綫性泛函数 f 叫做乘法的，是指它滿足条件：$x_1, x_2\in R\Longrightarrow f(x_1x_2)=f(x_1)f(x_2)$。

注 1) 乘法有界綫性泛函数实在就是由 R 到 K 上的連續同态。

2) 設 x 是賦范环 R 中的元，而 $\lambda \in K$，为了存在極大幻 M，使 $x(M)=\lambda$，必須且只須 $\lambda \in \sigma(x)$。事实上，为了 $x(M)=\lambda$，必須且只須 $x-\lambda e \in M$，就是說，为了存在極大幻 M 使 $x(M)=\lambda$，必須且只須 $x-\lambda e$ 無逆，卽 $\lambda \in \sigma(x)$。

3) 令 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(R)$ 表示賦范环 R 的一切極大幻全体，那末对于每个 $x \in R$,

$$\sup_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)| = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

事实上，依上面的 2)，$\sigma(x)=\{x(M) \mid M \in \mathfrak{M}\}$，从而依定理 7 的系 3，就得出上式来。

4) 賦范环的根基恰是由环中的一切广义冪零元所組成。事实上，为了 x 屬于根基，必須且只須 x 含在一切極大幻中，卽 $x(M)=0$ 对于一切 $M \in \mathfrak{M}$ 成立，而依 3) 这必須且只須

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}=0.$$

5) 对于賦范环 R 中極大幻 M 及 $x \in R$，必然 $|x(M)| \leqslant \|x\|$。事实上，因 $\|x^n\| \leqslant \|x\|^n$，从而

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \|x\|.$$

定理 15. 設 x 是賦范环 R 中的元。設 $F(\lambda)$ 是定义在一个含 x 的譜 $\sigma(x)$ 的复数区域 G 中的复值解析函数，那末必存在 $y \in R$，使对于一切 $M \in \mathfrak{M}(R)$，

$$y(M)=F(x(M)).$$ [1]

証 取 Γ 为 G 中环繞閉集 $\sigma(x)$ 的一个閉可度長曲綫，那末对于一切 $\lambda \in \Gamma$，$(x-\lambda e)^{-1}$ 是 λ 的連續函数（定理 3）。于是依 §6，积分

---

[1] 这定理首先由 P. Lévy 就特殊的賦范环 W 得出的。

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} F(\lambda)(\lambda e-x)^{-1}d\lambda$$

存在，并且是 R 中的一元 y。既然对于 Γ 所圍繞的区域內的任意点 μ，

$$F(\mu)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} F(\lambda)(\lambda-\mu)^{-1}d\lambda,$$

特别对于每个 $M\in\mathfrak{M}(R)$，由于 $x(M)$ 是屬于 x 的譜的点，从而含在 Γ 所圍繞的区域內，必然

$$y(M)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} F(\lambda)[\lambda-x(M)]^{-1}d\lambda=F(x(M)).$$

系　在定理 13 的假定下，如果还設 $x(M)$ 对于一切 $M\in\mathfrak{M}(R)$ 都不等于 0，那末必存在 $y\in R$，使

$$y(M)=\frac{1}{x(M)}.$$ [②]

証　因已知

$$\sigma(x)=\{x(M)\,|\,M\in\mathfrak{M}(R)\}$$

是閉集，所以如每个 $x(M)$ 的值不等于 0，那末 0 不是 $\sigma(x)$ 的附着点，所以有一个含 $\sigma(x)$ 而不含 0 的区域，在其中 $\frac{1}{\lambda}$ 是解析的，从而由定理 13 立刻推出本系来。

下面举出几个常用的具体賦范环的一切極大幻来。

定理 16. 为了 M 是 $C(\Omega)$ 中的極大幻，必須且只須存在一个点 $t_0\in\Omega$，使

$$M=\{x\,|\,x\in C(\Omega),\ x(t_0)=0\}. \tag{3}$$

証　在定义 8 下的例 1 中，已經証明凡形如(3)的集确是 $C(\Omega)$ 中的極大幻。反之，設 M 是 $C(\Omega)$ 的一个極大幻。我們只須証明存在一点 $t_0\in\Omega$，使 $x\in M\Longrightarrow x(t_0)=0$，因为依定义 7 下例 2 可知在这条件

② 这結果首先是由 N. Wiener 就特殊环 W 得出的。

FM一定作(3)的形式，否则这幻M就不是極大的了。如果如上的t_0不存在，那末对于每个$t\in\Omega$，必存在$x_t\in M$，使$x_t(t)\neq 0$。于是存在t的一个鄰域$U(t)$，使对于每个$s\in U(t)$，$|x_t(s)|>\varepsilon$，ε表示一个任意固定的正数。由于Ω是紧(T_2)型空間(例如是一个实数直綫上的閉区間)依 Borel–Lebesgue 定理可以取有穷多个点$t_1,\cdots,t_n\in\Omega$，使

$$\Omega=\bigcup_{i=1}^{n}U(t_i).$$

由于M是幻，函数

$$z(s)=\sum_{i=1}^{n}|x_{t_i}(s)|^2=\sum_{i=1}^{n}x_{t_i}(s)\cdot x_{t_i}(s).$$

必含在M中，而对于每个$s\in\Omega$，$\exists i$，使$s\in U(t_i)$从而

$$z(s)\geqslant|x_{t_i}(s)|^2>\varepsilon^2>0.$$

于是$\frac{1}{z(s)}\in C(\Omega)$，从而如$e$表示在$\Omega$上恒等于1的函数，则

$$e(s)=z(s)\cdot\frac{1}{z(s)}\in M，由是\ M=C(\Omega).$$

这与M是幻冲突。証完。

定理 17. 为了賦范环W上的綫性泛函数f是由一个極大幻M决定的：$f=f_M$，必須且只須存在$t_0\in[-\pi,\pi]$，使对于每个元

$$x=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\xi_n e^{int}\in W,$$

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\xi_n e^{int_0}.$$

証 設f是由極大幻M决定的綫性泛函数，从而是乘法的。令

$$f(e^{it})=\rho e^{it_0}.$$

那末对任意整数n，

$$f(e^{int})=\rho^n e^{int_0},\ \text{而}\ \rho^n=|f(e^{int})|\leqslant\|e^{int}\|_1,$$

因为对于 $f=f_M$, 由定义12下的注 3) 5), 可知 $|f(x)|\leqslant\|x\|$，从而 $\|f\|\leqslant$ $\leqslant 1$, 这里

$$\|x\|_1=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\xi_n|,\ \text{如}\ x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi_n e^{int},$$

从而特别 $\|e^{int}\|_1=1$。因在不等式

$$\rho^n\leqslant 1$$

中 n 是任意正負整数，只能 $\rho=1$。于是对于任意自然数 N,

$$f\left(\sum_{n=-N}^{+N}\xi_n e^{int}\right)=\sum_{n=-N}^{N}\xi_n e^{int_0}.$$

但如果令 $y_N=\sum_{n=-N}^{N}\xi_n e^{int}$, 那末 $y_N\in W$, 而且 $\|y_N-x\|_1\to 0\ (N\to$ $\to\infty)$，从而由于 f 的連續性可知

$$f\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\xi_n e^{int}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi_n e^{int_0}.$$

反之，
$$f\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi_n e^{int}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi_n e^{int_0}\,(t_0\in[-\pi,\pi]).$$

显然确定 W 上的一个綫性泛函数，其范数 $\leqslant 1$。因

$$\sum_n\xi e^{int_0}\cdot\sum\eta_n e^{int_0}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\xi_{n-k}\eta_k\right)e^{int_0},$$

所以 f 是乘法的，令 $M=\{x\,|\,f(x)=0,\ x\in W\}$，不难驗明 M 是極大幻，証完。

系 1. 为了对于 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\xi_n e^{int}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\xi_n|<+\infty\right)$ 可以找到一个

級数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_n e^{int} \in W$ 使

$$\sum_n \eta_n e^{int} \cdot \sum_n \xi_n e^{int} \equiv 1 \left(一切 t 及 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\eta_n| \infty < +\infty \right).$$

必須且只須函数

$$x(t) \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi_n e^{int}.$$

在 $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ 中遍处不等于零。

証 这只是説明在 W 中为了元 x 有逆，必須且只須 x 不屬于 W 中的任何極大幻。

注 这正是 Wiener 定理。注意 $\mathfrak{W}$ (W) 与 $[-\pi, \pi]$ 或与單位圓周成一一对应。以后可以看到这对应还具更深刻的意义。

系 2. 設函数 $x(t)$ 的 Fourier 級数絕对收斂，而 $x(t)$ 的值在圓 $|\zeta-\zeta_0|<\rho$ 中，設 $f(\zeta)$ 是在这个圓中正則的复变数函数。那末 $\rho(x(t))$ 的 Fourier 級数也絕对收斂。

証 这是定理 15 的直接結果。

注 这就是 P. Lévy 定理。

定理 18. 为了 f 是由賦范环 $V(a)$ 中一个極大幻 M 决定的乘法綫性泛函数，并且

$$\overset{-1}{f}(\{0\}) \neq L(-\infty, \infty),$$

必須且只須存在实数 s，使（e 表示 $V^{(a)}$ 中的"形式"主單位元）：

$$f(\lambda e + x) = \lambda + \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{ist} dt, \; x \in L(-\infty, \infty).$$

証 **充分性** 設

$$f(\lambda e+x)=\lambda+\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{ist}dt.$$

現在証明 $f(\lambda e+x)$是 $V^{(\alpha)}$ 上的乘法綫性泛函数，因由此仿前定理的証明就可知 f 与 $V^{(\alpha)}$的一个極大幻相应了。为此，只須証明 f 的乘法性，因为它的綫性是显然的，令 $z=x^*y$, 那末

$$z(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-s)y(s)ds,$$

所以　　$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty}z(t)e^{ist}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ist}dt\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)y(\tau)d\tau.$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}y(\tau)e^{ist}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}e^{is(t-\tau)}x(t-\tau)dt=f(x)f(y),$$

这里的积分次序的改换是容許的，因为右边积分都收斂。也不难看出，$\|f\|\leqslant 1$。

必要性　設 f 是 $V^{(\alpha)}$ 中極大幻M决定的乘法泛函数。我們要表示出 f 在每个 $x\in V^{(\alpha)}$处所取的值。为此，先从形狀特殊的函数出發，例如取

$$g_{\alpha}(t)=\begin{cases}1 & 如果\ 0\leqslant t\leqslant\alpha,\\ 0 & 如果\ t\notin[0,\ \alpha].\end{cases}$$

那末 $g_{\alpha}(t)\in L$。我們設 $f(g_{\alpha}(t))=\varphi(\alpha)$有导数 $\varphi'(\alpha)$, 滿足 $\varphi'(\alpha+\beta)=\varphi'(\alpha)+\varphi'(\beta)$。事实上，考察

$$h(t)=\frac{g_{(\alpha+\Delta\alpha)}(t)-g_{\alpha}(t)}{\Delta\alpha}\cdot g_{\beta}(t),$$

这里設 $\beta>\Delta\alpha>0$, $h(t)$ 的第一因子是$[\alpha,\alpha+\Delta\alpha]$的特征函数的$\frac{1}{\Delta\alpha}$倍，而第二因子是$[0,\beta]$的特征函数，从而 $g_{\beta}(t-s)$当 t 固定时是 $[\tau-\beta, t]$ 的特征函数。所以在定义 $h(t)$的积分式

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} g_\beta(t-s)\cdot\frac{g_{\alpha+\Delta\alpha}(s)-g_\alpha(s)}{\Delta\alpha}ds$$

里，如 $t\leqslant\alpha$，被积分项$=0$；而当 t 由 α 变到$\alpha+\Delta\alpha$时，积分值等于$\frac{t-\alpha}{\Delta\alpha}$；当 t 由 $\alpha+\Delta\alpha$ 增加到 $\alpha+\beta$ 时，积分等于

$$\int_\alpha^{\alpha+\Delta\alpha}\frac{1}{\Delta\alpha}dt=1;$$

当 t 由 $\alpha+\beta$ 增加到 $\alpha+\beta+\Delta\alpha$ 时，积分值等于

$$\frac{\alpha+\Delta\alpha-(t-\beta)}{\Delta\alpha}(\because t-b\geqslant\alpha)$$

最后当 $t\geqslant\alpha+\beta+\Delta\alpha$ 时，积分等于 0，这里推理的示意圖及 $h(t)$ 的圖表示在下面；

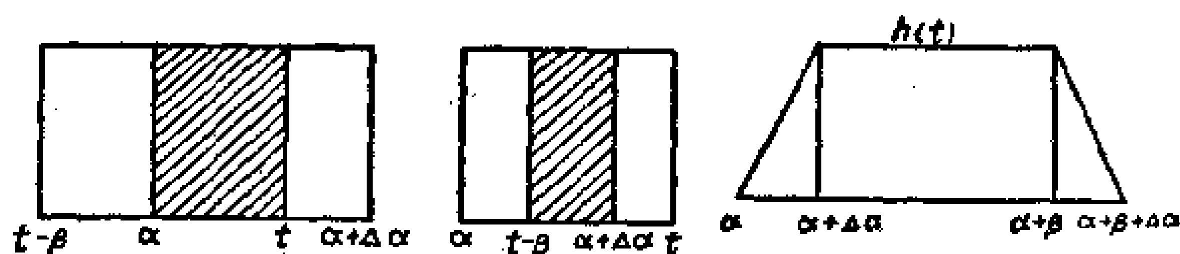


圖 3.

当 $\Delta\alpha\to 0$ 时，

$$\|h-[g_{\alpha+\beta 0}-g_\alpha]\|\leqslant\int_\alpha^{\alpha+\Delta\alpha}dt+\int_{\alpha+\beta}^{\alpha+\beta+\Delta\alpha}dt\to 0.$$

所以当 $\Delta\alpha\to 0$ 时，$h\to g_{\alpha+\beta}-g_{\alpha}$。但由于 f 的乘法性，

$$f(h)=\frac{\varphi(\alpha+\Delta\alpha)-\varphi(\alpha)}{\Delta\alpha}\cdot\varphi(\beta),$$

而
$$f(g_{\alpha+\beta}-g_\alpha)=\varphi(\alpha+\beta)-\varphi(\alpha).$$

既然 f 是連續的，所以

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\varphi(\alpha+\Delta\alpha)-\varphi(\alpha)}{\Delta\alpha}\cdot\varphi(\beta)=\varphi(\alpha+\beta)-\varphi(\alpha).$$

我們分辨兩种情形:

1° 一切 $\varphi(\beta)=0$, 从而 $\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)=0$, 所以对于一切数 α, $f(g_\alpha(\vartheta))=0$。但 g_α 的綫性組合所組成的集在 L 中稠，所以对于一切 $x\in L$, $f(x)=0$。这情形我們不必考察。

2° 設有一数 β_0 使 $\varphi(\beta_0)\neq 0$, 那末

$$\varphi'(\alpha)=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\varphi(\alpha+\Delta\alpha)-\varphi(\alpha)}{\Delta\alpha}$$

存在，并且等于

$$\frac{\varphi(\alpha+\beta_0)-\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta_0)},\quad \text{而}\ \varphi'(\alpha)\varphi(\beta_0)=\varphi(\alpha+\beta_0)-\varphi(\alpha), \tag{4}$$

按 β_0 取导数，可知

$$\varphi'(\alpha)\varphi'(\beta_0)=\varphi'(\alpha+\beta_0). \tag{5}$$

但由(4)可知 $\varphi'(\alpha)$是 α 的連續函数，所以由(5)可知[①] 存在常数的 s_0, 使

$$\varphi'(\alpha)=e^{i\alpha s_0}.$$

因

$$\left|\frac{\varphi(\alpha+\Delta\alpha)-\varphi(\alpha)}{\Delta\alpha}\right|\leqslant\left|\left|\frac{g_{\alpha+\Delta\alpha}(t)-g_\alpha(t)}{\Delta\alpha}\right|\right|=\int_\alpha^{\alpha+\Delta\alpha}\frac{1}{\Delta\alpha}dt=1,$$

从而

$$|\varphi'(\alpha)|\leqslant 1.$$

因此 s_0 必是实数。又因 $\varphi(0)=0$, 可知

$$\varphi(\alpha)=\frac{e^{i\alpha s_0}-1}{is_0},$$

$$f(g_\alpha)=\frac{e^{i\alpha s_0}-1}{is_0}=\int_{-\infty}^{\infty}g_\alpha(t)e^{ist_0}dt.$$

既然每个 $x\in L$ 是一串 $g_\alpha(t)$ 的綫性組合的極限(按 L 中收斂)，可知对于每个 $x\in L$,

① 参看 Б. И. Левитан, 概周期函数第一章 § 6, 輔定理 1.6.5。

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{i\tau_0 t}dt,$$

証完。

系 1. 設 $x(t)\in L(-\infty,+\infty)$。設

$$F(\alpha)=\beta+\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{i\alpha t}dt\ (\alpha\text{ 是实数},\ \beta\text{ 是复数})$$

为了$\frac{1}{F(x)}$也可以表示成上述的积分形式

$$\frac{1}{F(\alpha)}=r+\int_{-\infty}^{\infty}y(t)e^{i\alpha t}dt\ \ (y\in L(-\infty,+\infty)),$$

必須且只須对于一切 α, $F(\alpha)\neq0$, 幷且 $\beta\neq0$,

証 这只是說明在賦范环 $V^{(\alpha)}$中，为了一个元有逆，必須且只須它不屬于任何極大幻。

系 2. 設 $X(s)$ 是 $x(t)\in L(-\infty,+\infty)$的 Fourier 变式，而 $F(z)$ 是一个在 $x(s)$的值域的閉包中正則的解析函数，幷且 $F(0)=0$。那末 $Y(s)=F(X(s))$也必是 $L(-\infty,+\infty)$中某函数 $y(t)$ 的 Fourier 变式。

証 当把 x 看成 $V^{(\alpha)}$中的元时，x 的譜 $\sigma(x)$是集。

$$\sigma(x)=\{x(s)\mid-\infty<s<+\infty\}\cup\{0\}.$$

依 Fourier 积分的 Riemann-Lebesgue 定理可知

$$\lim_{s\to\pm\infty}X(s)=0.$$

依假定，$F(z)$ 在一个含 $\sigma(x)$ 的区域中正則。依定理 13, 存在元 $\lambda e+$ $+y\in V(a)$, 使对于一切由極大幻决定的乘法泛函数 f,

$$f(\lambda e+y)=F(f(x)),$$

即

$$\lambda+f(y)=F(x(s)).$$

既然設 $F(0)=0$, 当 $s\to\pm\infty$ 时，上式右边$\to0$, 左边$\to\lambda$, 因为 $f(y)=$ $=Y(s)$ 是 $y(t)$ 的 Fourier 变式。所以$\lambda=0$, 从而

$$f(y)=F(f(x))$$

对于一切由極大幻决定的乘法綫性泛函数 f 成立。

注 系 1, 2 仍是 Wiener 与 Lévy 定理

系 3. $V(a)$是半單純賦范环。

証 依定理 16, 这不过是 Fourier 变式中一意性定理[①]的另一陈述。

習 題 七

1. 利用 Banach 代数理論，証明下列事实，設 A 是由 Banach 空間 E 到 E 中的有界綫性算子，而 A^{-1} 也是有界的，設 B 也是由 E 到 E 中的綫性算子，满足 $\|B\|<\|A^{-1}\|^{-1}$，那末 $(A+B)^{-1}$ 是有界綫性算子，并且

$$\|(A+B)^{-1}-A^{-1}\|<\frac{\|A^{-1}\|^2\|B\|}{1-\|A^{-1}\|\,\|B\|}.$$

2. 在 Hilbert 空間 $(\mathfrak{H})$ 中的一切有界綫性算子，所組成的 Banach 代数 $\mathfrak{S}(\mathfrak{H})$ 中，求証

$$\lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{\frac{1}{n}}=\|A\|\quad(A\in\mathfrak{N}(\mathfrak{S})).$$

由此推出，

$$\|A\|=\sup_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|.$$

提示 先証在 $\mathfrak{S}(\mathfrak{H})$ 中，

$$\|A^*A\|=\|A\|^2.$$

(由此証明 $\|A^n\|=\|A\|^n$。

参 考 文 献

[1] Ахиезер, Н. И.: Лекции по теории аппроксимации, М. Л. 1947, 1—323.

[2] Bochner, S. and Chandrase Kharan, K.: Fourier transfums, Annals of Math; Studies 1948.

[3] Гельфанд, И. М,: О Нормированных кольцах ДАН СССР 23 (1939), 430—432.

① 例如見 Bochner-chandrusekhoran[2], 第一章 § 6。

[4] Гельфанд, И. М. Обсабсолютно сходящихся тригонометрических рядах, и интегралах, ДАН СССР 25 (1939), 571—574.

[5] Гельфанд, И. М.: Normierte Ringa, Re C. Math 9 (1941), 1—23.

[6] Гельфанд, И. М.: Über absolut Konvergente trigonometrische Reihe unel Integrale, матем. сб. 9 (1941), 51—65.

[7] Гельфанд, И. М., Райков Д. А. и Шилов, Г. Е.: Коммутативные нормированные кольца, Успехи матем. наук, 1:2(1946), 48—146.

[8] 关肇直与田方增: 賦范环論, 数学进展 1 (1955). 223—363.

[9] Lévy, P.: Sur la Convergence absolue des Séries de Fourier, Comp. Math. 1 (1943), 1—14.

[10] Loomis, L. H.: An introduction to abstract harmonic analysis, New York, 1953 (有俄譯本 1956).

[11] Lorch, E. R.: The Stucture of normed abelian rings, Bull, Amer, Math, Soc. 50 (1944), 447—463.

[12] Mazur, S.: Sur les an neaur linéaires, C. R. Acad Sc. Paris, 207 (1938), 1025—1027.

[23] Наймарк, М. А.: Нормированные кольца, 1956.

[14] Riesz, F. et Sz. Nagy, B.: Leçons d'analyse fonctionelle, 1ᵉ éd. 1952 2ᵉ éd 1953, (俄譯本与英譯本)。

[15] Wiener, N.: The Fourier integrals and Certain of its applications, 1933.

[16] 吉田耕作: 位相解析, I. 1952.

§8. 全連續綫性算子 Riesz—Szauder 理論

D. Hilbert 在最初为了研究积分方程理論而引入 Hilbert 空間的概念时，乃是引入可数基，从而綫性积分方程

$$x(s)-\int_0^1 K(s,t)x(t)dt=y(t),$$

引出無穷变数方程組

$$\xi_i - \sum_{k=1}^{\infty} K_{ik}\xi_k = \eta_i$$

及相应的二次齐式

$$\sum_{ik} K_{ik}\xi_i\xi_k$$

来。对于这样的無穷多变量 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots)$ $(\in (l^2))$ 的一次或二次齐式，乃至一般的函数 $f(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n, \cdots)$，很自然的引入連續性的概念：即所謂 f 是連續的。是指当

$$\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k (k=1, 2, \cdots) \tag{1}$$

时，有

$$\lim_{n\to\infty} f(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \cdots, \xi_k^{(n)} \cdots) = f(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_k, \cdots) \tag{2}$$

成立。这种連續性叫做"全連續性"。但在 (l^2) 中，按坐标收斂(1)意味着在 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}=(l^2)$ 中的弱收斂，如果 $(\xi_k^{(n)})$ 的范数 $\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n)}|^2}$ 一致有界（共鳴定理）。于是可以更精确些，定义 (l^2) 上的泛函数 $f(\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n \cdots)$ 为全連續，是指当 $(\xi_k^{(n)})$ 在 (l^2) 中弱斂于 (ξ_k) 时，(2)成立。对于定义在 (l^2) 上的綫性齐式①

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\xi_i, \quad (\alpha_i) \in (l^2),$$

不难看出，当 $x^{(n)} = \xi_k^{(n)}$ 弱斂于 $x = (\xi_k)$ 时，$f(x^{(n)})$ 收斂于 $f(x)$，从而 $f(x)$ 是全連續的。但对于二次式

$$f(x) = \sum_{i,k} K_{ik}\xi_i\xi_k, \tag{3}$$

則不必如此。例如令 $K_{ik} = \delta_{ik} (i, k=1, 2, \cdots)$ 那末令

① 可以証明，如 $f(x)$ 对一切 $(\xi_i) \in (l^2)$ 有定义，那末 (α_i) 必 $\in (l^2)$，这叫做 Landau 定理。

$$l_i=(\delta_{ik})_{k=1,2,\cdots}$$

則 $l_i\to\Theta(i\to\infty)$,

$$f(l_i)=1,\quad f(\Theta)=0,$$

即 (3) 中的 f 不是全連續的，用算子的語言表达，可以說，定义在 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 中的綫性有界算子叫做全連續，是指二次齐式

$$(Ax, x)$$

是全連續的，即当 x_n 弱斂于 x 时

$$\lim_{n\to\infty}(Ax_n, x_n)=(Ax, x)$$

F. Riesz 在 1917 年曾提出全連續性的一个更好的定义，不仅适用于一般 Hilbert 空間，并且适用于 Banach 空間。此外，他以及以后 J. Szauder 建立了 Banach 空間中全連續綫性算子的固有值理論，可以看成是 Fredholm 綫性积分方程理論的抽象化。近人已把这一理論又推广到各种拓扑綫性空間上去。本节限于介紹 Riesz—Szauder 的理論，为此，我們采取目前文献中一般引用的 Riesz 的全連續性定义，并在后面一个定理中証明在 Hilbert 空間的特殊情形它与 Hilbert 的原来定义相同。

定义 1. 由完备距离空間 E 到完备距离空間 E_1 中的映象叫做列紧算子，是指它把 E 中的每个有界集(即含在以某定点为心并具有穷半徑的球内的集)映成 E_1 中的列紧集。連續列紧算子叫做全連續的算子。

注 列紧算子显然不必是連續的，例如令 $E=E_1=[0,1]$。而令

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{如 } x \text{ 为有理数;}\\ 1 & \text{如 } x \text{ 为無理数,}\end{cases}$$

那末 f 是列紧算子，但不是連續的。

但列紧綫性算子是有界的，从而是全連續的，因为它把有界集映成列紧集，而列紧集是有界的。

例 1. 由賦范綫性空間 E 到有穷維綫性空間 E_1 中的有界綫性算

子必是列紧的，从而是全連續的，因为它把 E 中的有界集映成 E_1 中的有界集，而在有穷維綫性空間 E_1 中，有界集必是列紧的(Bolzano–Weierstrass 定理)。

例 2. 在無穷維 E_1 的情形，有界綫性算子不必是全連續的，例如不变算子把 E 中單位球映成 $E \equiv E_1$ 中的單位球，而当 $\dim E = \infty$ 时，單位球不是列紧的。

例 3. 設 $K(t, t')$ 是按測度空間 (Ω, β, μ) (例如 $\Omega = [a, b]$, β 如 Lebesgue 可測子集全体，μ 表 Lebesgue 測度)的兩变量可測函数，并設

$$\iint_{\Omega\times\Omega} |K(t, \tau)|^2 \mu(dt)\mu(d\tau) = \gamma < \infty$$

这种核 $K(t, \tau)$ 叫 E. Schmidt 型核。按 Fubini 定理，对殆一切 t,

$$\int_{\Omega} |K(t, \tau)|^2 \mu(d\tau) < +\infty \tag{4}$$

依 Schwarz—Буняковский 不等式，对于每个 $x(\tau) \in L^2(\Omega, \beta, \mu)$,

$$y(t) = \int_{\Omega} K(t, \tau)x(\tau)\mu(d\tau) \tag{5}$$

是对于每个 t 定义可測函数并且因

$$|y(t)|^2 \leqslant \int_{\Omega} |K(t, \tau)|^2 \mu(d\tau) \cdot \int_{\Omega} |x(\tau)|^2 \mu(d\tau)$$

可知 $y \in L^2$, 并且 $\|y\| \leqslant \gamma \|x\|$, 于是(5)决定一个由 L^2 到自己之中的有界綫性算子 $y = Kx$, K 叫做由于 E. Schmidt 型核决定的积分算子。今証 K 是全連續的。事实上，如果 $x_n \to x$(弱)，那末，对于每个使(4)成立的 t, $K(t, \tau) \in L^2 = (L^2)^*$, 从而依弱收斂定义

$$\lim_{n\to\alpha} y_n(t) \equiv \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} K(t, \tau)x_n(\tau)\mu(d\tau) =$$

$$= \int_{\Omega} K(t, \tau)x(\tau)\mu(d\tau) = y(t)$$

又依 Schwarz—Буняковский 不等式

$$|y_n(t)|^2 \leqslant \int_\Omega |K(t,\tau)|^2 \mu(d\tau) \cdot \sup_n \|x_n\|^2,$$

而因弱斂列是按范数有界的，从而上述不等式右边有穷。于是 $\{|y_n(t)|^2\}$ 对于一切 t，收斂于 $|y(t)|^2$，而这是一个与 n 無关的有和函数。于是依 Lebesgue 定理

$$\|y_n\|^2 \to \|y\|^2 \quad (n\to\infty)$$

这正是說明(y_n)强斂于 y（見 §5）。这就是說K把弱斂列映成强斂列而下面將証明这条件蘊涵 K 的全連續性。

我們下面將証明全連續性的几个等价条件。

定理 1. 設A是由 Banach 空間E到 Banach 空間E_1中的全連續綫性算子。那末A把E中弱斂的元列(x_n)映成E中的强斂列。反之如果E是自反空間，而有界綫性算子A把弱斂列映成强斂列，那末A是全連續的[①]。

証 1)設A是全連續綫性算子，而E中元列(x_n)弱斂于x_0。假設 $y_n=Ax_n$ 不强斂于 $y_0=Ax_0$，那末必存在一个 $\varepsilon_0>0$，及一無穷子列 $n_1<<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，使

$$\|y_{n_k}-y_0\| \geqslant \varepsilon_0. \tag{6}$$

相应的子列(x_{n_k})也是弱斂的。从而按范数有界。于是$(Ax_{n_k})=(y_{n_k})$是列紧的，卽它有一子列$(y_{n_{k_j}})$强斂于一元 z_0。但于是$(y_{n_{k_j}})$也弱斂于 Z_0，卽 $(Ax_{n_{k_j}})$ 弱斂于 Z_0，旣然(x_n)弱斂于 x_0，(Ax_n)也弱斂于$Ax_0=y_0$，从而 $y_0=z_0$。于是$(y_{n_{k_j}})$强斂于 y_0，与(6)矛盾。

2) 設有界綫性算子A把E中弱斂列映成E_1中的强斂列。設M是E中的有界集，依 §5，如E是自反的，M必是弱列紧的，是而从M中任意元列(x_n)可选一弱斂子列(x_{n_k})，而依假定，(A_{n_k})是强斂列，这

① 如不設E自反，逆命題不必成立。例如在(l')中弱斂=强斂，从而不变算子I把弱斂列变成强斂列，但I不是全連續的。

正是説明了 AM 的列紧性，即 A 是全連續的。

注　这定理的第二部分补足了上面例 3 的証明。

定理 2. 由 Banach 空間 E 到 Banach 空間 E_1 中的一切全連續綫性算子的全体按算子的范数形成了一个 Banach 空間 $I(E, E_1)$。如果 $E=E_1$ 是無穷維的，那末 $I(E)\equiv I(E, E_1)$ 是 Banach 代数 $f(E)$ 中的閉兩側幻。

証　$I(E, E_1)$ 是綫性空間，这容易由全連續性的定义看出。設 A_n 是全連續算子，而 $\|A_n-A\|\to 0\ (n\to\infty)$，則 A 是由 E 到 E_1 中的全連續綫性算子。設 (x_n) 是 E 中有界列，那末 (A_1x_n) 是 E 中列紧集，从而 (x_n) 有一子列，$(x_n^{(1)})$，使 $(A_1x_n^{(1)})$ 是强斂列。又因 A_2 的全連續性，可知 $(A_2x_n^{(2)})$ 强斂。繼續下去并用对角綫法，可得出 (x_n) 的一个子列 $(x_n^{(n)})$，使 $(A_kx_k^{(k)})$ 对每个 k 收斂。我們証明 $(Ax_n^{(n)})$ 收斂。事实上，

$$\|Ax_n^{(n)}-Ax_m^{(m)}\|\leqslant\|Ax_n^{(n)}-A_kx_n^{(n)}\|+\|A_kx_n^{(n)}-A_kx_m^{(m)}\|+$$
$$+\|A_kx_m^{(m)}-Ax_m^{(m)}\|\leqslant\|A-A_k\|(\|x_n^{(n)}\|+\|x_m^{(m)}\|)+\|A_kx_n^{(n)}-A_kx_m^{(m)}\|$$

对于預定的 $\varepsilon>0$，先选自然数 k，使

$$\|A-A_k\|<\frac{\varepsilon}{4\sup\|x_n\|},$$

然后对于固定的 k，取 n_0，使得对于每个 $n, m\geqslant n_0$。

$$\|A_kx_n^{(n)}-A_kx_m^{(m)}\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是当 $n, m>n_0$ 时，

$$\|Ax_n^{(n)}-Ax_m^{(m)}\|\leqslant\varepsilon,$$

証明了 (Ax_n) 收斂（$\because E_1$ 是完备的）。于是得知 A 把 E 中的有界集映成 E_1 中的列紧集，这正是所要証的。

如果 $E=E_1$ 由上述巳知 $I(E)$ 是 $f(E)$ 中的閉綫性子空間，現在还要証明，对于任意 $B\in f(E)$ 及 $A\in I(E)$，AB 与 BA 都是全連續的。事实上，B 把 E 中有界集映成有界集，而 A 把有界集映成列紧集，从而 AB 把有界集映成列紧集。又 A 把有界集映成列紧集，而 B 把收斂列映成

收斂列，于是 BA 把有界集映成列緊集，証完。

最后，注意不变算子 I 不含于 $I(E)$中，因为 E 是無穷維的，所以 $I(E)$ 是 $f(E)$中的幻。定理証完。

系 無穷維空間中的全連續綫性算子沒有有界逆。

注 如果 E, E_1 是 Banach 空間，而(A_n)是一串由 E 到 E_1 中的有穷秩綫性算子，郎把 E 映入 E_1 中的有穷維綫性子空間(隨 n 变化)上的有界綫性算子，那末 A_n 是全連續的(定义 1 下例)而如 A_n 按算子范数收斂于算子 A, 那末 A 必是全連續的(定理 2)。一个有兴趣的問題是这命趣的逆是否成立，郎是否每个全連續綫性算子必是一串有穷秩綫性算子的一致極限？下面証明逆命題只在一定条件下成立

定义 2. Banach 空間 E 叫做具可数基，是指存在可数多个元 $e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots$, 使 E 中每个元 x 可以一意表示成

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i l_i \quad (\xi_i\in K).$$

这时$(l_1, l_2, \cdots, l_n, \cdots)$叫做 E 的基。

例 1. $(l^p)(1\leqslant p\leqslant\infty)$具可数基$(e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n, \cdots)$这里

$$e_n=(\delta_{nk})_{k=1,2,\cdots}, (n=1, 2, \cdots)$$

特别由于可分 Hilbert 空間与(l^2)等价，所以它具可数基。

例 2. 在 $C[0, 1]$中，考察元 $t, 1-t$, 以及 $u_{kl}(t)$, 这里 $0\leqslant l\leqslant 2^k$, $k=0, 1, 2, 3, \cdots$, $u_{kl}(t)$ 在$\left(\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right)$之外等于 0 而在这个开區間之內，$u_{kl}(t)$的形狀是一个高等于 1 的三角形，高綫是与 t 軸垂直的。这时，$t, 1-t$ 以及 $u_{kl}(t)(0\leqslant l<2^k, k=0, 1, 2, 3, \cdots)$形成一个可数基。①

注 具可数基的 Banach 空間显然是可分的，因为

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}\rho_i e_i \,\middle|\, n\in N, \rho_i\in Q_1, |\leqslant i\leqslant n\right\}$$

---

① 見 Люстерник-Собылев (泛函分析概要) §28。

(N表自然数全体，Q表有理数全体）是空間中的稠集。但是否任意可分 Banach 空間都具可数基，这是一个未解的問題。

定理 3. (I. Maddaus): 由 Banach 空間 E 到具可数基的 Banach 空間 E_1 中的每个全連續綫性算子，是一串有穷秩綫性算子的按算子范数收斂的極限。

証 可以証明[①]，如果$(e_i)(i=1, 2, \cdots)$是 E_1 的基，那末每个 $y\in E_1$ 可以一意表示成

$$y=\sum_{i=1}^{\infty} f_i(y)e_i,$$

这里每个 $f_i(i=1, 2, \cdots)$是 E_1 上有界綫性泛函数。令

$$T_m y=y-\sum_{i=1}^{m} f_i(y)e_i,$$

那末

$$\|T_m y\|\leqslant\|y\|+\sum_{x=1}^{m}\|f_i\|\|e_i\|\|y\|,$$

从而 T_m 是由 E_1 到它自己之中的有界綫性算子。我們先証明对于 E_1 中每个列紧集 H,

$$\lim_{m\to\infty}\|T_m y\|=0$$

在 H 上一致成立。事实上，由基的定义

$$\lim_{m\to\infty}\|T_m y\|=0,$$

对每个 $y\in E_1$ 成立，从而按共鳴定理，存在与 y 無关的常数 μ，使对于每个 m, $\|T_m\|\leqslant\mu$。既然 H 是列紧集，对每个 $\varepsilon>0$, 存在 H 中的一个 ε/μ-網: $y_1, \cdots, y_p\in H$。于是 $\|T_m y_i\|$ 对于 $1\leqslant i\leqslant p$（一致）收斂于 0，这就是說，存在自然数 $N(\varepsilon)$, 使

$$m\geqslant N(\varepsilon)\Longrightarrow\|T_m y_i\|\leqslant\varepsilon\quad(1\leqslant i\leqslant p)$$

---

① 見 Люстерник–Соболев(泛函分析概要) § 28，讀者也可把①作为練習。

但由于 ε/μ- 網的定义，对于每个 $y\in H$，存在一个 $i\ (1\leqslant i\leqslant p)$，使

$$\|y-y_i\|\leqslant\varepsilon/\mu$$

于是 $|\|T_m y\|-\|T_m y_i\||\leqslant\|T_m(y-y_i)\|\leqslant\mu\|y-y_i\|\leqslant\varepsilon$ 从而对于每个 $y\in H$，当 $m\geqslant N(\varepsilon)$时，

$$\|T_m y\|\leqslant 2\varepsilon,$$

証明了$\|T_m y\|$在 H 上一致收斂于 0。

現在容易完成定理的証明，事实上，設 T 是由 E 到 E_1 中的全連續綫性算子，令 $y=T_x$, $x\in E$。于是

$$U_n x\equiv\sum_{k=1}^{n} f_k(y)e_k\equiv\sum_{k=1}^{n} f_k(T_x)e_k$$

是由 E 到由 $e_1, \cdots, e_n$ 生成的綫性子空間上的有界綫性算子，卽 U_n 是旁秩算子。設

$$S=\{y\mid y=Tx,\ x\in E,\ \|x\|\leqslant 1\},$$

由于 T 的全連續性，S 是 E_1 中的列紧集，从而

$$Txy\equiv y-\sum_{s=1}^{n} f_i(y)e_i$$

在 S 上一致收斂于 0，在球$\|x\|\leqslant 1$ 中，

$$\|Tx-U_n x\|\to 0$$

一致成立，也就是

$$\|T-U_n\|\to 0\ (n\to\infty),$$

証完。

定理 4. 全連續綫性算子的值域必是可分的。

証 如果 A 是全連續綫性算子，而

$$G_n=\{Ax\mid x\in E,\ \|x\|\leqslant n\},$$

那末 G_n 是列紧集，从而是可分的，于是 A 的值域 $\mathfrak{W}(A)$

$$\mathfrak{W}(A)=\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$$

也是可分的。

定理 5. 全連續綫性算子的共軛算子也是全連續的。

証　設A是从 Banach 空間E到 Banach 空間E_1中的全連續綫性算子，于是共軛算子A^*是由E_1^*到E^*中的，設$\{\varphi_n\}$是E_1^*中一个有界列：$\|\varphi_n\|\leqslant\mu\ (n=1, 2, \cdots)$設$S$是$A$的值域$\mathfrak{W}(A)$中的稠可数子集(定理 4)。用对角綫法可以选出$(\varphi_n)$的一个子列，为簡單起見，我們仍表示成$(\varphi_n)$(必要时改变符号)使对于每个$y\in S$，$(\varphi_n(y))$收斂，由于$(\varphi_n)$一致有界，不难看出$(\varphi_n(y))$对于每个$y\in\mathfrak{W}(A)$也收斂。令

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(Ax)=\lim_{n\to\infty}(A^*\varphi_n)(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),$$

这里$f_n=A^*\varphi_n\in E^*$。为了証明A^*的全連續性，只須証明$(A^*\varphi_n)$(作为原来那个有界列的象列的子列)是收斂的，也就是說，只須証明

$$\|f_n-f\|\equiv\|A^*\varphi_n-f\|\to 0\ (n\to\infty). \tag{7}$$

取E中的元x_k，使

$$\|x_k\|=1,\quad |f(x_k)-f_n(x_k)|\geqslant\frac{1}{2}\|f_n-f\|.$$

于是如果(7)不成立，那末必要时再用(φ_n)的一个子列代替它，可設

$$|\varphi_n(Ax_k)-\lim_{n\to\infty}\varphi_n(Ax_k)|\geqslant\frac{1}{2}\|f_n-f\|>\frac{1}{2}\eta. \tag{8}$$

既然(x_k)是有界列，由于A的全連續性，可以找到它的一个子列(x_{k_j})，使

$$\lim_{y\to\infty}Ax_{k_j}=y_0$$

存在。于是对于$\varepsilon>0$，存在一个自然数N，使得当$j\geqslant N$时，

$$\|y_0-Ax_{k_j}\|<\varepsilon,\ \text{且}\ |\varphi_n(y_0)-\lim_{n\to\infty}\varphi_n(y_0)|<\varepsilon.$$

于是

$$|\varphi_n(Ax_{k_j})-\lim_{n\to\infty}\varphi_n(Ax_{k_j})|\leqslant$$

$$\leqslant|\varphi_n(Ax_{k_j}-y_0)|+|\varphi_0(y_0)-\lim_{n\to\infty}\varphi_n(y_0)|+$$

$$+|\lim_{n\to\infty}\varphi_n(y_0-Ax_{k_j})|\leqslant 2\mu\|y_0-Ax_{k_j}\|+\varepsilon=(2\mu+1)\varepsilon$$

ε 既是任意的，可知(8)不能成立，証完。

注 定理 5 的逆也成立，即如果 A^* 是全連續的，那末 A 也是全連續的。事实上，依假定和定理 5, A^{**} 是由 E^{**} 到 E_1^{**} 中的全連續綫性算子，而当把 A^{**} 限制在 E^{**} 的子空間 E 上时，就得出 A 来，因为如果 $X_x(b)\equiv f(x)(x\in E, f\in E^*)$，那末对于 $\varphi\in E_1$

$$(A^{**}X_x)(\varphi)=X_x(A^*\varphi)=(A^*\varphi)(x)=\varphi(Ax),$$

即 $A^{**}X_x=Ax$。

下面介紹全連續綫性算子的 Riesz—Szauder 理論。

定理 6. 設 A 是由 Banach 空間 E 到 E 自己之中的全連續綫性算子，那末 $T=A-I$ 的值域 TE 是 E 中的閉綫性子空間。

証 我們要証明 $\overline{TE}=TE$。設 $y_n=Tx_n\to y_0\,(n\to\infty)$，我們只須証可以适当选一点列$(x'_{n'})$，使 $Tx_{n'}=Tx'_{n'}$，且 $x'_{n'}\to x_0(n'\to\infty)$, $Tx_0=y_0$。

如 $\{\|x_n\|\}$ 是有界列，由于 A 的全連續性，可以取 $\{x_n\}$ 的一个子列 $(x_{n'})$，使 $Ax_{n'}\to\bar{x}\,(n'\to\infty)$。因 $x_{n'}=-Tx_{n'}+Ax_{n'}$ 可知当 $n'\to\infty$ 时，$x_{n'}\to-y_0+\bar{x}$。因此：

$$T(-y_0+\bar{x})=\lim_{n'\to\infty}Tx_{n'}=y_0.$$

令 $x'_{n'}=x_{n'}$, $x_0=-y_0+\bar{x}$，就得証明。

再考察 $\{\|x_n\|\}$ 無界的情形。令 N 表示 T 的零点集：

$$N=\{x\,|\,x\in E, Tx=\Theta\}.$$

設 $\operatorname{dist}(x_n, N)=\alpha_n$，那末可取 $w_n\in N$，使

$$\alpha_n\leqslant\|x_n-w_n\|\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)\alpha_n.$$

于是，$T(x_n-w_n)=Tx_n$，而如果 $\{\alpha_n\}$ 有界，利用上段的推理不难証明满足上述要求的 $\{x'_{n'}\}$ 存在。剩下只要考察 $\{\alpha_n\}$ 是無界的情形。必要时用它的一个子列代替它，無妨設 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\infty$。令：

$$z_n=\frac{x_n-w_n}{\|x_n-w_n\|},$$

于是 $\|z_n\|=1$, $Tz_n\to 0$ ($\because$ $T(x_n-w_n)=Tx_n\to y_0$, 而 $\|x_n-w_n\|\to\infty$)。仿前段，可取 $\{z_n\}$ 的一个子列 $\{z_{n'}\}$，使 $z_{n'}\to w_0$, 而 $Tz_{n'}\to 0(n'\to\infty)$, $Tw_0=0$。于是 $w_0\in N$, 而令 $z_{n'}-w_0=u_{n'}$, 得

$$x_{n'}-w_{n'}-w_0\|x_{n'}-w_{n'}\|=u_{n'}\|x_{n'}-w_{n'}\|.$$

但上式左边第二項、第三項都属于 N，从而右边按范数 $\geqslant\alpha_{n'}$, 但因 $u_{n'}\to\Theta(n'\to\infty)$ 以及 $\|x_{n'}-w_{n'}\|\leqslant\left(1+\frac{1}{n'}\right)\alpha_{n'}$, 所以当 n' 足够大时，它与 $\alpha_{n'}>0$ 矛盾。

定理 7. (Riesz): 設 E 是賦范綫性空間，M 为閉綫性子空間 $\subsetneqq E$，則对于任意 $\varepsilon>0$, $\exists x_\varepsilon\in E$ 使 $\|x_\varepsilon\|=1$, $\operatorname{dist}(x_\varepsilon, M)\equiv\inf\limits_{x\in M}\|x_\varepsilon-x\|\geqslant 1-\varepsilon$。

証 令 $y\in E\setminus M$, 則 $0<\alpha\equiv\operatorname{dist}(y, M)$, $\exists z\in M$, 使

$$\alpha\leqslant\|y-z\|\leqslant\alpha\left(1+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right),$$

令 $x_\varepsilon=\dfrac{y-z}{\|y-z\|}$, 則 $\|x_\varepsilon\|=1$, 且对一切 $x\in M$,

$$\|x_\varepsilon-x\|=\frac{1}{\|y-z\|}\Big\|y-z-x\|y-z\|\Big\|\geqslant\frac{1}{\|y-z\|}\cdot\alpha\geqslant\left(1+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{-1}=1-\varepsilon.$$

系 設 $\{E_n\}$ 是賦范綫性空間 E 的一串閉綫性子空間，且 $E_n\subsetneqq E_{n+1}(n=1, 2, \cdots)$, 則 $\exists y_n\in E_n$, $\|y_n\|=1$, $\operatorname{dist}(y_{n+1}, E_n)\geqslant\frac{1}{2}(n=1, 2, \cdots)$。

定理 8. 設 A 是作用在 Banach 空間 E 中的全連續綫性算子，如果 $T=A-I$, 并且 $TE=E$, 則 T 有有界逆 $\overset{-1}{T}$。

証 依 §5 的 Banach 定理，只須証明 T 是一对一的。为此，只須証明由 $Tx_1=\Theta$, $x_1\neq\Theta$ 导出矛盾。令

$$E_n=\{x\,|\,T^nx=\Theta, x\in E\},$$

那末 E_n 是 E 的閉綫性子空間，并且

$$E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset E_{n+1}\subset\cdots,$$

依假定 $TE=E$, $\exists x_n(n=2, 3, \cdots)$ 使

$$x_n = Tx_{n+1}(n=1, 2, \cdots),$$

从而 $$T^n x_{n+1} = x_1 \neq \Theta, \quad T^{n+1}x_{n+1} = Tx_1 = \Theta.$$

于是 $x_{n+1} \in E_{n+1} \setminus E_n$，依 Riesz 定理系，∃点列 (y_n)，使 $y_n \in E_n$, $\|y_n\| = 1$, $\inf\limits_{x \in E_n} \|y_{n+1} - x\| \geqslant \frac{1}{2}(n=1, 2, \cdots)$。

因为 $TE_p \subset E_{p-1}$，∴ 当 $p>q$ 时，

$$Ay_p - Ay_q = y_p - \{y_q - Ty_p + Ty_q\} = y_p - x, x \in E_{p-1},$$

从而 $$\|Ay_p - Ay_q\| \geqslant \frac{1}{2}(p>q),$$

这与 A 的全連續性矛盾。証完。

定理 9. 設 A 是作用在 Banach 空間 E 之中的全連續綫性算子，$\lambda \neq 0$ 是复数。为了 $T = A - \lambda I$ 有由 E 到 E 上的有界逆 $\overset{-1}{T}$，必須且只須 λ 不是 A 的固有值，而为了 $T^* = A^* - \bar{\lambda} I$ 有由 E^* 到 E^* 上的有界逆 $(\overset{-1}{T^*})$，必須且只須 $\bar{\lambda}$ 不是 A^* 的固有值。

証 1) 如果 T 有由 E 到 E 上的有界逆 $\overset{-1}{T}$，那末 $Ax - \lambda x = \Theta$ 即 $Tx = \Theta$ 沒有非零解，从而 λ 不是 A 的固有值。反之，設 λ 不是 A 的固有值，依定理 6, TE 是 E 中閉綫性子空間。于是 T 是由 Banach 空間 E 到 Banach 空間 $E_0 = TE(\subset E)$ 上的一对一綫性有界算子，依 §5 定理 7′ 的系，$T^*E_0^* = E^*$。Hahn-Banach 定理意味着 $E_0^* \subset E_*$，从而 $T^*E^* = E^*$。A^* 既然也是全連續的，由定理 8′, T^* 有由 E^* 到 E^* 上的有界逆 $(\overset{-1}{T^*})$。于是依 §5 定理 7′ 的系，T 有有界逆 $\overset{-1}{T}$，并且把 E 一对一映到 E 之上。

2) 必要性仍是容易看出的。今設 $\bar{\lambda}$ 不是 A^* 的固有值，于是 $A^*x = \bar{\lambda}x$ 無非零解，从而 T^* 是一对一的。因 A^* 是全連續的，依定理 6, T^*E^* 是 E^* 中閉集。依假定 T^* 是由 Banach 空間 E^* 到 Banach 空間 T^*E^* 之上的一对一映象，依 Banach 定理 T^* 有有界逆 $(\overset{-1}{T^*})$。由 §5 定理 7, $TE = E$，依定理 8, T 有有界逆 $\overset{-1}{T}$。依 §5 定理 7′系，$(\overset{-1}{T^*})$把

E^* 一对一地映到它自己上，証完。

定理 10. (Riesz-Szauder 理論)：設 A 是作用在 Banach 空間 E 中的全連續綫性算子，A^* 是 A 的共軛算子，則

1) $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\in\sigma(A)$，$\sigma(A)$ 是算子 A 的譜集（相应地 $\in\sigma(A^*)$）$\Longrightarrow\lambda$ 是 $A(A^*)$ 的固有值；

2) $\lambda\in\sigma(A)\Longleftrightarrow\bar{\lambda}\in\sigma(A^*)$；

3) 如果 λ 是 A 的固有值，那末 $\bar{\lambda}$ 是 A^* 的固有值，而且 A 的对应于 λ 的固有空間与 A^* 的对应于 $\bar{\lambda}$ 的固有空間（即由一切固有元張成的綫性子空間）必是有穷維的，并且二者的維数相等；

4) $\sigma(A)$ 或是有穷集，或是以 0 为唯一集积点的可数集；

5) 如果 $\lambda\neq\bar{\mu}$，那末 A 的对应于 λ 的固有元 x_0 与 A^* 的对应于 μ 的固有元 f_0 必直交，即

$$Ax_0=\lambda x_0,\quad A^*f_0=\mu f_0,\quad \lambda\neq\bar{\mu}\Longrightarrow f_0(x_0)=0;$$

6) 如果 $\lambda=1$ 是 A 及 A^* 的固有值，那末为了

$$y=Ax-x$$

有解，必須且只須 y 与 A^* 的对应于固有值 1 的一切固有元直交，即必須而只須

$$f=A^*f\Longrightarrow f(y)=0,$$

同样，为了方程

$$g=A^*f-f$$

有解，必須且只須 g 与 A 的对应于固有值 1 的一切固有元直交，即必須且只須

$$Ax_0=x_0\Longrightarrow g(x_0)=0.$$

証　1) 由定理 9 卽知。

2) 依 §5 定理 7′系，为了 $T=A-\lambda I$ 有由 E 到 E 上的有界逆，必須且只須 $T^*=A^*-\bar{\lambda}I$ 有由 E^* 到 E^* 上的有界逆，从而由定理 9，可知为了 λ 不是 A 的固有值，必須且只須 $\bar{\lambda}$ 不是 A^* 的固有值。于是 2)得証。

5) 因 $$(A^*f_0)(x_0)=(\mu f_0)(x_0)=\bar{\mu}f_0(x_0),$$
$$(A^*f_0)(x_0)=f_0(Ax_0)=f_0(\lambda x_0)=\lambda f_0(x_0),$$
从而 5) 得証。

4) 現先証对于屬于不同固有值 λ_1, λ_2 的固有元 x_1, x_2 必是綫性無关的。事实上，設 $\alpha x_1+\beta x_2=\Theta$，而且至少 $\beta\neq 0$，那末 $\alpha Ax_1+\beta Ax_2=\Theta$，即 $\lambda_1\alpha x_1+\lambda_2\beta x_2=\Theta$，与 $\lambda_1\alpha x_1+\lambda_1\beta x_2=\Theta$ 比較得 $(\lambda_2-\lambda_1)\beta x_2=\Theta$，与 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 矛盾。用数学归納法可以証明任意多个的情形。設 (λ_n) 是 A 的一串固有值，而 $\lim\limits_{m\to\infty}\lambda_m=\lambda$。設 $\lambda\neq 0, \neq\infty$。对于一切自然数 n，选擇 A 的与 λ_n 相应的固有元 x_n，那末諸 x_n 相互綫性無关。設 $x_1, \cdots, x_n$ 張成的綫性子空間表示成 E_n，那末 $E_{n+1}\supsetneqq E_n$，依 Riesz 定理可以取 $y_n\in E_n$，$\|y_n\|=1$，而 $\text{dist}(y_n, E_{n-1})\geqslant\frac{1}{2}$。如 $n>m$，那末
$$\frac{1}{\lambda_n}Ay_n-\frac{1}{\lambda_m}Ay_m=y_n-\left(y_n-\frac{1}{\lambda_n}Ay_n+\frac{1}{\lambda_m}Ay_m\right)=y_n-z,$$
这里 $z\in E_{n-1}$，因为既然 $y_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i x_i$，
$$y_n-\frac{1}{\lambda_n}Ay_n=\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_n}\lambda_i\beta_i x_i\in E_{n-1}.$$
又 $\frac{1}{\lambda_m}Ay_m\in E_m$，从而 $z_n\in E_{n-1}$。于是
$$\left\|\frac{1}{\lambda_n}Ay_n-\frac{1}{\lambda_m}Ay_m\right\|\geqslant\frac{1}{2}\quad(n>m)$$
但 A 是全連續的，(Ay_m) 有一收斂子列，并且 (λ_n) 有極限，这样与上面不等式矛盾。这說明 $\sigma(A)$ 不能有 0 以外集积点。$\sigma(A)$ 是有界集巳由 §7 的一般結果得知了。于是 4)得証。

現在完成 3)的証明：必要时以 $\frac{1}{\lambda}A$ 代替 A，無妨考慮固有值 $\lambda=1$ 的情形。依剛才証明的部分，λ 是 $\sigma(A)$ 的孤立点。于是可以选 $\varepsilon>0$，使对于每个滿足 $0<|\lambda-1|<3\varepsilon$ 的 λ，$(A-\lambda I)^{-1}\in\mathfrak{S}(E)$ 并且与 A 交換，对于滿足 $0<\delta<3\varepsilon$ 的数 δ，依 Cauchy 积分定理

$$A_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-1|=\delta}-(A-\lambda I)^{-1}d\lambda$$

也$\in f(E)$且与A交换，并且与满足上述条件的δ选擇無关。注意

$$(A-\lambda I)^{-1}(A-\mu I)^{-1}=\frac{1}{\lambda-\mu}\{I-I+(\lambda-\mu)(A-\mu I)^{-1}\}\times$$

$$\times(A-\lambda I)^{-1}=\frac{1}{\lambda-\mu}\{(A-\lambda I)^{-1}(A-\lambda I)-$$

$$-(A-\mu I)^{-1}[(A-\mu I)-(\lambda-\mu)I]\}(A-\lambda I)^{-1}=$$

$$=\frac{1}{\lambda-\mu}\{(A-\lambda I)^{-1}-(A-\mu I)^{-1}\}(A-\lambda I)(A-\lambda I)^{-1}=$$

$$=\frac{1}{\lambda-\mu}\{(A-\lambda I)^{-1}-(A-\mu I)^{-1}\}.$$

又如λ在圓$|\lambda-1|=\varepsilon$上

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\mu-1|=2\varepsilon}\frac{d\mu}{\lambda-\mu}=-1,$$

而在圓$|\mu-1|=2\varepsilon$上

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-1|=\varepsilon}\frac{d\lambda}{\lambda-\mu}=0,$$

于是算子A_1满足

$$A_1^2=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-1|=\varepsilon}(A-\lambda I)^{-1}d\lambda\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|\mu-1|=2\varepsilon}(A-\mu I)^{-1}d\mu=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-1|=\varepsilon}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\mu-1|=2\varepsilon}\frac{d\mu}{\lambda-\mu}\right)(A-\lambda I)^{-1}d\lambda-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\mu-1|=2\varepsilon}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-1|=\varepsilon}\frac{d\lambda}{\lambda-\mu}\right)(A-\mu I)^{-1}d\mu=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-1|=\varepsilon}-(A-\lambda I)^{-1}d\lambda=A_1,$$

卽A_1是冪等的。如果$Ax=x$，那末

$$(A-\lambda I)^{-1}x=(A-\lambda I)^{-1}Ax=(A-\lambda I)^{-1}\{(A-\lambda I)x+\lambda x\}=$$

$$=x+\lambda(A-\lambda I)^{-1}x,$$

从而
$$(A-\lambda I)^{-1}x=\frac{1}{1-\lambda}\cdot x.$$

于是
$$A_1x=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-1|=\varepsilon}\frac{d\lambda}{\lambda-1}x=x.$$

这就是說，屬于固有値 1 的固有空間M包含在 A_1E 中。

令
$$(A-\lambda I)^{-1}=A_\lambda-\frac{I}{\lambda},$$

那末
$$(A-\lambda I)\left(A_\lambda-\frac{I}{\lambda}\right)=I,$$

从而
$$A_\lambda=\frac{1}{\lambda}\left[AA_\lambda-\frac{1}{\lambda}A\right],$$

可知 A_λ 也是全連續的(定理 2)。再用 Cauchy 定理，如 $\varepsilon<1$，得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-1|=\varepsilon}\frac{I}{\lambda}d\lambda=\Theta,$$

从而由定理知
$$A_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-1|=\varepsilon}-A_\lambda d\lambda$$

是全連續的。A_1 旣是冪等的，$A_1E=A_1(A_1E)$，从而子空間 A_1E 是局部列緊的，也就是有窮維的。于是与 $\lambda=1$ 相应的固有空間更是有窮維的。为了完成 3) 的証明，还要証 A^* 的与 λ 相应的固有空間 M_1 的維数与M的維数一致。

由于 $M\subset A_1E$，可知方程

$$Ax=x, \tag{9}$$

与联立方程
$$Ax=x,\quad A_1x=x \tag{10}$$

等价，而 $A_1x=x$ 又可換成 $A_1AA_1x=x$。同样，方程

$$A^*f=f, \tag{11}$$

与联立方程
$$A^*f=f,\quad A_1^*f=f \tag{12}$$

等价，而 $A_1^*f=f$ 又可以換成 $A_1^*A^*A_1^*f=f$，如果 $A_1^*f=f$，那末 $f(x)=$

$=f(A_1x)$。（一切 $x\in E$），反之，也成立。从而 $A_1^*E^*$ 同構于 A_1E 的共軛空間，从而（依綫性代数中熟知的結果）$A_1^*E^*$ 与 A_1E 是具同維数（設 $=n$）的綫性空間。于是(10)实际上是 n 維方陣的固有値方程（对应固有値 1），而(12)卽其共軛陣的固有値方程。利用綫性代数中的熟知事实可知方程(9)与(11)的綫性無关解的最大数目相等①，于是 3) 証完。

剩下的是証 6)关于方程 $y=Ax-x$ 的部分，必要性是明显的，因为如果 $Ax-x=y$，而 $f=A^*f$，那末

$$f(y)=f(Ax)-f(x)=(A^*f)(x)-f(x)=0,$$

反之，設 $f=A^*f\Longrightarrow f(y)=0$。由定理 6，$(A-I)E$ 是 E 的閉綫性子空間。如果 $y\notin(A-I)E$，那末（Hahn-Banach）定理必存在 $f\in E^*$，使 $f(y)\neq0$，而 $f((A-I)E)=0$，卽 $f(Ax)=f(x)$ 对每个 $x\in E$ 成立，这意味着 $A^*f=f$，与假定矛盾。关于方程 $g=A^*f-f$ 的部分，必要部分也是显然的。設 $Ax_0=x_0\Longrightarrow g(x-z)=0$，卽 $g(x)=g(z)$，于是 f 是 $(A-I)E$ 上的加法綫性泛函数。利用定理 6 的証明可知如果 $y_n\equiv(A-I)x_n\to\Theta$，必可选一个元列 $(x'_{n'})$，使

$$(A-I)x_{n'}=(A-I)x'_{n'},$$

而 $x'_{n'}\to x_0$，$Ax_0-Ix_0=\Theta$。于是

$$f(y'_n)=g(x'_n)=g(x'_{n'})\to g(x_0)=0=f(x_0),$$

从而数列$(f(y_{n'}))$收斂于 0，上述推理实际上証明：对于$(f(y_n))$ 的每个子列，必可取这个子列的一个子列收斂于 0，依数列收斂的特征可知$(f(y_n))$本身收斂于 0，于是証明了 f 的連續性。依 Hahn-Banach 定理把 f 延拓成整个 E 上的連續綫性泛函数，仍表示成 f，于是对于每个 $x\in E$，

$$f((A-I)x)=g(x),$$

从而

$$(A^*-I^*)f=g,$$

卽 f 正是方程 $A^*f-f=g$ 的解，証完。

---

① 参看綫性代数的書。注意一方陣与它的轉置复数共軛陣的秩是相同的。

注 定理 10 实际上已經包含了平常所謂 Fredholm 的 alternative (例如見 И. Г. Петровский 积分方程論講义 §3 中的三个定理)。利用 Banach 代数的工具还可以証明更多的事实，包括綫性积分方程理論中的一些經典性結果，例如：全連續綫性算子 A 的每个固有值是豫解算子

$$R_\lambda=(A-\lambda I)^{-1}$$

的極点，而在这个極点的鄰域，R_λ 可以展成 Laurent 級数.

$$R_\lambda=\frac{\Gamma_{-n}}{(\lambda-\lambda_0)^n}+\frac{\Gamma_{-n+1}}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}+\cdots+\frac{\Gamma_{-1}}{(\lambda-\lambda_0)}+\Gamma_0+\sum_{k=1}^{\infty}\Gamma_k(\lambda-\lambda_0)^k,$$

这里 $\Gamma_k(-n\leqslant k)$ 是綫性有界算子，而 $\Gamma_{-n}, \Gamma_{-n+1}, \cdots, \Gamma_{-1}$ 都是有穷秩的(見南云道夫)。

近年来的工作着力于把 Riesz–Szauder 理論推广到更广的空間上去，这方面將在后面論及拓扑空間时再討論

T. Lezanski([6], [7], 及[12], [13], [1])把 Fredholm 理論与 Koch 無穷行列的理論結合得出了抽象积分方程理論的新方向。

定理 11. 如果 T 是作用在 Banach 空間 E 中的全連續綫性算子，那末豫解算子 $R(\lambda;T)=(\lambda I-T)^{-1}$ 是 λ 的半純函数，換句話說，它在每个 $\lambda_0\in\rho(T)$ 附近是 λ 的解析函数，而在每个 $\lambda_0\in\sigma(T)$(即 λ_0 是 T 的固有值)，它可以展成 Laurent 級数

$$\sum_{-\infty}^{\infty}C_n(\lambda-\lambda_0)^n,\quad (C_n\in\mathfrak{E}(E)),\tag{1}$$

而当 n 小于某个負数 $-n_0$ 时，$C_n=0$。

証 設 λ_0 是 T 的固有值，今考察它的 Laurent 展开(1)。依 §7 定理 12，可以写成

$$R(\lambda;T)=R_-(\lambda;T)+R_+(\lambda;T),$$

这里

$$R_-(\lambda;T)=\sum_{n=-\infty}^{-1}C_n(\lambda-\lambda_0)^n.$$

利用 § 7 定理 11，得

$$C_{-1}^2=C_{-1},\ C_{-n}=C_{-n+j}C_{-j+1}(j=0,1,\cdots n-1),$$

$$C_{-(n+1)}=(C_{-2})^n\quad(n>1).$$

但

$$C_{-1}=\int_\Gamma \frac{1}{\lambda-\lambda_0}R(\lambda;T)d\lambda,$$

这里适当选擇积分圍道 Γ，使在 Γ 上 $R(\lambda;T)$是連續的；这是可能的，因为 $\sigma(T)$ 是可数的，并且除 0 外沒有集积点。設

$$E_0=C_{-1}(E),$$

卽 $E_0=\mathfrak{W}(C_{-1})$。于是由 $C_{-1}^2=C_{-1}$ 得

$$C_{-1}(E_0)=C_{-1}^2(E)=C_{-1}(E)=E.$$

由此知 E_0 的每个有界子集是列紧集，从而 E_0 是有穷維的。由

$$C_{-n}=C_{-n}C_{-1}=C_{-1}C_{-n},$$

得知

$$C_{-n}E\subset E.$$

又因 $C_{-(n+1)}=C_{-2}^n$，可知

$$C_{-(n+1)}=C_{-2}^n=C_{-2}^nC_{-1}=D^nC_{-1},$$

这里 D 表示 C_{-2} 在子空間 E_0 上的限制。于是可以写成

$$R_-(\lambda;T)=\left[I_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^{-n}D^n\right](\lambda-\lambda_0)C_{-1},$$

I_0 表示 E_0 中的不变算子。既然 E_0 是有穷維的，D 可以表示成一个方陣

$$D=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0\cdots\cdots & & 0\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0\cdots\cdots & 0\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \alpha_{j-1\,j-1} & 0\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \alpha_{jj}\end{pmatrix},$$

只要我們适当取 E_0 的基。既然

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^{-n}D^n,$$

对于 $|\lambda-\lambda_0|>0$ 收斂，必然 $\alpha_{11}=\alpha_{22}=\cdots=\alpha_{jj}=0$，于是

$$n\geqslant j\Longrightarrow D^n=0,$$

从而 $n>j\Longrightarrow C_{-n}=0$，証明了 $R(\lambda;T)$ 是华純函数。

参 考 文 献

[1] Altman, M.: The Fredholm theory of linear equations in locally convex linear topological spaces, Bull. Acad. Polon. Sc. Cl. III, 2 (1954), 267—269.

[2] Altman: К теории Рисса-Шаудера линейных операторных уравнений в пространствах типа (B_0), Studia math. 15 (1956), 136—144.

[3] Hilbert, D.: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 1912.

[4] Hukuhara, M. et Yasusaka, Libuya: Théorie des endomorphismes complètement continus, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Sect. 1, 7:4 (1957), 391—405.

[5] Leray, J.: Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme complètement continu d'un espace vectoriel à voisingges convexes, Acta Sci. math. Szeged 1203 [1956], 177—186.

[6] Leżanski, J.: The Fredholm theory of linear equations in Banach spaces, Studia math. 13 (1953), 244—276.

[7] Leżanski: Sur les fonctionelles multiplicatives, Studia math. 14 (1953), 13—23.

[8] Maddaus, I.: On completely continuous linear transformations, Bull. Amer. Math. Soc. 44 (1938), 279—282.

[9] 南云道夫 (Nagumo, M.): Einige analytische Untersuchungen in linearen metrischen Ringen, Jap. J. Math. 13 (1936), 61—80.

[10] Riesz, F.: Über linearen Funktionalgleichungen, Acta math. 41 (1917), 71—98.

[11] Riesz, F. et B. Szökefalvi-Nagy: Leçons d'analyse fonctionnelle, chap. IV, V.

[12] Sikorski, R.: On a multiplication of determinants in Banach spaces, Bull. Acad. Polon. Sc. Cl. IV 1 (1953), 219—221.

[13] Sikorski: On Leżanski's determinants of linear equations in Banach spaces, Studia math. 14 (1953), 24—28.

[14] Szauder, J: Über lineare vollstetige Funktionaloperationen, Studia math. 2 (1930), 183—196.

[15] 吉田耕作: 位相解析 I, 第七章。

§9. 非綫性算子·导算子

以前討論的算子,大半是綫性的。但早在泛函分析誕生之前,在变分法中所考察的泛函数就是非綫性的,晚近对非綫性积分方程的研究使得对非綫性泛函分析注意起来,而另一方面,变分法問題仍然是非綫性泛函分析的組成部分。这里只叙述这方面的几个基本概念,欲知其詳,請參看 Красносельский[3], Люстерник[4], Вайнберг[6], Гаврин[2]等文章。

这里的介紹,也可以說是 Banach 空間中的微分学。

定义 1. 設 E_1, E_2, E_3 都是 Banach 空間,設有由 $E_1 \cdot E_2$ 到 E_3 中的映象 $(x, y) \to z = xy$, 滿足下列性質:

1) $(x_1+x_2)y = x_1y + x_2y$;
2) $x(y_1+y_2) = xy_1 + xy_2$;
$\left(\begin{matrix} x_n, x \in E_1, y_n, y \in E_2 \\ n = 1, 2 \cdots \end{matrix}\right)$
3) $x_n \longrightarrow x,\ y_n \to y \Longrightarrow x_n y_n \longrightarrow xy$.

这时 z 叫做 $x(\in E_1)$ 与 $y(\in E_2)$ 的乘积,而由 x 与 y 获得 z 的运算叫做乘法。我們說它是 $E_1 \cdot E_2 \to E_3$ 的乘法。并且在此当 x 固定时, $y \to z \equiv xy$ 可以看成是由 E_2 到 E_3 中的連續加法算子,从而是連續綫性算子。同理,对于每个固定的 $y \in E_2$, $x \to z \equiv xy$ 是由 E_1 到 E_3 中的連續綫性算子。特別,对于每个实数 α,

$$(\alpha x)y=\alpha(xy),\quad x(\alpha y)=\alpha(xy).$$

例 1) 設 E_2, E_3 是兩个 Banach 空間，$E_1\equiv\mathfrak{E}(E_2, E_3)$[見 §2]，那末这里的积是 $Tx=y(x\in E_2, y\in E_3, T\in E_1)$，即 T 作用在 x 上。

2) 設 E 是 Banach 代数，E 中的代数乘法即 $E\cdot E\to E$ 的乘法。

3) 取三个不小于 1 的实数 p, q, r，使

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}.$$

那末 $x(t)\in L^p(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$, $y(t)\in L^q\Longrightarrow x(t)y(t)\in L^r$，因为

$$\int_\Omega |x(t)y(t)|^r\mu(dt)=\int_\Omega |x(t)|^r|y(t)|^r\mu(dt)\leqslant$$

$$\leqslant\left[\int_\Omega |x(t)|^{r\frac{p}{r}}\mu(dt)\right]^{\frac{r}{p}}\left[\int_\Omega |y(t)|^{r\cdot\frac{q}{r}}\mu(dt)\right]^{\frac{r}{q}}=$$

$$=\left[\int_\Omega |x(t)|^p\mu(dt)\right]^{\frac{r}{p}}\left[\int_\Omega |y(t)|^q\mu(dt)\right]^{\frac{r}{q}}.$$

由此可見 $x\cdot y\to(x\cdot y)(t)\equiv x(t)y(t)$ 是由 $L^p\cdot L^q$ 到 L^r 中的乘法。

4) 設 Ω 是紧(T_2)空間(例如 $\Omega=[0, 1]$)，对于 $x(t)\in L^1(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$, $y(t)\in C(\Omega)$，令

$$x\cdot y\equiv\int_\Omega x(t)y(t)\mu(dt).$$

那末 $x\cdot y$ 是由 $L^1\times C$ 到 R 中的乘法。

定理 1. 設 $z=xy$ 是由 $E_1\times E_2$ 到 E_3 中的乘法，E_1, E_2, E_3 都是 Banach 空間。那末必存在正数 N，使

$$\|x\cdot y\|_3\leqslant N\|x\|_1\|y\|_2,$$

这里 $\|x\|_i$ 各表空間 E_i 中的范数($i=1, 2, 3$)。

証 当固定 x 时，$xy\to z$ 是 E_2 到 E_3 中的有界綫性算子。T_x: $z=T_xy$。于是

$$\|z\|_3 \leqslant \|T_x\| \|y\|_2.$$

取 E_1 中的單位球 $\bar{S}(\Theta, 1)$，那末$\{T_x | x \in \bar{S}(\Theta, 1)\}$是由 E_2 到 E_3 中的一族有界綫性算子，又 $z = xy$ 对于每个固定的 y 也可以看成是由 E_1 到 E_3 中的有界綫性算子 T_y，从而对$\|x\| \leqslant 1$，

$$\|T_y x\| = \|z\|_3 \leqslant \|T_y\| \|x\|_1 \leqslant \|T_y\|_2,$$

即$\{\|T_x y\| \,\big|\, \|x\| \leqslant 1\}$对每个 $y \in E_2$ 有界，依共鳴定理，

$$\{\|T_x\| \,\big|\, \|x\| \leqslant 1\}$$

有界，即存在正数 N，使

$$\|T_x\| \leqslant N \quad (\|x\| \leqslant 1),$$

換句話說，对于任意 $x \in E_1$，$y \in E_2$，

$$\|xy\|_3 = \left\| \frac{x}{\|x\|_1} y \right\|_3 \cdot \|x\|_1 \leqslant N \|x\|_1 \|y\|_2,$$

这正是所要証的。

定义 2. 設 $E_1, E_2, \cdots, E_n, E_0$ 都是 Banach 空間，所謂 n 綫性齐式，是指由 $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ 到 E_0 中的映象

$$u_n(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

使对于每个 $i (1 \leqslant i \leqslant n)$，当固定 $x_k \in E_k (k \neq i, 1 \leqslant k \leqslant n)$时，$u_n$ 是由 E_i 到 E_0 中的有界綫性算子。为簡單起見，有时 $u_n(x_1, \cdots, x_n)$ 表示成 $u_n x_1 x_2 \cdots x_n$。

注 1）前面定义的 $E_1 \times E_2 \to E_3$ 乘积仍是 2-綫性齐式或名双綫性齐式。

2）由定理 1 并用完全归納法可知对每个 n 綫性齐式必存在正数 N，使

$$\|a_n h_1 \cdots h_n\| \leqslant N \|h_1\| \|h_2\| \cdots \|h_n\|. \tag{1}$$

我們在这里对不同空間中的范数在符号上不加区分。数

$$\|a_n\| = \sup_{\substack{h_k \in E_k \\ 1 \leqslant k \leqslant n \\ h_k \neq \Theta}} \frac{\|a_n h_1 \cdots h_n\|}{\|h_1\| \cdots \|h_n\|} \tag{2}$$

就是满足(1)的最小 N 值，叫做齐式 a_n 的范数。

3) 定义由 $E_1\times\cdots\times E_n$ 到 E_0 的 n 綫性齐式 u_n 与 v_n 的加法为

$$u_nh_1\cdots h_n+v_nh_1\cdots h_n=(u_n+v_n)h_1\cdots h_n,$$

数乘法为
$$(\alpha u_n)h_1\cdots h_n=\alpha\cdot u_nh_1\cdots h_n,$$

于是不难証明（仿对 $\mathfrak{C}(E, E_1)$的証明）这些 n 綫性齐式的全体按范数(2)組成一个 Banach 空間，这个空間表示成$(E_1\times\cdots\times E_n\to E_0)$。

4) 如果把 $\mathfrak{C}(E, E_1)$表示成$(E\to E_1)$，那末不难看出

$$a_nh_1\cdots h_{n-1}\in(E_n\to E_0),$$

$$a_nh_1h_2\cdots h_{n-2}\in(E_{n-1}\to(E_n\to E_0)),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n\in(E_1\to(E_2\to(E_3\to\cdots(E_n\to E_0))\cdots).$$

定义 3. 在定义 2 中，如果 $E_1=\cdots=E_n=E$，并且对于$(1, 2, \cdots, n)$的任意排列$(i_1, \cdots, i_n)$

$$a_nh_1\cdots h_n=a_nh_{i_1}\cdots h_{i_n}\quad(h_k\in E_k,\ 1\leqslant k\leqslant n),$$

那末 n 綫性齐式 a_n 叫做对称的。

例 在 Banach 代数中，$z=xy$ 是对称双綫性式的充分必要条件乃是这个代数是交換的。

定义 4. 設 a_n 是对称 n 綫性齐式，那末 $a_n\underbrace{h\cdots h}_{n\text{項}}$ 叫做 n 次齐式，簡單地表示成 a_nh^n，我們表示作 $a_n\in[E^n\to E_0]$。

注 1) 在記号 a_nh^n 中，h^n 并不一定是 h 的 n 次乘冪，而一般只是 $a_nh\cdots h$ 的縮写。

2) 下列性質容易看出，如果 a_nh^n 是 n 次齐式，那末

1° $a_n(\alpha h)^n=\alpha^n\cdot a_nh^n(\alpha\in k, h\in E)$;

2° $a_n(\alpha_1h_1+\cdots+\alpha_kh_k)^n=$

$$\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_k=n\\ n_k\geqslant 0}}\frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}\alpha_1^{n_1}\cdots\alpha_k^{n_k}\cdot a_nh_1^{n_1}\cdots h_k^{n_k}.$$

3° $\frac{\partial^n}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2\cdots\partial\alpha_n}[a_n(\alpha_1 h_1+\cdots+\alpha_n h_n)^n]=n!a_n h_1\cdots h_n$.

4° 如果两个 n 次齐式 $a_n h^n$ 与 $b_n h^n$ 对一切 $h\in E$ 取同值，那末相应的对称 n 綫性齐式 a_n 与 b_n 相等。事实上，这由 2°3° 不难看出。

5° 設 $A\in(E_1\to E_2)$，而 $a_n h^n$ 是$[E^n\to E_1]$的 n 次齐式，那末$A(a_n h^n)$是$[E^n\to E_2]$的 n 次齐式。

6° 我們可以定义一个 m 次齐式 $a_m h^m$ 与 n 次齐式 $b_n h^n$ 的"乘积"，事实上，由相应的綫性齐式

$$a_m h_1\cdots h_m,\quad b_n h_1\cdots h_n$$

可以引出一个$(n+m)$綫性对称齐式

$$\frac{1}{(n+m)!}\sum_{(i_1,\cdots,i_{n+m})}(a_m h_{i_1}\cdots h_{i_m})(b_n h_{i_{m+1}}\cdots h_{i_{n+m}})\tag{3}$$

那末，这里$(i_1,\cdots,i_{n+m})$遍表$(1,2,\cdots,n+m)$的一切不同排列。在(3)中令 $h_1=\cdots=h_{n+m}=h$，即得一$(n+m)$次齐式$(a_m h^m)(b_n h^n)$，也就是說 n 次齐式与 m 次齐式的"乘积"即是$(n+m)$次齐式$(a_m h^m)(b_n h^n)$。

定义 5. 設 $a_k\in[E^k\to E_0]$(E, E_0是Banach 空間)，那末形如

$$\sum_{k=1}^{n} a_k h^k\quad(h\in E)$$

的式叫做关于 h 的 n 次多項式。

注 1) 設 E, E_0 都$=R$，那末一个 n 綫性齐式实际就是一个形如$\alpha\xi_1\cdots\xi_n$ 的 n 变数函数，而 n 次齐式就是平常的單項式 $\alpha\xi^n$，从而多項式 $\Sigma a_k\xi^k$ 也就是平常的多項式。

2) 由定义 4 下的注 6° 可知 n 次多項式与 m 次多項式可以"相乘"，乘积是一个$(n+m)$次多項式。

定义 6. 設 $y=p(x)$是由 Banach 空間 X 的某个开子集 $\mathfrak{D}(p)$到 Banach 空間 Y 中的算子。我們說，$y=p(x)$在 $x=x_0\in\mathfrak{D}(p)$ 处可微分(按照 Fréchet 意义)，是指存在一个 $H\in(X\to Y)$，使对于某一正数 δ，

与$S(x_0, \delta)\cap\mathfrak{D}(p)$中任意一点$x_0+\Delta x$,

$$\|p(x_0+\Delta x)-p(x_0)-H\Delta x\|\leqslant\|\Delta x\|\varepsilon(\|\Delta x\|), \tag{4}$$

这里$\varepsilon(\alpha)$是正值实变数函数，且当$\alpha\to 0$时，$\varepsilon(\alpha)\to 0$。这时H叫做$p(x)$在$x=x_0$处的按 Fréchet 意义的导算子，表示成

$$H=p'(x_0).$$

注 1) Karl Marx 在他的数学手稿中，討論微分学基础問題时會提到过把导数当作作用在增量上的算子的想法。对于在赋范綫性空間中把上述概念作严格定义的工作是屬于 M. Fréchet 的[1]。

2) 当$X=Y=K$时，这与平常的导函数概念一致。

3) 注意$p'(x_0)\in(X\to Y)$，从而$p'(x_0)\Delta x$是Y中的元。如果$p'(x)$在X中某区域G的每个点处存在，那末我們說p在G中可微分，而p'是由G到$(X\to Y)$中的(一般是非綫性的)算子。

4) 如果$p(x)$在X_0处可微分，那末导算子是一意的。事实上，設除有$H\in(X\to Y)$滿足(4)外，还有$H_1\in(X\to Y)$，滿足

$$\|p(x_0+\Delta x)-p(x_0)-H_1\Delta x\|\leqslant\|\Delta x\|\varepsilon_1(\|\Delta x\|),$$

从而

$$\|H-H_1\|\leqslant(\varepsilon(\|\Delta x\|)+\varepsilon_1(\|\Delta x\|)).$$

上式左边与Δx的选择無关，从而$H=H_1$。

5) 由(4)直接看出，如果$p(x)$在x_0处可微分，那末

$$\|p(x_0+\Delta x)-p(x_0)\|\leqslant\|H\Delta x\|+\|\Delta x\|\varepsilon(\|\Delta x\|)\to 0(\Delta x\to\Theta),$$

从而$p(x)$在x_0处連續。

例 1) 設$p(x)$是把R^n(m_n或l_n^p)映入R^m(m_m或l_m^p)中的算子:

$$y=p(x),\quad y=(\eta_1, \cdots\eta_m),\quad \eta_k=f_k(\xi_1, \cdots, \xi_n)\quad (1\leqslant k\leqslant m).$$

如果每个f_k在点$(\xi_1^{(0)}, \cdots, \xi_n^{(0)})=x_0$附近有一阶連續偏导函数，那末由数学分析中的熟知結果①可知对于$\Delta x=(\Delta\xi_1, \cdots, \Delta\xi_n)$,

① 例如見 А. Я. Хинчин, 数学分析簡明教程, §90。

$$p'(x_0)\Delta x=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial \xi_i^{(0)}}\cdot\Delta\xi_i,\cdots,\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_m}{\partial \xi_i^{(0)}}\Delta\xi_i\right),$$

这里
$$\frac{\partial f_k}{\partial \xi_i^{(0)}}=\frac{\partial f_k(\xi_1,\cdots,\xi_n)}{\partial \xi_i}\bigg|_{(\xi_1,\cdots,\xi_n)=(\xi_1^{(0)},\cdots,\xi_n^{(0)})}.$$

于是可見 $p(x)$的导算子 $p'(x)$是由 R^n 到 R^m 中的綫性算子，这个算子由陣

$$\left(\frac{\partial f_k}{\partial \xi_i}\right)_{1\leqslant k\leqslant m,\,1\leqslant i\leqslant n}$$

表示。按照我們取 m_n, l_n^p 等不同范数，$p'(x)$具有不同的范数。

2) 設 p 本身是由 X 到 Y 中的綫性有界算子，那末

$$P(x+\Delta x)-P(x)-P(\Delta x)=\Theta$$

从而这时对于任意 $x\in X$, $P'(x)=P$。这是熟知的数学分析中的結果

$$\frac{d}{dt}(\alpha t)=\alpha(\alpha \text{ 表常数}, t \text{ 表实变量})$$

的自然推广。

3) 考察 Урысон 积分算子 $y=P(x)$;

$$y(s)=\int_0^1 K(s,t,x(t))dt$$

今把它看作由 $c[0,1]$ 到自己之中的算子。設 $K(s,t,u)$ 在所考察的某区域中对于它的三个主目元各有一阶連續导函数。这时

$$\int_0^1 K(s,t,x_0(t)+h(t))dt-\int_0^1 K(s,t,x_0(t))dt=$$
$$=\int_0^1 [K_u'(s,t,x_0(t))h(t)+\varepsilon(t)]dt,$$

这里 $\varepsilon(t)$是比$\|h\|$高阶的無穷小。从而

$$P'(x_0)h=\int_0^1 K_u'(s,t,x_0(t))h(t)dt$$

即 $P'(x_0)$乃是以 $k(s,t)\equiv K'_u(s,t,x_0(t))$为核的綫性积分算子。

4) 特别取 $X=R$, 所考察的算子实际上是在 Banach 空間 Y 中取値的抽象函数，而为了 $x(t)$在 t_0 处有"导函数"，必須且只須

$$\|x(t+\Delta t)-x(t)-x'(t)\Delta t\|\leqslant|\Delta t|\varepsilon(|\Delta t|),$$

这里 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\varepsilon(|\Delta t|)=0$, 也就是說，必須且只須

$$\left\|\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}-x'(t)\right\|\to 0\qquad(\Delta t\to 0),$$

这正是与在 §6 中所定义的抽象函数 $x(t)$的导函数 $x'(t)$ 的定义一致。

下面叙述关于导算子的几个簡單定理。

定理 2. 設 $y=P(x)$是由 Banach 空間 X 的某区域 G 到 Banach 空間Y中的可微分算子，而 $z=Q(y)$是由 Y 中某区域 $\mathfrak{D}(Q)(\mathfrak{D}(Q)\supset\supset P(G))$ 到 Banach 空間 z 中的可微分算子，那末 $z=Q(P(x))$ 是由 $G(\subset X)$到 z 中的可微分算子，并且对于 $x_0\in G$,

$$(QP)'(x_0)=Q'(P(x_0))\cdot P'(x_0).\tag{5}$$

上式中的書写次序是很重要的: $Q'(P(x))\equiv Q'(y)$ 是由 Y 到 Z 中的有界綫性算子，而 $P'(x)$是由X到Y中的有界綫性算子，从而 $Q'(P(x))P'(x)$是由X到Z中的綫性算子。如果写成$P'(x)Q'(P(x))$就無意义了。(5)是平常数学分析中微分的鏈鎖公式(Kettenregel)的推广。

証 取 $x_0\in G$, 使 $P(x)$在 x_0 处可微分，而Q在 $y_0\equiv P(x_0)$ 处可微分，由定义可知存在随其主目元趋于 0 的实变量函数 $\varepsilon(\delta)$, $\varepsilon_1(\delta)$使

$$\|P(x_0+\Delta x)-P(x_0)-P'(x_0)\Delta x\|\leqslant\|\Delta x\|\varepsilon(\|\Delta x\|);$$

$$\|Q(y_0+\Delta y)-Q(y_0)-Q'(y_0)\Delta y\|\leqslant\|\Delta y\|\varepsilon_1(\|\Delta y\|).$$

令取 $\qquad\Delta y\equiv P(x_0+\Delta x)-P(x_0)=P(x_0+\Delta x)-y_0,$

那末注意 $P'(x_0)$与 $Q'(y_0)$都是有界綫性算子:

$$\|QP(x_0+\Delta x)-QP(x_0)-Q'(P(x_0))P'(x_0)\Delta x\|\leqslant$$

$$\leqslant\|Q(y_0+\Delta y)-Q(y_0)-Q'(y_0)\Delta y\|+\|Q'(y_0)\Delta y-Q'(y_0)P'(x_0)\Delta x\|\leqslant$$

$$\leqslant\|\Delta y\|\varepsilon_1(\|\Delta y\|)+\|Q'(y_0)\|\,\|\Delta x\|\varepsilon(\|\Delta x\|),\tag{6}$$

注意在定义 6 注 5)中已説明 $\|\Delta y\| \leqslant \alpha \|\Delta x\|$, 这里 α 是依賴于 $\|P'(x_0)\|$ 的常数，从而 $\|\Delta y\|$ 随 $\|\Delta x\|$ 趋于 0, 于是由上述不等式(6)看出 $(QP)'(x_0) = Q'(P(x_0))P'(x_0)$, 証完。

系　特别如在定理 2 中 Q 是由 Y 到 Z 中的綫性算子，那末

$$(QP)'(x) = QP'(x),$$

这也是平常数学分析中的相应結果(即一常数可由微分号下提出)的自然推广。

定理 3. 設 $P(x)$ 是由 Banach 空間 X 中的某区域 G 到 Banach 空間 Y 中的可微分算子，取 Δx, 使 $x_0 + \Delta x \in G$。那末下列不等式成立:

$$\|P(x_0+\Delta x) - P(x_0)\| \leqslant \sup_{\substack{\tilde{x} = x_0 + \vartheta\Delta x \\ 0<\vartheta<1}} \|P'(\tilde{x})\| \|\Delta x\|. \tag{7}$$

証　令 $y_0 = P(x_0+\Delta x) - P(x_0)$.

依 Hahn-Banach 定理(§ 3) $\exists f \in Y^*$, 使

$$\|f\| = 1, \quad f(y_0) = \|y_0\|.$$

考察实变数 τ 的实函数

$$\varphi(\tau) = f(P(x_0 + \tau\Delta x)).$$

今固定 $\Delta x \in X$, 而把 τ 看成主变量，于是依定理 2 及其系，并注意 $\frac{d}{d\tau}(x_0+\tau\Delta x) = \Delta x$, 得

$$\varphi'(\tau) = f(P'(x_0+\tau\Delta x))\Delta x.$$

利用平常函数的中值公式

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\vartheta) \quad (0<\vartheta<1),$$

得知

$$f(y_0) = f(P(x_0+\Delta x)) - f(P(x_0)) = \varphi(1) - \varphi(0) =$$
$$= \varphi'(\vartheta) = f(P'(x_0+\vartheta\Delta x))\Delta x.$$

所以

$$\|P(x_0+\Delta x) - P(x_0)\| = \|y_0\| = f(y_0) = |f(P'(x_0+\vartheta\Delta x))\Delta x| \leqslant$$
$$\leqslant \|f\| \|P'(x_0+\vartheta\Delta x)\| \|\Delta x\| \leqslant \sup_{\substack{\tilde{x} = x_0 + \vartheta\Delta x \\ 0<\vartheta<1}} \|P'(\tilde{x})\| \|\Delta x\|.$$

現在，我們来叙述一个与(7)相似的另一个不等式，并且它將在§ 10的应用中很有用，依§ 6，把 $P(x+t\Delta x)$ 看成在 Y 中取值的抽象函数，那末

$$P(x+\Delta x)-P(x)=\int_0^1 \frac{d}{dt}P(x+t\Delta x)dt=$$

$$=\int_0^1 P'(x+t\Delta x)\cdot\Delta x dt=\int_0^1 P'(x)\Delta x\cdot dt+$$

$$+\int_0^1[P'(x+t\Delta x)-P'(x)]\Delta x\cdot dt=P'(x)\Delta x+$$

$$+\int_0^1 [P'(x+t\Delta x)-P'(x)]\Delta x\, dt.$$

于是得

$$\|P(x+\Delta x)-P(x)-P'(x)\Delta x\|\leqslant\int_0^1\|(P'(x+t\Delta x)-P'(x))\Delta x\|dt. \quad (8)$$

定义 7. 設 P 是由 Banach 空間 X 中某区域 G 到 Banach 空間 Y 中的可微分算子。如果 $P'(x)$ 在点 $x_0\in G$ 又是可微分的，那末它叫做 $P(x)$ 在 x_0 处的第二阶导算子，表示成

$$(P'(x))'=P''(x).$$

按完全归納法可以定义 $P(x)$ 在 x_0 处的第 n 阶导算子:

$$P^{(n)}(x)=(P^{(n-1)}(x))'.$$

于前所述，对于固定的 $x_0\in X$, $P'(x_0)$ 是 $(X\to Y)$ 中的元，所以 $x\to\to P'(x)$ 是由 X 到 $(X\to Y)$ 中的(非綫性)算子，从而对于固定的 x_0, $P''(x_0)$ 是 $(X\to(X\to Y))$ 中的元。于是对于 x, $z\in X$, $(P''(x_0)x)z$ 可以看成是 $X\times X$ 到 Y 中的双綫性式，我們以后簡写成 $P''(x_0)xz$。同理一般我們用

$$P^{(n)}(x_0)x_1x_2\cdots x_n$$

表由 $P^{(n)}(x_0)$引出的 n 綫性齐式。

例　1) 設P是由 R^n 中某区域G到 R^m 中的算子 $y=Px$:

$$\eta_i=f_i(\xi_1, \cdots, \xi_n),\quad 1\leqslant i\leqslant m,\quad y=(\eta_i)_{1\leqslant i\leqslant m},\quad x=(\xi_j)_{1\leqslant j\leqslant n}.$$

設f在G中有二阶連續导函数。不难看出,对于增量$\Delta x=(\Delta\xi_1,\cdots,\Delta\xi_n)$及 $\Delta' x=(\Delta'\xi_1, \cdots, \Delta'\xi_n)$,

$$P''(x)\Delta x\Delta' x=\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\Delta\xi_i\Delta'\xi_j\right\}_{1\leqslant k\leqslant m}\in R^m.$$

所以算子 $P''(x)$由三維陣

$$P''(x)\sim\left(\frac{\partial f_k}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\right)\qquad(1\leqslant k\leqslant m,\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n)$$

表現。特别当 $n=m=1$ 时,$P''(x)$就是平常数学分析中的二阶导函数。

2) 考察定义在 $C[0, 1]$中的 Урысон 积分算子 $y=Px$:

$$y(s)=\int_0^1 K(s, t, x(t))dt,\quad y, x\in C[0, 1].$$

設函数 $K(s, t, u)$,按其各主目元有二阶連續导函数。既然已知

$$P'(x_0)h=\int_0^1 K'_u(s, t, x_0(t))h(t)dt.$$

所以再引用一次平常的中值定理:

$$P'(x_0+\Delta x)h-P'(x_0)h=\int_0^1[K'_u(s, t, x_0+\Delta x(t))-$$

$$-K'_u(s, t, x_0(t))]h(t)dt=\int_0^1 K''_{uu}(s, t, x_0(t))\Delta x(t)\cdot h(t)dt+\eta.$$

这里η与$\|\Delta x(t)\|$比較是高阶無穷小。于是

$$P''(x_0)hh_1 = \int_0^1 K''_{uu}(s, t, x_0(t))h(t)h_1(t)dt.$$

定理 4. 如果 $P(x)$ 是由 Banach 空間 X 中某区域 G 到 Banach 空間 Y 中的具有二阶导算子的算子，那末，如果 $x_0+\Delta x \in G$，必然

$$\|P(x_0+\Delta x)-P(x_0)-P'(x_0)\Delta x\| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{\substack{\tilde{x}=x_0+\vartheta\Delta x\\ 0<\vartheta<1}} \|P''(\tilde{x})\| \|\Delta x\|^2. \quad (9)$$

証 由定理 3 下的注。

$$\|P(x_0+\Delta x)-P(x_0)-P'(x_0)\Delta x\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \|(P'(x_0+t\Delta x)-P'(x))\Delta x\| dt. \quad (10)$$

把定理 3 中的不等式(7)用到 $P'(x)$ 上去，在本定理的假定之下，

$$\|P'(x_0+t\Delta x)-P'(x_0)\| \leqslant \sup_{\substack{\tilde{x}=x_0+\vartheta t\Delta x\\ 0<\vartheta<1}} \|P''(\tilde{x})\| \|t\Delta x\|,$$

从而代入(10)，得(因 $0\leqslant t\leqslant 1$, $0<\vartheta<1$, 故 $0<\vartheta t<1$)

$$\|P(x_0+\Delta x)-P(x_0)-P'(x_0)\Delta x\| \leqslant \sup_{\substack{x=x_0+\vartheta\Delta x\\ 0<\vartheta<1}} \|P''(\tilde{x})\| \|\Delta x\|^2 \int_0^1 t dt =$$

$$= \frac{1}{2} \sup_{\substack{\tilde{x}=x_0+\vartheta\Delta x\\ 0<\vartheta<1}} \|P''(\tilde{x})\| \|\Delta x\|^2.$$

显然考察定理 3, 4 会使我們想到一个問題，即是否平常数学分析的中值公式对于算子成立，即存在 ϑ, $0<\vartheta<1$, 使

$$P(x+\Delta x)-P(x)=P'(x+\vartheta\Delta x).$$

但簡單的例說明这是不成立的①。

例 考察由 R^2 到它自己之中的算子 $y=Px$:

① 虽然这是很容易知道的事实，但文献中有时有些作者就使用了这个公式，因此值得喚起注意。

$$\eta_1=\xi_1^2+\xi_2^2\equiv\varphi(\xi_1,\xi_2),\quad \eta_2=\xi_1^3\equiv\psi(\xi_1,\xi_2).$$

考察 $x_0=(\xi_1^{(0)},\xi_2^{(0)})=(1,1)$, $\Delta x=(1,1)$, 于是如果中值公式 $P(x_0+\Delta x)-P(x)=P'(x_0+\vartheta\Delta x)$成立,那末

$$\varphi(2,2)-\varphi(1,1)=8-2=6=2(1+\vartheta)+2(1+\vartheta)=4(1+\vartheta),$$

$$\psi(2,2)-\psi(1,1)=8-1=7=3(1+\vartheta)^2,$$

而既然这組方程对 ϑ 無公共解,从而中值公式不能成立。

但对于 Banach 空間上的泛函数，中值公式是成立的。实际上,这对于更一般些的微分成立,卽所謂 Gateaux 微分或称弱微分。

定义 8. 設 $P(x)$是由 Banach 空間 X 中某区域 G 到 Banach 空間 Y 中的算子。如果当 λ 表实变量时,对于任意 h (使 $P(x_0+\lambda h)$对足够小的 λ 有意义):

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{P(x_0+\lambda h)-P(x_0)}{\lambda}\tag{11}$$

存在,那末 $P(x)$叫做在 X_0 处按 Gateaux 意义可微分,而上面的極限值叫做 $P(x)$在 x_0 处对应增量 h 的 Gateaux 微分,表示成 $DP(x,h)$。特别当 $Y=R$ 时,卽 $P(x)$是 X 上泛函数 $f(x)$ 时 Gateaux 微分也叫做 $f(x)$ 对应增量 h 的变分,表示成 $\partial_h f(x_0)$,如果 $\partial_h f(x_0)$是 h 的有界綫性泛函数,那末必存在 $\varphi(x_0)\in X^*$, 使

$$\partial_h f(x_0)=\varphi(x_0)(h),$$

这时如果 $\partial_h f(x_0)$在某个区域 $G\subset X$ 中存在,从而 $\varphi(x)$是由 X 到 X^* 中的算子,叫做泛函数 $f(x)$ 斜量算子,表示成

$$\varphi(x)=\operatorname{grad} f(x).$$

例 1 考察定义在 $C^{(1)}[a,b]$上的泛函数

$$I(y)=\int_a^b f(t,y(t),y'(t))dt,$$

这里設 $f(t,u,v)$ 是按其各主目元有連續一阶偏导函数的。容易

看出

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{I(y+\lambda h)-I(y)}{\lambda}=$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_a^b[f(t,y(t)+\lambda h(t),y'(t)+\lambda h'(t))-f(t,y(t),y'(t))]dt=$$

$$=\int_a^b[f'_y(t,y(t),y'(t))h(t)+f'_{y'}(t,y(t),y'(t))h'(t)]\,dt,$$

由此看出，在这里定义 8 中所謂的变分正是变分学中所謂泛函数 $I(y)$ 的变分①

例 2. 現在考察实 Hilbert 空間 E 上泛函数 $f(x)=\|x\|$ 的斜量算子②。这时

$$\|x+\lambda h\|-\|x\|=\frac{\|x+\lambda h\|^2-\|x\|^2}{\|x+\lambda h\|+\|x\|}=\frac{(x+\lambda h,x+\lambda h)-(x,x)}{\|x+\lambda h\|+\|x\|}=$$

$$=\frac{2(x,\lambda h)+\|\lambda h\|^2}{\|x+\lambda h\|+\|x\|},$$

从而

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\|x+\lambda h\|-\|x\|}{\lambda}=\frac{(x,h)}{\|x\|},$$

并注意 Hilbert 空間是自共軛的，从而 grad $f(x)$ 是由 E 到它自己之中的算子，而

$$\text{grad}\,\|x\|=\frac{x}{\|x\|}.$$

注: 1)如果算子 $P(x)$ 在 x_0 点处有 Fréchet 导算子，那末 $P'(x_0)h$ 叫做对应于增量 h 的 Fréchet 微分。我們証明，Fréchet 微分的存在蘊涵 Gateaux 微分的存在，并且二者相等。事实上，依 Fréchet 导算子的定义

$$\|P(x_0+\lambda\Delta x)-P(x_0)-P'(x_0)\lambda\Delta x\|\leqslant|\lambda|\,\|\Delta x\|\,\varepsilon(|\lambda|\,\|\Delta x\|),$$

这里 $\varepsilon(\delta)$ 随 $\delta\to 0$ 而趋于 0。从而这时

① 例如見 Лаврентьев-Люстерник, 变分学教程，第二章。

② 見 M. M. Вайнберг [6]。

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{P(x_0+\lambda\Delta x)-P(x_0)}{\lambda}=P'(x_0)\Delta x.$$

但反之，如果泛函数 $f(x)$ 在 x_0 点有綫性的 Gateaux 微分，它并不一定在 x_0 点也有 Fréchet 微分。例如①考察 R^2 上的泛函数

$$\begin{cases} f(x)\equiv f(\xi_1,\xi_2)=\xi_1+\xi_2+\dfrac{\xi_1^3\xi_2}{\xi_1^4+\xi_2^2}, & \text{如果 } \xi_1^2+\xi_2^2\neq 0,\\ f(0)\equiv f(0,0)=0. \end{cases}$$

由于
$$\left|\frac{\xi_1^3\xi_2}{\xi_1^4+\xi_2^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}|\xi_1|,$$
可知 f 在$(0,0)$处連續。令 $h=(\eta_1,\eta_2)$，那末在$(0,0)$处的 Gateaux 微分等于

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(\lambda h)-f(0)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\left(\eta_1+\eta_2+\frac{\lambda^4\eta_1^3\eta_2}{\lambda^2(\lambda^2\eta_1^4+\eta_2^2)}\right)=\eta_1+\eta_2,$$

从而存在，但如果令 $\eta_2=\eta_1^2$，則 $\|h\|=\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}=\sqrt{\eta_1^2+\eta_1^4}$，所以

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{f(h)-f(0)-f'(0)h}{\|h\|}=\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\eta_1^3\eta_2}{(\eta_1^4+\eta_2^2)\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}}=$$

$$=\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\eta_1^5}{2\eta_1^4\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}}=\frac{1}{2}\neq 0,$$

从而 Fréchet 微分不存在。

2) 注意一般 Gateaux 微分 $\partial_h f(x)$ 对于 h 一般不必是綫性的。②

定理 5. (泛函数的中值公式): 設泛函数 $f(x)$ 的 Gateaux 微分 $\partial_h f(x)$ 在 Banach 空間 E 的一个凸开集 G 的每点处存在，那末，对于任意点 $x, x+h\in G$，下列(Lagrange)公式成立：存在实数 τ，使

$$f(x+h)-f(x)=\partial_h f(x+\tau h),\quad 0<\tau<1. \tag{12}$$

証: 令 $\varphi(t)=f(x+th)$，那末

$$\varphi'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x+th+\Delta th)-f(x+th)}{\Delta t}=\partial_h f(x+th).$$

① 此例取自 M. M. Вайнберг[6]。

② Gateaux 微分对 h 是綫性的条件由 M. M. Вайнберг[6]給出。

由此存在 $\tau, 0<\tau<1$, 使

$$f(x+h)-f(x)=\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\tau)=\partial_h f(x+\tau h).$$

証完。

对于算子，虽然如(12)的 Lagrange 公式不成立，但仍有一个减弱的形式成立。

定理 6. (算子的 Lagrange 公式): 設 $P(x)$ 是定义在 Banach 空間 X 的某开凸集 G 上并在共軛空間 X^* 中取值的按 Gateaux 可微分的算子，設它的 Gateaux 微分是綫性的。那末对于 $x, x+z\in G$, 及任意 $h\in X$, 必存在实数 $\tau(=\tau(h))$ 使 $0<\tau<1$ 且

$$(P(x+z)-P(x))(h)=\partial_z P(x+\tau z)h.$$

証 考察对于 h 的綫性有界泛函数

$$\varphi(x, h)\equiv P(x)h.$$

这时
$$\frac{\varphi(x+\lambda z, h)-\varphi(x, h)}{\lambda}=\frac{P(x+\lambda z)-P(x)}{\lambda}\cdot h,$$

从而
$$\partial_z\varphi(x, h)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\varphi(x+\lambda z, h)-\varphi(x, h)}{\lambda}=\partial_z P(x)\cdot h.$$

但对于泛函数 $\varphi(x, z)$ (固定 z), 依定理 5, Lagrange 公式(12)成立，从而存在实数 $\tau, 0<\tau<1$, 使

$$\varphi(x+z, h)-\varphi(x, h)=\partial_z\varphi(x+\tau z, h),$$

即
$$P(x+z)h-P(x)h=\partial_z P(x+\tau z)\cdot h.$$

(但注意这里的 τ 是依賴于 h 的。)証完。

对于泛函数，不仅 Lagrange 公式成立，而且有旁項的 Taylor 展式也成立。

定理 7. (有旁項 Taylor 展开): 設定义在 Banach 空間 X 的某个开凸区域 G 上的泛函数 $f(x)$ 具有連續的 n 阶 Fréchet 导算子，那末当 $|\lambda|<\rho\equiv\sup(\alpha|S(x_0, \alpha)\subset G)$ 时，存在一个 $\theta=\theta(x_0, h, \lambda, n)$, $0<\theta<1$, 使

$$f(x_0+\lambda h)=f(x_0)+\lambda f'(x_0)h+\cdots+\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)h^{n-1}+$$

$$+\frac{\lambda^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta\lambda h)h^n, \qquad (13)$$

这里 $f^{(k)}(x_0)h^k=f^{(k)}(x_0)\underbrace{h\cdots\cdots h}_{k\text{ 項}}$。

証: 令 $\varphi(\lambda)=f(x_0+\lambda h)$，对于固定的 h，$\varphi(\lambda)$ 是平常的函数，且依假定它具直到 n 阶的导函数，并且

$$\varphi^{(k)}(\lambda)=f^{(k)}(x_0+\lambda h)h^k.$$

于是使用关于 $\varphi(\lambda)$ 的平常 Taylor 公式，使得

$$f(x_0+\lambda h)=\varphi(\lambda)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}\varphi^{(k)}(0)+\frac{\lambda^n}{n!}\varphi^{(n)}(\theta\lambda),\ 0<\theta<1,$$

这里 $\theta=\theta(x_0, h, \lambda, n)$。从而

$$f(x_0+\lambda h)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}f^{(k)}(x_0)h^k+\frac{\lambda^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta\lambda h)h^n,$$

証完。

定义 9. 泛函数 $f(x)$ 叫做在 $x=x_0$ 处具有局部極小(極大)，是指存在正数 ε，使

$$\|x-x_0\|<\varepsilon\Longrightarrow f(x)\geqslant f(x_0)(\text{相应地} f(x)\leqslant f(x_0)).$$

極大与極小混称極值。

值得注意的是对于 $x=R^k$ 的情形，这定义与数学分析学中平常函数(單变量或多变量的)的(局部)極大極小値的定义相符合。例如对于 $C^{(1)}[a, b]$ 上的泛函数

$$F(x)=\int_a^b f(t, x(t), x'(t))dt$$

这定义与变分法中所謂"弱極値"一致①。

为了求極值，用 Fréchet 微分，甚至用 Gateaux 微分，都太限制了。为此，我們依据 M. Fréchet [1] 引入广义变分。

定义 10. 所謂定义在 Banach 空間 X 中某区域 G 中的泛函数 $f(x)$ 在 $x=x_0(\in \overset{\circ}{G})$ 处具广义 n 阶变分，是指存在泛函数 $f_i(x_0, h)$ $(h\in X)(1\leqslant i\leqslant n)$，使

$$f(x_0+\lambda h)=f(x_0)+\lambda f_1(x_0, h)+\cdots+\frac{\lambda^n}{n!}f_n(x_0, h)+\lambda^n\varepsilon_n(x_0, h, \lambda), \tag{14}$$

这里对于每个 $h\in E$,

$$\lim_{\lambda\to 0}\varepsilon_n(x_0, h, \lambda)=0.$$

这时，$f_n(x_0, h)$ 叫做 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的广义 n 阶变分，表示成

$$\delta_{h}^{n}{}_{n} f(x_0)=f_n(x_0, h).$$

注： 在定义 10 的条件下，对于整数 $p(0<p\leqslant n)$，可以写成

$$f(x_0+\lambda h)=f(x_0)+\lambda f_1(x_0, h)+\cdots+\frac{\lambda^p}{p!}f_p(x_0, h)+\lambda^p\varepsilon_p(x_0, h, \lambda), \tag{15}$$

这里
$$\varepsilon_p(x_0, h, \lambda)=\frac{\lambda}{(p+1)!}f_{p+1}(x_0, h)+\cdots+$$
$$+\frac{\lambda^{n-p}}{n!}f_n(x_0, h)+\lambda^{n-p}\varepsilon_n(x_0, h, \lambda).$$

因此对于每一个固定的 h,

$$\lim_{\lambda\to 0}\varepsilon_p(x_0, h, \lambda)=0.$$

从而 $f_p(x_0, h)$ 乃是 $f(x)$ 在 x_0 处的广义 p 阶变分。于是由 (14), (15)

$$\delta_{h}^{p}{}_{p} f(x_0)=f_p(x_0, h)=$$
$$=p!\left[\frac{f(x_0+\lambda h)-f(x_0)-\cdots-\dfrac{\lambda^{p-1}}{(p-1)!}f_{p-1}(x_0, h)}{\lambda^p}-\varepsilon_p(x_0, h, \lambda)\right].$$

① 見例如 Лаврентьев-Люстерник，变分学教程，第三章 §7。

当 $\lambda\to 0$ 时，上式右边以 λ^p 为分母的分式（对固定的 h）有唯一的極限，卽在 $x=x_0$ 处至多有一个 $p(\leqslant n)$ 阶的广义变分。于是(14)可以写成

$$f(x_0+\lambda h)=f(x_0)+\lambda\delta_h f(x_0)+\cdots+\frac{\lambda^p}{p!}\delta^p_{h^p}f(x_0)+\cdots+$$
$$+\frac{\lambda^n}{n!}\delta^n_{h^n}f(x_0)+\lambda^n\varepsilon_n(x_0,h,\lambda),$$

这里对固定的 x_0, h,

$$\lim_{\lambda\to 0}\varepsilon_n(x_0,h,\lambda)=0.$$

把上述与定理 7 及 Fréchet 微分的定义比較，可知当泛函数 $f(x)$ 在 x_0 处具 n 阶 Fréchet 微分 $f^{(n)}(x_0)h^n$ 时，那末它也具广义 n 阶变分 $\delta^n_{h^n}f(x_0)$，并且二者相等。但如 $f(x)$ 在 x_0 处有广义 n 阶变分，它在 x_0 处不必有 n 阶微分。

例：令　　$f(t)=t^2w(t)$,　t 是实数。

設 $w(t)$ 是遍处不可微分的連續函数。这函数 $f(t)$ 在 $t=0$ 处具广义二阶变分，因为它可以表示成

$$f(\lambda t)=f(0)+\lambda f_1(0,t)+\frac{\lambda^2}{2!}f_2(0,t)+\lambda^2\varepsilon(0,t,\lambda),$$

这里　$$\lim_{\lambda\to 0}\varepsilon(0,t,\lambda)=0.$$

事实上，只須令

$$f_1(0,t)=0,\quad f_2(0,t)=2t^2w(0),$$
$$t^2w(\lambda t)=t^2(w(0)+\varepsilon_1(0,t,\lambda)),\quad \varepsilon=t^2\varepsilon_1.$$

但 $f(t)$ 在 $t=0$ 处不具二阶微分！

定理 8.（極值問題）：設定义在 Banach 空間 X 的开凸集 G 上的泛函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处具一阶变分（Gateaux 微分）$\partial_h f(x_0)$。为了 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处具局部極值，必須对于任意 $h\in X$,

$$\partial_h f(x_0)=0.$$

証 依假定

$$\frac{f(x_0+\lambda\Delta x)-f(x_0)}{\lambda}=\partial_{\Delta x}f(x_0)+\varepsilon(x_0, \Delta x, \lambda), \tag{16}$$

这里
$$\lim_{\lambda\to 0}|\varepsilon(x_0, \Delta x, \lambda)|=0.$$

因此，如取 $|\lambda|$ 足够小，依据 $\lambda>$ 或 <0, 等式(16)左边 $\geqslant 0$ 或 $\leqslant 0$（如在 x_0 处 $f(x)$ 为極小值）。因此，必然 $\partial_h f(x_0)=0$。

定理 9. 如在定理 8 的条件下，$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处还有广义二阶变分，$\delta_{h^2}^2 f(x_0)$, 那末为了 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处具局部極小(相应地局部極大)，必須

$$\delta_{h^2}^2 f(x_0)\geqslant 0 \text{（相应地}\leqslant 0\text{）}.$$

証 因

$$f(x_0+\lambda h)-f(x_0)=\lambda\delta_h f(x_0)+\frac{\lambda^2}{2!}\delta_{h^2}^2 f(x_0)+\lambda^2\varepsilon_2(x_0, h, \lambda),$$

这里
$$\lim_{\lambda\to 0}\varepsilon_2(x_0, h, \lambda)=0 \text{（固定 } h\text{）}.$$

如果 $f(x)$ 在 x_0 处达到極小值，依定理 8, $\delta_h f(x_0)=0$, 从而

$$\frac{f(x_0+\lambda h)-f(x_0)}{\lambda^2}=\frac{1}{2}\delta_{h^2}^2 f(x_0)+\varepsilon_2(x_0, h, \lambda).$$

对于足够小的 $|\lambda|$, 左边 $\geqslant 0$。令 $\lambda\to 0$, 于是得

$$\delta_{h^2}^2 f(x_0)\geqslant 0,$$

証完。

关于極值存在的充分条件以及極值問題的更詳尽討論，請見 Fréchet 的文章 [1]。

参 考 文 献

[1] Fréchet, M.: Le problème de l'existence d'un extremum local d'une fonctionnelle, Ann. Sc. éc. norm. Sup. 73 (1956). 93—120.

[2] Гавурин, М. К.: Аналитические методы исследования нелинейных

функциональных преобразований, учёные записки ЛГУ, сер. Матем. 19 (1950), 59—154.

[3] Красносельский, М. А.: Некоторые задачи нелинейного анализа, Успехи Матем. наук, 9:3 (1954), 57.

[4] Люстерник, Л. А.: Некоторые Вопросы Нелинейного Функционального анализа, Успехи Матем. наук, 11:6 (1956). 145—168.

[5] Люстерник, Л. А. и Соболев, В. И.: 汎函数分析概要，第六章。

[6] Вайнберг, М. М.: Некоторые. Вопросы Дифференциального исчисления в линейных пространствах, Успехи Матем наук, 7:4 (1952) 55—102.

[7] Hille, E.: Functional analysis and semigroups.

§ 0. 函数方程的近似解法

在实用上，求各种方程——代数方程、超越方程、微分方程、积分方程以及其他——的准确解只在極特殊的場合才是可能的。因而制定各种近似解法具有很大的現实意义。近一二十年来，特别是在苏联 Л. В. Канторович 的在四十年代的一系列工作影响之下，泛函分析在各种方程的近似解法方面得到了丰饒的应用。泛函分析由于它本身所特具的高度綜合性，使得种种不同方程的近似解法得到統一的处理，从而，过去只用在特殊形式的方程（例如代数方程組、一变数的超越方程）的一些方法通过泛函分析的观点很自然地移植到其他种种方程上去，这种統一使得問題的本質可以更清楚地呈現出来，并且甚至应用到某些具体情况中时可以得出比以往通过繁复計算更好的估值来。在一些問題中，也可以得出近似方法的收斂性的証明，并得出收斂速率的估值来。

Л. В. Канторович 的較早的工作已經总結在他的綜合报告"泛函分析与应用数学"中(1948)。这方面，近年来的进展較多，这里着重叙述非綫性方程的一般情形，而对綫性情形一般只作为非綫性的特殊情形而略为論及，这与 Канторович 的綜合报告之以很大篇幅論綫性情况不同。此外，这里只限于討論用本章前數节的基础知識所能处理的問題，

从而并非对泛函分析在近似方法方面应用的全面介紹。为此，我們在这里只介紹一般叠代法，牛頓方法及其各种推广与类似、最速下降法以及近似方程的一般理論。

(一)一般叠代法[1]

在解多种方程时，我們可以把方程化成下面形式：

$$x = Px, \tag{1}$$

这里 P 是作用在某函数空間中(即由这空間到它自己之中)的算子。所謂叠代法，是指从某元 x_0 出發，并令

$$x_{n+1} = Px_n \quad (n=0, 1, 2, \cdots). \tag{2}$$

如取 x_n 为第 n 次近似，那末在适当条件下，当 $n\to\infty$ 时，x_n 按某种方式收斂于方程(1)的准确解，这不但在理論上便于用来証明某些方程的解的存在及其一意性，而且在适当的場合下还可用于实际求解。現在我們就 Fréchet 空間的一般情形証明叠代法的收斂。

定理 1. 設 P 是作用在 Fréchet 空間 E 中的算子，設 G 是 P 的定义域中的一个开集。設 P 在 G 中滿足 Lipschitz 条件，即存在数 α (叫做 Lipschitz 常数)，$0<\alpha<1$，使对于 G 中任意的元 x_1 与 x_2，

$$\|Px_1 - Px_2\| \leqslant \alpha \|x_1 - x_2\|. \tag{3}$$

从 G 中一元 x_0 出發，当球

$$\|x - x_1\| \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\| \tag{4}$$

含在 G 中时，程序(2)收斂于方程(1)在 G 中的一意解 x^*。如果取 x_n 作近似解，那末誤差估值是

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\|. \tag{5}$$

証 依(4)可見 $x_1 \in G$。由于

---

[1] 这里的叙述可以在更一般的空間中考虑。由于所舉的例大多是賦范空間的情形，我們不在这里追求更大的普遍性。

$$\|x_2-x_1\|=\|Px_1-Px_0\|\leqslant\alpha\|x_1-x_0\|<\frac{\alpha}{1-\alpha}\|x_1-x_0\|,$$

所以 $x_2\in G$ 一般，設已知 $x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_1\in G$, 那末

$$\|x_n-x_{n-1}\|=\|Px_{n-1}-Px_{n-2}\|\leqslant\alpha\|x_{n-1}-x_{n-2}\|\leqslant\cdots\leqslant\alpha^{n-1}\|x_1-x_0\|,$$

从而
$$\|x_n-x_1\|\leqslant\|x_n-x_{n-1}\|+\cdots+\|x_2-x_1\|\leqslant$$
$$\leqslant(\alpha^{n-1}+\cdots+\alpha)\|x_1-x_0\|<\frac{\alpha}{1-\alpha}\|x_1-x_0\|,$$

就是說，x_n 也 $\in G$。用数学归納法，得知一切 $x_n\in G$, 并且

$$\|x_{n+p}-x_n\|\leqslant\|x_{n+p}-x_{n+p-1}\|+\cdots+\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant$$
$$\leqslant(\alpha^{p-1}+\alpha^{p-2}+\cdots+\alpha+1)\alpha^n\|x_1-x_0\|<\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|x_1-x_0\|. \tag{6}$$

既然 $0<\alpha<1$, 所以 (x_n) 是基本列，从而由于 E 的完备性，

$$x^*=\lim_{n\to\infty}x_n$$

存在。在(6)中令 $p\to\infty$, 而取 $n=1$, 得

$$\|x^*-x_1\|\leqslant\frac{\alpha}{1-\alpha}\|x_1-x_0\|,$$

即 $x^*\in G$, 既然条件 (3) 蘊涵算子 P 在 G 中的連續性，从而在 (2) 中令 $n\to\infty$, 得

$$x^*=Px^*,$$

即 x^* 是(1)的准确解。如果在 G 中 (1) 还有另一准确解 z, 那末由 (3)

$$\|x^*-z\|=\|Px^*-Pz\|\leqslant\alpha\|x^*-z\|<\|x^*-z\|$$

这是荒謬的，从而(1)在 G 中只有一个解 x^*。

在(6)中令 $p\to\infty$, 得出誤差估値式(5)。

系 1. 如果 P 是定义在 Banach 空間 E 的某开球 G 中并在 E 中取値的可微分算子，并且設在 G 中按 Fréchet 意义的导算子 $P'(x)$ 滿足条件

$$\|P'(x)\|\leqslant\alpha<1\ \ (x\in G), \tag{7}$$

那末定理 1 的結果依旧成立。

証： 事实上，由 (7) 直接推出 Lipschitz 条件来：如果 $x_1, x_2\in G$,

那末

$$\|Px_1-Px_2\|\leqslant\sup_{\bar{x}\in G}\|P'(\bar{x})\|\,\|x_1-x_2\|\leqslant\alpha\|x_1-x_2\|.$$

系 2.（綫性情形） 設 A 是作用于 Banach 空間 E 中的有界綫性算子，并設

$$\|A\|\leqslant\alpha<1, \tag{8}$$

那末对于任意元 $b\in E$, 方程

$$x=Ax+b \tag{9}$$

在 E 中有一意解 x^*, 并且这解 x^* 可以用叠代法

$$x_{n+1}=Ax_n+b \tag{10}$$

从任意初始近似元 x_0 出發而求得:

$$x^*=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

証: 这时，在定理 1 中令 $G=E$, $Px=Ax+b$。于是

$$\|Px_1-Px_2\|=\|Ax_1-Ax_2\|\leqslant\|A\|\|x_1-x_2\|\leqslant\alpha\|x_1-x_2\|,$$

从而定理 1 適用。

注: 令 $P=I-\varepsilon F$, ε 是一个非零实数，F 是一个算子。于是方程(1)等价于方程

$$F(x)=0. \tag{1'}$$

于是，依定理 1, 如果

$$\|(I-\varepsilon F)x_1-(I-\varepsilon F)x_2\|\leqslant\alpha\|x_1-x_2\|,\quad x_1, x_2\in E,$$

这里 E 是 Banach 空間，$\alpha<1$, 那末方程(1′)有一意解。

例 1. 考察平常的一次代数方程組

$$\xi_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\xi_k+\beta_i\ (1\leqslant i\leqslant n) \tag{11}$$

把这方程看成 n 維空間中的方程(9)，由于选用不同的范数，就可以得到不同的收斂准則，而且，这些收斂都是指"按坐标收斂"。

先把 $A\sim(a_{ik})$ 看成由(l_n^2)到它自己之中的綫性算子，那末定理 1

系 2 的准則变成如下形式：如果

$$\sum_{i,j=1}^{n}|\alpha_{ij}|^2\leqslant\alpha<1,$$

那末由任意的初始近似解$(\xi_1^{(0)},\cdots,\xi_n^{(0)})$出發。叠代程序

$$\xi_i^{(n+1)}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\xi_k^{(n)}+\beta_i\quad(1\leqslant i\leqslant n)\qquad(12)$$

收斂于方程組(11)的准确解。事实上，A 看作(l_n^2)中的算子，它的范数滿足

$$\|A\|\leqslant\left[\sum_{i,j=1}^{n}|\alpha_{ij}|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

如果把 A 看成是由(m_n)到它自已之中的算子，那末，定理 1 系 2 的准則变成如下的形式：如果

$$\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}|\leqslant\alpha<1\qquad(1\leqslant i\leqslant n)$$

那末从任意初始近似解$(\xi_1^{(0)},\cdots,\xi_n^{(0)})$出發，叠代程序(12)收斂于方程(11)的准确解。这是因为在(m_n)中綫性算子 A 的范数是

$$\|A\|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}|.$$

如果把 A 看成是(l_n^1)中的算子，那末，当

$$\sum_{i=1}^{n}|\alpha_{ik}|\leqslant\alpha<1\qquad(1\leqslant k\leqslant n)$$

时，从任意的初始近似解出發，叠代程序(12)收斂于方程(11)的准确解。

前面把 A 看成是(l_n^2)中的算子时，得出了一个比較容易利用的准

则，但那里并沒有用到 A 的范数的准确估值。我們还可以得出下列結果：当陣 $\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}\alpha_{jk}\right)(1\leqslant i, k\leqslant n)$ 的一切固有值小于 1 时，那末从任意的初始近値解 $(\xi_1^{(0)}, \cdots, \xi_n^{(0)})$ 出發，叠代程序(12)收斂于方程(11)的准确解[①]。

例 2. 考察無穷多变量的無穷方程組

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}\xi_k + \beta_i \qquad (i=1, 2, \cdots). \quad (13)$$

方程組(13)叫做全正则的，是指存在正数 $\vartheta<1$，使

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{ik}| \leqslant \vartheta < 1 \quad (i=1, 2, \cdots)$$

如果 $(\beta_i)\in(m)$，那末把 $(\alpha_{ij})\sim A$ 看成是由 (m) 到 (m) 中的綫性有界算子，可得下列結果[②]：

对于任意有界数列 (β_i)，全正则方程組(13)有一意的有界解 (ξ_i^*)（即 $(\xi_i^*)\in(m)$），并且这解可以由任意有界列 $(\xi_i^{(0)})$ 出發，用叠代法

$$\xi_i^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}\xi_k^{(n)} + \beta_i \qquad (i=1, 2, \cdots)$$

求出。这时数列 $(\xi_i^{(n)})$ 当 $n\to\infty$ 时一致收斂于准确解 (ξ_i^*)。

例 3. 考察綫性积分方程

$$x(s) = \lambda\int_a^b K(s, t)x(t)dt + b(s) \quad (a\leqslant s\leqslant b). \quad (14)$$

設 $K(s, t)$ 是連續函数，$b(s)$ 也是連續函数。把(14)看成是 $C[a, b]$ 中

① 以上包括了 Фаддеева 書中所述的一些結果。

② 見 Канторович-Крылов 書 [24] стр. 37—38。

的綫性方程，則得下列結果：

如果
$$|\lambda|<\frac{1}{\max\limits_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b|K(s,t)|dt}$$

那末(14)有一意連續解 $x^*(s)$，并且这解可由任意連續函数 $x_0(s)$ 出發利用叠代法

$$x_{n+1}(s)=\lambda\int_a^b K(s,t)x_n(t)dt+b(s) \tag{15}$$

求出。这时 $x_n(s)$ 在 $[a,b]$ 上一致收斂于 $x^*(s)$。

如果 $b(s)\in L^2[a,b]$，$K(s,t)$ 是二变数的平方有和函数，那末可以把(14)看成是 $L^2[a,b]$ 中的綫性方程，于是当

$$|\lambda|<\frac{1}{\left[\int_a^b\int_a^b|K(s,t)|^2 ds\,dt\right]^{1/2}}$$

时，方程(14)在 L^2 中有一意解，并且叠代程序(15)平方平均收斂于(14)的解。

例 4. 考察非綫性方程組

$$\xi_j=\varphi_j(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n) \qquad (1\leqslant j\leqslant n). \tag{16}$$

設每个 φ_j 定义于 n 維空間的某区域 G 中，并在 G 中有連續一阶偏导函数。我們可以把(16)看成是 (m_n) 中非綫性方程

$$x=Px.$$

这时 P 由定义是按 Fréchet 可微分的，其导算子 $P'(x)$ 由陣

$$\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial\xi_k}\right) \quad (1\leqslant j,k\leqslant n)$$

表現。于是設
$$\alpha=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{k=1}^{n}\sup_G\left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_k}\right|<1, \tag{17}$$

并且設球(4)包含在 G 中，那末(16)在 G 中有一意解，而这个解 x^* 可以

从任意的初始近似$(\xi_1^{(0)}, \cdots, \xi_n^{(0)})$出發用叠代程序

$$\xi_k^{(\nu+1)}=\varphi_k(\xi_1^{(\nu)}, \cdots, \xi_n^{(\nu)}) \quad (1\leqslant k\leqslant n), \nu=1, 2, \cdots$$

求出:

$$\lim_{\nu\to\infty} \xi_k^{(\nu)}=\xi_k^* \qquad (1\leqslant k\leqslant n).$$

同理，如果把(16)看成是(l_n^1)或(l_n^2)中的方程，那末得出相应的結果，但这时条件(17)各相应地換成

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} \sup_G \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_k}\right|<1$$

及

$$\left[\sum_{j,k=1}^{n} \left(\sup_G \left|\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_k}\right|\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}<1.$$ ①

例 5. 考察常微分方程

$$x'=f(t, x) \tag{18}$$

并設$f(t, x)$是定义在$R\times E$中的函数，E是Banach空間。这里x'表示$\frac{d}{dt}x(t)$。設$f(t, x)$在$R\times E$的一个閉区域G上有界，关于t連續，关于x滿足Lipschitz条件

$$\|f(t, x_1)-f(t, x_2)\|\leqslant\mu\|x_1-x_2\| \left(\begin{smallmatrix}(t, x_1)\\(t, x_2)\end{smallmatrix}\in G\right).$$

为了求(18)的滿足初始条件$x(t_0)=x_0$的解$(x_0\in E)$，我們把(19)化成等价的积分方程

$$x=x_0+\int_{t_0}^{t} f(t, x(t))dt, \tag{19}$$

并用叠代程序

$$x_{n+1}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau, x_n(\tau))d\tau. \tag{20}$$

事实上，$[a, b]$上一切在Banach空間E中取值的連續函数的全体

① 这里包括了例如 Энциклопедия элементарной математики, II, стр. 367—369, 384, 389 中的一些結果。

$C_E[a, b]$ 按函数的运算与范数

$$\|x\| = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} \|x(t)\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \|x(t)\|$$

形成一个 Banach 空間，而如果选定 a, b, 使由条件

$$x(t_0) = x_0, \quad \left\|\frac{dx(t)}{dt}\right\| \leqslant \mu, \qquad (a \leqslant t \leqslant b)$$

决定的集完全含在区域 G 中，那末对于算子

$$Px = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x(t))dt$$

有

$$\|Px_1 - Px_2\| \leqslant \int_{t_0}^{t} |f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \mu(b-a) \max_{a \leqslant t \leqslant b} \|x_1(t) - x_2(t)\| = \mu(b-a)\|x_1 - x_2\|.$$

这里$\|x\|$表示 $x(t)$ 在 $C_E[a, b]$中的范数。于是当 $\mu(b-a) < 1$ 时，定理 1 适用，从而程序(20)从任意 $x_0(t) \in C_E[a, b]$ 出發一致收斂于(19)(即(18))的解。

取 E 为有穷維空間，例如取 $E = (m_n)$, 那末上述結果卽是平常常微分方程理論中一阶方程或方程組中的結果①。

R. V. Mises 与 Pollaczek, Geiringer 在 1929 年提出解一次代数方程組的 Seidel 法曾由 J. Weissinger 作了一般处理[41]，由于这方法也可以由叠代法推出，所以把它的叙述附在这里。

注意，由于 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 是自共軛的，从而其中每个有界綫性算子 T 的共軛算子也可以看作是定义在同空間之中的，并且共軛关系由等式

$$(x, Ty) = (T^*x, y) \qquad (x, y \in \mathfrak{H})$$

① 一維情形見 И. Г. Петровский 常微分方程論講义，§15，多維情形，見同書 §§31—32。

表达。如果 $T=T^*$, T 叫做对称的有界算子。它的特征是

$$(x, Ty)=(Tx, y) \qquad (x, y\in\mathfrak{H}).$$

由于$(x,Tx)=(Tx,x)=\overline{(x,Tx)}$, 所以对于对称有界算子 T 来說,(x,Tx) 是实数。如果存在正数 μ, 使

$$(Tx, x)\geqslant\mu\|x\|^2 \qquad (x\in\mathfrak{H}),$$

那末 T 叫做正定的(对称)有界綫性算子。

定理 2(Seidel 方法) 設 A, S 与 F 是作用在 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 中的有界綫性算子，而 A 是正定的, S 是对称的, $S+F$ 是正定的。設存在綫性有界算子 B_1, B_2, 使

$$A=S-B_1-B_2, \quad B_2=B_1^*+F,$$

并且設$(S-B_1)^{-1}$ 作为有界綫性算子存在,令

$$T=(S-B_1)^{-1}B_2, \quad b^*=(S-B_1)^{-1}b$$

时,从任意 $x_0\in\mathfrak{H}$ 开始,叠代程序

$$x_{n+1}=Tx_n+b^* \tag{21}$$

收斂于綫性方程

$$Ax=b \tag{22}$$

的一意解。

証 由 T 的定义不难看出(22)等价于方程

$$x=Tx+b^*. \tag{23}$$

为了証明定理,先証有关諸算子之間的一个等式:

$$T^*AT=A-(I-T^*)(S+F)(I-T)+(F-F^*)(I-T). \tag{24}$$

事实上,因

$$AT=(S-B_1-B_2)T=B_2-B_2(S-B_1)^{-1}B_2=B_2(I-T).$$

令 $P=(I-T^*)(S+F)(I-T)$, 那末

$$\begin{aligned}T^*AT&=(T^*-I)AT+AT=-(I-T^*)B_2(I-T)+AT=\\&=-P-(I-T^*)(B_2-S-F)(I-T)+AT=\\&=-P+(I-T^*)(S-B_1^*)(I-T)+AT=\\&=-P+(S-B_1^*-T^*(S-B_1^*))(I-T)+AT=\end{aligned}$$

$$=-P+(S-B_1^*-B_2^*)(I-T)+AT=$$

$$=-P+A^*(I-T)+AT=-P+(A^*-A)(I-T)+A.$$

但
$$A^*-A=S-B_1^*-B_2^*-(S-B_1-B_2)=$$

$$=(B_1-B_1^*)+(B_2-B_2^*)=F-F^*, \tag{25}$$

上面的等式証完。特别当 A 是正定对称时，可以由(25)看出 F 是对称的。于是(24)变成

$$T^*AT=A-(I-T^*)(S+F)(I-T)=A-P,$$

并且由于 $S+F$ 的对称性得到 P 的对称性。于是在 $\mathfrak{H}$ 中改用范数 $\|x\|_A=\sqrt{(Ax,x)}$，由于 A 的正定性，这范数与 $\mathfrak{H}$ 中原来范数等价。由于 $S+F$ 的正定性不难看出 P 的正定性，从而存在正数 p，使

$$(Px,x)\geqslant p\|x\|_A^2 \qquad (x\in\mathfrak{H}).$$

無妨取 p 使 $0<p<1$。但

$$\|Tx\|_A=\sqrt{(ATx,Tx)}=\sqrt{(T^*ATx,x)}=$$

$$=\sqrt{((A-P)x,x)}\leqslant\sqrt{1-p}\,\|x\|_A.$$

这就是說，$\|T\|_A\leqslant\sqrt{1-p}<1$ 依定理 1 的系 2 可知程序(21)按尺度 $\|x\|_A$，从而也按尺度 $\|x\|$，收斂于(23)，即(22)的准确一意解。

例 1 設 $\mathfrak{H}$ 是 n 維空間，$A\sim(\alpha_{ik})$ 是正定对称陣，令 S, B_1, B_2 各表由下列諸陣决定的綫性算子：

$$S\sim\begin{pmatrix}\alpha_{11} & & O\\ & \alpha_{22} & \\ & & \ddots \\ O & & \alpha_{nn}\end{pmatrix}\quad -B_1=\begin{pmatrix}O & & & O\\ \alpha_{21} & O & & \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \ddots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2}\cdots & \alpha_{n,n-1} & O\end{pmatrix},\quad -B_2=\begin{pmatrix}O & \alpha_{12}\alpha_{13}\cdots\alpha_{1n}\\ & O\ \ \alpha_{23}\cdots\alpha_{2n}\\ & \ddots \\ & O \qquad \alpha_{n-1,n}\\ & \qquad O\end{pmatrix}$$

那末如定理 2 的一切条件滿足，就得出解一次代数方程組

$$Ax=b:\quad \sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\xi_k=\beta_i \qquad (1\leqslant i\leqslant n) \tag{26}$$

的 Seidel 方法：

$$\xi_i^{(\nu+1)}=-\frac{1}{\alpha_{ii}}\left[\sum_{k=1}^{i-1}\alpha_{ik}\xi_k^{(\nu+1)}+\sum_{k=i+1}^{n}\alpha_{ik}\xi_k^{(\nu)}-\beta_i\right\}\ \begin{matrix}1\leqslant i\leqslant n,\\ \nu=1,2,\cdots,\end{matrix} \tag{27}$$

而这程序收歛于(26)的解。

如取 S 由 A 的一些主子式拼成，并相应地取 $-B_1$, $-B_2$ 各表 S 下及 S 上諸元素形成的陣，那末，就得出 V. Mises-Pollaczek-Geiringer 的所謂 Gruppenverfahren。

例 2. 考察 Fredholm 第二种綫性积分方程

$$x(s)-\int_0^1 K(s, t)x(t)dt=b(s), \tag{28}$$

这里設 $K(s, t)$ 是兩变量的連續函数，把方程(28)看成是 $\mathfrak{H}=L^2[0, 1]$ 中的綫性方程。令

$$B_1(s, t)=\begin{cases}K(s, t) & \text{如果 } t\leqslant s;\\ 0 & t>s;\end{cases}\qquad B_2(s, t)=\begin{cases}0 & t\leqslant s,\\ K(s, t) & t>s.\end{cases}$$

于是由核 $K(s, t)$ 决定的积分算子 K 可以表示成 $K=B_1+B_2$, 这里 B_i 是由核 $B_i(s, t)$ 决定的积分算子($i=1, 2$)。$I-B_1$ 对应一个 Volterra 积分方程，从而逆 $(I-B_1)^{-1}=I+L$ 存在，这里依 §7,

$$L=\sum_{\nu=1}^{\infty} B_1^{\nu}.$$

L 的核由 Neumann 級数

$$L(s, t)=\sum_{\nu=1}^{\infty} B_1^{(\nu)}(s, t)$$

决定，$B_1^{(\nu)}$ 表示 B_1 的第 ν 叠代核：即

$$B_1^{(\nu+1)}(s, t)=\int_0^1 B_1(s, \tau)B_1^{(\nu)}(\tau, t)d\tau.$$

这时，令 $T=(I-B_1)^{-1}B_2$, $b^*=(I-B_1)^{-1}b$, 方程(28)等价于方程

$$(I-T)x=b^*,$$

即积分方程

$$x(s)-\int_0^1 T(s, t)x(t)dt=b^*(s),$$

这里
$$T(s, t)=B_2(s, t)+\int_0^1 L(s, t)B_2(\tau, t)d\tau,$$
$$b^*(s)=b(s)+\int_0^1 L(s, t)b(t)dt.$$

如 K 是对称的：$K(s, t)=K(t, s)$，可以取 $S=I$, $F=0$，如又設 A 是正定的，即
$$\int_0^1\int_0^1 K(s, t)x(s)x(t)ds\,dt<\int_0^1 x^2(s)ds, \quad x\in L^2,$$
那末上述的定理 2 适用，而叠代程序
$$x_{\nu+1}=Tx_\nu+b^*$$
平均收斂于原方程的解。但如果
$$\gamma=\max_{0\leqslant s\leqslant 1}\int_0^1 T^2(s, t)dt<+\infty,$$
那末由
$$x_{\nu+1}-x_{\mu+1}=T(x_\nu-x_\mu)$$
可得(利用 Schwarz-Буняковский 不等式)
$$|x_{\nu+1}(s)-x_{\mu+1}(s)|\leqslant\sqrt{\gamma}\left(\int_0^1 |x_\nu-x_\mu|^2dt\right)^{1/2},$$
从而由平均收斂导出一致收斂。

(二)牛頓程序及其各种推广与类似

解平常(超越)方程
$$f(x)=0$$
的牛頓程序乃是学过数学分析初等教程的人都知道的。这一方法的中心思想，乃是要求曲綫 $y=f(x)$ 与横軸的交点；我們从曲綫上一点 $(x_0, f(x_0))$ 出發，用曲綫上在这点处的切綫和横軸的交点作为近似。反复使用这一近似方法，便得近似程序

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Л. В. Канторович 最早把这一公式移植到一般 Banach 空間中的方程上来，更确切地說，設 $P(x)$ 是定义在某 Banach 空間 X 中一个区域 G 上并在 Banach 空間 Y 中取值的算子，为了求方程

$$P(x)=0 \tag{29}$$

的解。我們仿上述 $X=Y=R$ 的情形，假定 $P(x)$ 有連續 Fréchet 导算子 $P'(x)$，并設 $P'(x)^{-1}$ 在有关区域中存在，而使用近似程序

$$x_{n+1}=x_n-P'(x_n)^{-1}P(x_n). \tag{30}$$

Канторович 在一些条件下，証明了程序(30)的收斂，这里的証法乃是把这程序化归叠代法，从而証明較簡(見[2])。

定理 3. 設 $P'(x)$ 在 x_0 的某鄰域 G 中存在，且設

1° $P'(x_0)^{-1}$ 存在，$\|P'(x_0)^{-1}\|\leqslant\beta$，且 $\|P(x_0)\|\leqslant l$；

2° $P'(x)$ 在 G 中一球 $\|x-x_0\|\leqslant\rho$ 中滿足 Lipschitz 条件

$$\|P'(x_1)-P'(x_2)\|\leqslant M\|x_1-x_2\|;$$

3° 設諸常数 β, l, M, ρ 之間有下列关系：

$$\beta^2Ml+2\beta M\rho<2,\ \rho=\beta l\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{2^k-1}\right\},\ \alpha=\frac{\beta^2Ml}{2(1-\beta M\rho)}\quad(故\ \alpha<1);$$

那末方程(29)在球 $\|x-x_0\|\leqslant\rho$ 中有一意的解 x^*，而且牛頓程序(30)收斂于 x^*，斂速估値是

$$\|x_n-x^*\|\leqslant\rho\alpha^{2^n-1}. \tag{31}$$

注 假定 $\|P(x_0)\|\leqslant l$ 意味着初始近似 x_0 是足够好的，即使 $P(x_0)$ 足够接近于 0，注意斂速(31)是很高的，这胜过前面叙述的一般叠代法。

証 因为

$$\|P'(x)-P'(x_0)\|\leqslant M\rho<\frac{1}{\beta}\leqslant\frac{1}{\|P'(x_0)^{-1}\|},\quad(\|x-x_0\|\leqslant\rho)$$

从而依 § 7 的結果，对于滿足 $\|x-x_0\|\leqslant\rho$ 的 x, $P'(x)^{-1}$ 存在并且

$$\|P'(x)^{-1}-P'(x_0)^{-1}\|\leqslant\frac{\|P'(x_0)^{-1}\|^2\|P'(x)-P'(x_0)\|}{1-\|P'(x_0)^{-1}\|\|P'(x)-P'(x_0)\|}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\beta^2M\rho}{1-\beta M\rho},\quad(\|x-x_0\|<\rho).$$

由假定 1° 由此可知

$$\|P'(x)^{-1}\|\leqslant\frac{\beta}{1-\beta M\rho},\quad(\|x-x_0\|\leqslant\rho).\tag{32}$$

由(30)$(n=0)$得

$$\|x_1-x_0\|\leqslant\beta l<\beta l\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{2^k-1}\right\}=\rho.$$

設已知 $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1$ 都在球 $\|x-x_0\|\leqslant\rho$ 中，于是由 § 9 中的結果可知

$$\|P(x_n)\|=\|P(x_n)-P(x_{n-1})-P'(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})\|\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^1\|P'(x_{n-1}+\tau(x_n-x_{n-1}))-P'(x_{n-1})\|d\tau\cdot\|x_n-x_{n-1}\|\leqslant$$

$$\leqslant M\|x_n-x_{n-1}\|^2\int_0^1\tau\,d\tau=\frac{M}{2}\|x_n-x_{n-1}\|^2,\tag{33}$$

再由(32)得

$$\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant\|P'(x_n)^{-1}\|\,\|P(x_n)\|\leqslant\frac{\beta M}{2(1-\beta M\rho)}\|x_n-x_{n-1}\|^2\leqslant$$

$$\leqslant\left[\frac{\beta M}{2(1-\beta M\rho)}\right]^{2^n-1}\|x_1-x_0\|^{2^n}\leqslant\beta l\alpha^{2^n-1}.$$

于是

$$\|x_{n+1}-x_0\|\leqslant\|x_{n+1}-x_n\|+\cdots+\|x_1-x_0\|\leqslant\beta l\left[\sum_{k=0}^{n}\alpha^{2^k-1}\right]<\rho,$$

即 x_{n+1} 也在球 $\|x-x_0\|\leqslant\rho$ 中。用数学归納法得知一切 x_n 都在球 $\|x-x_0\|\leqslant\rho$ 中，并且

$$\|x_n-x_{n+p}\|\leqslant\|x_n-x_{n+1}\|+\cdots+$$

$$+\|x_{n+p-1}-x_{n+p}\|\leqslant\beta l\left\{\sum_{k=n}^{n+p-1}\alpha^{2^k-1}\right\}<\rho\alpha^{2^n-1}, \tag{34}$$

既然 $0<\alpha<1$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x^*$ 存在。在(34)中令 $P\to\infty$, 得

$$\|x_n-x^*\|\leqslant\rho\alpha^{2^n-1}.$$

即(31), 而由于 P 的連續性, 由(33)可知 $P(x^*)=0$。

剩下的是要証解的一意性。設在 $\|x-x_0\|\leqslant\rho$ 中(29)还有另一解 z, 那末

$$\begin{aligned}\|x^*-z\|&\leqslant\|P'(x_0)^{-1}\|\,\|P'(x_0)(x^*-z)\|=\\&=\|P'(x_0)^{-1}\|\,\|P(x^*)-P(z)-P'(x_0)(x^*-z)\|\leqslant\\&\leqslant\beta\int_0^1\|P'(z+\tau(x^*-z))-P'(x_0)\|d\tau\cdot\|x^*-z\|\leqslant\beta M\rho\|x^*-z\|,\end{aligned}$$

而因 $\beta M\rho<1$, 这是荒謬的, 証完。

注 特别如設二阶导算子 $P''(x)$ 存在, 且在球 $\|x-x_0\|\leqslant\rho$ 中常有

$$\|P''(x)\|\leqslant M,$$

那末依 §9 的結果, Lipschitz 条件显然成立。

我們还可以把定理 3 的条件減弱, 但只能得出較慢的斂速。

定理 4. 設对于方程(29), 导算子 $P'(x)$ 在 x_0 的某鄰域 G 中存在, 且設

1° $P'(x_0)^{-1}$ 存在, $\|P'(x_0)^{-1}\|\leqslant\beta$, 且 $\|P(x_0)\|\leqslant l$;

2° $P'(x)$ 在 G 中一球 $\|x-x_0\|\leqslant\rho$ 中滿足条件

$$\|P'(x)-P'(x_0)\|\leqslant\delta;$$

3° 設諸常数 β,δ,l,ρ 之間有下列关系:

$$3\beta\delta<1,\ l\leqslant\frac{\rho(1-3\beta\delta)}{\beta};$$

那末方程(29)在球 $\|x-x_0\|\leqslant\rho$ 中有一意解 x^*, 并且"广义的牛頓程序"

$$x_{n+1}=x_n-P'(x'_n)^{-1}P(x_n),\ (\|x'_n-x_0\|\leqslant\rho\quad n=0,1,2,\cdots)\qquad(35)$$

收斂于 x^*，斂速估值是

$$\|x_n-x^*\|\leqslant\rho\alpha^n,$$

这里 $\alpha=\frac{2\beta\delta}{1-\beta\delta}<1$。

証 仿前定理的証明可知在 $\|x-x_0\|\leqslant\rho$ 中，$P'(x)^{-1}$ 存在并且

$$\|P'(x)^{-1}\|\leqslant\frac{\beta}{1-\beta\delta},\quad(\|x-x_0\|\leqslant\rho),$$

而

$$\|P(x_n)\|\leqslant\int_0^1\|P'(x_{n-1}+\tau(x_n-x_{n-1}))-$$

$$-P'(x'_n)\|d\tau\cdot\|x_n-x_{n-1}\|\leqslant2\delta\|x_n-x_{n-1}\|,$$

于是

$$\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant\|P'(x'_n)^{-1}\|\|P(x_n)\|\leqslant$$

$$\leqslant\alpha\|x_n-x_{n-1}\|\leqslant\alpha^n\|x_1-x_0\|\leqslant\left(\frac{\beta l}{1-\beta\delta}\right)\alpha^n.$$

由此，

$$\|x_{n+1}-x_0\|\leqslant\frac{\beta l}{1-\beta\delta}\left\{\sum_{k=0}^{n}\alpha^k\right\}<\frac{\beta l}{1-\beta\delta}\cdot\frac{1}{1-\alpha}=\frac{\beta l}{1-3\beta\delta}\leqslant\rho,$$

从而仿定理 1 的証就完成了証明。

注 程序(35)比牛頓程序具有較大的灵活性。因为可以按照某种方便而选择 x'_n。特别如取 $x'_n=x_n(n=0,1,2,\cdots)$，就得出程序(30)来。如取 $x'_n=x_0(n=0,1,2,\cdots)$，那末得出的程序

$$x_{n+1}=x_n-P'(x_0)^{-1}P(x_n)\qquad(n=0,1,2,\cdots)\quad(36)$$

叫做簡化了的牛頓程序，这时，定理 4 的条件 3° 还可以減弱成

$$\beta\delta<1,\ l\leqslant\frac{\rho(1-\beta\delta)}{\beta},$$

而定理 4 的結論仍成立。在实用上，程序(36)的便利在于在計算中只須一劳永逸地計算出一个逆算子 $P'(x_0)^{-1}$ 来，而不須在程序的每一步

驟分别計算出 $P(x_n)^{-1}$ 来。

例 1. 考察实数或复数的超越方程

$$f(x)=0, \tag{37}$$

这里設 f 是可微分函数，而 $f'(x)$ 在球 $\|x-x_0\|\leqslant\rho$ 中满足 Lipschitz 条件

$$|f'(x_1)-f'(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|.$$

这时
$$\|P'(x_0)^{-1}\|=\frac{1}{|f'(x_0)|}.$$

如果設
$$\frac{|f(x_0)|}{|f'(x_0)|^2}M+\frac{2}{|f'(x_0)|}M\rho<2,$$

这里

$$\rho=\frac{|f(x_0)|}{|f'(x_0)|}\cdot\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{2^k-1}\right\},\quad \alpha=\frac{M|f'(x_0)|}{2(|f'(x_0)|^2-|f'(x_0)|M\rho)}$$

那末方程(37)在球 $\|x-x_0\|\leqslant\rho$ 中有一意解 x^*，而牛頓程序

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

收斂于 x^* 并且誤差估值是

$$|x_n-x^*|\leqslant\rho\alpha^{2^n-1}.$$

例 2. 考察 n 个变量的 n 个方程的組：

$$f_i(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=0\qquad(1\leqslant i\leqslant n). \tag{38}$$

設下列諸条件滿足：

1° 方陣
$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial\xi_j}\right)\Bigg|_{\xi_j=\xi_j^{(0)}}$$

的行列式 Δ 不为 0，而且如果用 A_{ij} 表示这个陣中相应元的代数余子式，那末

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{|\Delta|}\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|\leqslant\beta;$$

2° 在球 $|\xi_i-\xi_i^{(0)}|<\rho$ 中，

$$\left|\frac{\partial^2 f_i}{\partial \xi_j \partial \xi_k}\right| \leqslant \lambda \ (1 \leqslant i,\ j,\ k \leqslant n);$$

$3°$　$|f_i(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \cdots, \xi_n^{(0)})| \leqslant l$, 而且設

$$\beta^2 \lambda n^2 l + 2\beta\rho l n^2 < 2, \tag{39}$$

这里　$$\rho = \beta l \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{2^k - 1} \right\}, \quad \alpha = \frac{\beta^2 \lambda n^2 l}{2(1 - \beta\lambda n^2 \rho)}.$$

那末方程組(38)在区域 $|\xi_i - \xi_i^{(0)}| \leqslant \rho$ 中有一意解，并且这个解可借牛頓程序求出，其斂速如定理 3 所示。

我們也可以把 n 維空間看作是(l_n^2)，卽欧几里得空間，于是不难得出下列結果：

設陣　$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}\right)\Bigg|_{\xi_j = \xi_j^{(0)}}$$

有逆 $\frac{1}{\Delta}(A_{ij})$，Δ 表示上述陣的行列式，A_{ij} 表示$\left.\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}\right|_{\xi_j = \xi_j^{(0)}}$ 在上述陣中的代数余子式。这里又設

$$\frac{1}{|\Delta|}\left(\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \beta.$$

又設在球

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \xi_i^{(0)})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \rho \tag{40}$$

中　$$\left|\frac{\partial^2 f_i}{\partial \xi_j \partial \xi_k}\right| \leqslant \lambda,\ \beta^2 \lambda n \sqrt{n}\, l + 2\beta\lambda n \sqrt{n}\, \rho < 2,$$

这里　$$\rho = \beta l \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{2^k - 1} \right\}, \quad \alpha = \frac{\beta^2 \lambda n \sqrt{n}\, l}{2(1 - \beta\lambda n \sqrt{n}\, \rho)}.$$

那末方程組(38)在球(40)中有一意解，而这解可借牛頓程序求出。

例 3. 考察非綫性积分方程

$$x(s)=\int_0^1 K(s,t,x(t))dt. \tag{41}$$

我們把上式右边的积分看成是作用于 $C[0, 1]=C$ 中的算子，表示成 Kx。設 $K(s,t,u)$ 是它的主目元的連續函数，并且有依 u 的第二阶連續导函数。注意，如果把(41)看成 $Px=0$, 那末 $P=I-K$。于是

$$P'(x_0)=I-K'(x_0),\quad K'(x_0)x=\int_0^1 K'_u(s,t,x_0(t))x(t)dt.$$

于是，从初始近似 $x_0(t)$ 出發，下一近似 x_1 由下式定出:

$$x_1(s)-x_0(s)-\int_0^1 K'_u(s,t,x_0(t))(x_1(t)-x_0(t))dt=$$

$$=\int_0^1 K(s,t,x_0(t))dt-x_0(s).$$

由定理 3 可以推出下列結果:

設对于核 $K'_u(s,t,x_0(t))\equiv k(s,t)$, 有豫解式 $G(s,t)$, 卽滿足

$$G(s,t)=k(s,t)+\int_0^1 k(s,\tau)G(\tau,t)d\tau,$$

$$G(s,t)=k(s,t)+\int_0^1 G(s,\tau)k(\tau,t)d\tau$$

的函数，且

$$\int_0^1 |G(s,t)|dt\leqslant\beta'\quad(0\leqslant s\leqslant 1);$$

又設在球 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-x_0(t)|\leqslant\rho$ 中的 $x(t)\in C$,

$$|K''_{uu}(s,t,u)|\leqslant M,$$

$$|x_0(s)-\int_0^1 K(s,t,x_0(t))dt|\leqslant l,\quad (1+\beta')^2Ml+2(1+\beta')M\rho<2,$$

这里 $$\rho=(1+\beta')l\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{2^k-1}\right\},\quad \alpha=\frac{(1+\beta')^2M\rho}{2-2(1+\beta')M\rho}.$$

那末方程(41)在球

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-x_0(t)|\leqslant\rho$$

中有一意的連續解，并且这解可以借牛頓程序求出，斂速如定理 3 所示。

証明时只須注意

$$P'(x_0)^{-1}x\equiv x(s)-\int_0^1 G(s,t)x(t)dt,$$

所以 $$\|P'(x_0)^{-1}\|\leqslant 1+\max_s\int_0^1|G(s,t)|dt\leqslant 1+\beta'.$$

很自然地想到，如果把牛頓程序中的切綫換成高阶相切的高次曲綫，可以得出精确度更高的近似法来。如果取二阶相切二次曲綫——双曲綫，就得出所謂切双曲綫程序。实际上，考察平常的一个实变量的超越方程

$$f(x)=0 \tag{42}$$

如果双曲綫 $$y=\frac{x+\alpha}{\beta x+\gamma} \tag{43}$$

在 $(x_0,f(x_0))$ 点处与 $y=f(x)$ 二阶相切，那末

$$\frac{x_0+\alpha}{\beta x_0+\gamma}=f(x_0),\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=\frac{\gamma-\beta\alpha}{(\beta x_0+\gamma)^2}=f'(x_0),$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0}=\frac{-2(\gamma-\beta\alpha)\beta}{(\beta x_0+\gamma)^3}=f''(x_0).$$

解出 α,β,γ 来，就得近似解 $x_1=-\alpha$，即用双曲綫(43)与横軸的交点代

替(42)的解:卽

$$x_1=x_0-\frac{2f(x_0)f'(x_0)}{2f'(x_0)^2-f(x_0)f''(x_0)}.$$

利用高阶 Fréchet 导算子 $P''(x)$,这一切双曲綫程序也可以移植到一般 Banach 空間中的方程(29)上来。这一移植最早由 M. A. Мертвецова 提出,但这里的处理仍是归化成叠代程序,从而簡化了 Мертвецова 的原証但仍保持了那样高的斂速。同样的方法也可以用来处理更高的程序,但由于公式太繁,沒有多大实用意义,这里不去介紹。

与此相近,但不是导源于同一想法的,乃是 Чебышев 程序,这是解平常代数方程与超越方程的一个很有效,收斂很快的方法。这一方法的基本想法乃是幂級数的逆轉。事实上,設 P 仍是由 Banach 空間 X 到 Banach 空間 Y 中的算子。設 $P(x^*)=0$, P 在 x^* 的某鄰域 $\|x-x^*\|\leqslant\eta$ 中,P 有一切阶 Fréchet 导函数,P',P'' 在这鄰域中連續,且按范数有界。又設 $\Gamma(x^*)=[P'(x^*)]^{-1}$ 存在,从而由 $P'(x)$ 的連續性可知 $\Gamma(x)$ 在鄰域 $\|x-x^*\|\leqslant\xi$ 中存在且 $\|\Gamma(x)\|\leqslant\beta$。設在 $\|x-x^*\|\leqslant\xi$ 中 $\|P(x)\|<<\tau_0$, 并考察逆算子 $x=Q(y)$ 的展开式

$$x^*=Q(0)=Q(y-y)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!}Q^{(i)}(y)y^i=$$

$$=x-Q'(y)P(x)+\frac{Q''(y)(P(x))^2}{2!}-\frac{Q'''(y)(P(x))^3}{3!}+\cdots.$$

用 $P^{(j)}(x)$ 表示 $Q^{(k)}(y)$, 可以得出

$$x^*=x-\Gamma(x)P(x)-\frac{1}{2}\Gamma(x)P''(x)[\Gamma(x)P(x)]^2-$$

$$-\frac{1}{2}\Gamma(x)P''(x)[\Gamma(x)P(x)]^2+\frac{1}{6}\Gamma(x)P'''(x)[\Gamma(x)P(x)]^3+\cdots.$$

取前兩項作为近似,就得出

$$x_1=x_0-\Gamma(x_0)P(x_0)=x_0-P'(x_0)^{-1}P(x_0),$$

卽牛頓程序,而取前三項,就得出所謂 Чебышев 程序

$$x_1=x_0-\Gamma(x_0)P(x_0)-\frac{1}{2}\Gamma(x_0)P''(x_0)[\Gamma(x_0)P(x_0)]^2,$$

而由于取的項較多，可以設想这程序的近似比牛頓程序还要好。这程序移植到 Banach 空間上来，是由 М. И. Нечепуренко(1954) 提出的，这里仍按叠代法的一般想法簡單地証明这程序的收斂。

定理 5. (Чебышев 程序的收斂)：設 $P'''(x)$ 在 x_0 的某鄰域 G 中存在。又設

1°. $P'(x_0)^{-1}$ 存在，$\|P'(x_0)^{-1}\|\leqslant\beta$, $\|P(x_0)\|\leqslant l$;

2°. 在 G 中的一个球 $\|x-x_0\|\leqslant\rho$ 里，
$\|P'''(x)\|\leqslant N$, $\|P''(x)\|\leqslant M$, $\|P'(x)\|\leqslant D$, $\|P(x)\|\leqslant E$;

3°. $\beta M\rho<1$, $\dfrac{\beta M}{2(1-\beta M\rho)^2}(2\rho+\beta E)<1$, $\sqrt{\alpha}h<1$.

这里
$$\rho=h\left[\sum_{k=0}^{\infty}(\sqrt{\alpha}h)^{3^k-1}\right],\quad h=\left(1+\frac{1}{2}\beta^2Ml\right)\beta l,$$

$$\alpha=\frac{\beta DLJ}{12(1-\beta M\rho)^3}[2(1-\beta M\rho)^2+\beta^2ME],$$

$$L=\frac{2(1-\beta M\rho)^2}{2(1-\beta M\rho)^2-\beta M(2\rho+\beta E)},$$

$$J=\frac{\beta}{2(1-\beta M\rho)^3}(2N+2\beta M^2+\beta^2M^2D+\beta^2MNE+$$
$$+2\beta^2M^2N\rho^2+\beta^2M^3\rho-2\beta MN\rho).$$

那末，方程(29)在球 $\|x-x_0\|\leqslant\rho$ 中有一意解 x^*，并且 Чебышев 程序

$$x_{n+1}=x_n-\left[I+\frac{1}{2}\Gamma_nP''(x_n)\Gamma_nP(x_n)\right]\Gamma_nP(x_n)\quad(n=0,1,2,\cdots)\tag{44}$$

收斂于 x^* (这里 $\Gamma_n=P'(x_n)^{-1}$)。斂速估值为

$$\|x_n-x^*\|\leqslant\rho\quad(\sqrt{\alpha}h)^{3^n-1}\tag{45}$$

証： 首先，仿定理 3 的証，可知 $P'(x)^{-1}$ 在球 $\|x-x_0\|\leqslant\rho$ 中存在并且

$$\|P'(x)^{-1}\|\leqslant\frac{\beta}{1-\beta M\rho},\quad(\|x-x_0\|\leqslant\rho).$$

由(44)($n=0$)可知

$$\|x_1-x_0\|\leqslant\left(1+\frac{1}{2}\beta^2 Ml\right)\beta l=h<\rho.$$

一般設已知 $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1$ 在球 $\|x-x_0\|\leqslant\rho$ 中。对于 $1\leqslant m\leqslant n$, 令

$$F_m(x)=\Big[I+\frac{1}{2}\Gamma_m P''(x_m)\Gamma_m P(x_m)-\frac{1}{2}\Gamma_m P''(x_m)(x-x_m)-$$
$$-\frac{1}{4}\Gamma_m P''(x_m)\Gamma_m P''(x_m)(x-x_m)^2\Big]\Gamma_m P(x);$$

那末

$$F'_m(x)=\Big[I+\frac{1}{2}\Gamma_m P''(x_m)\Gamma_m P(x_m)-\frac{1}{2}\Gamma_m P''(x_m)(x-x_m)-$$
$$-\frac{1}{4}\Gamma_m P''(x_m)\Gamma_m P''(x_m)(x-x_m)^2\Big]\Gamma_m P'(x)-$$
$$-\frac{1}{2}[\Gamma_m P''(x_m)+\Gamma_m P''(x_m)\Gamma_m P''(x_m)(x-x_m)]\Gamma_m P(x),$$

$$F''_m(x)=\Big[I+\frac{1}{2}\Gamma_m P''(x_m)\Gamma_m P(x_m)-\frac{1}{2}\Gamma_m P''(x_m)(x-x_m)-$$
$$-\frac{1}{4}\Gamma_m P''(x_m)\Gamma_m P''(x_m)(x-x_m)^2\Big]\Gamma_m P''(x)-$$
$$-[\Gamma_m P''(x_m)+\Gamma_m P''(x_m)\Gamma_m P''(x_m)(x-x_m)]\Gamma_m P'(x)-$$
$$-\frac{1}{2}\Gamma_m P''(x_m)\Gamma_m P''(x_m)\Gamma_m P(x),$$

$$F'''_m(x)=\Big[I+\frac{1}{2}\Gamma_m P''(x_m)\Gamma_m P(x_m)-\frac{1}{2}\Gamma_m P''(x_m)(x-x_m)-$$
$$-\frac{1}{4}\Gamma_m P''(x_m)\Gamma_m P''(x_m)(x-x_m)^2\Big]\Gamma_m P'''(x)-$$
$$-\frac{3}{2}[\Gamma_m P''(x_m)+\Gamma_m P''(x_m)\Gamma_m P''(x_m)(x-x_m)]\Gamma_m P''(x)-$$
$$-\frac{3}{2}\Gamma_m P''(x_m)\Gamma_m P''(x_m)\Gamma_m P'(x),$$

所以对于 $1\leqslant m\leqslant n$,

$$F'_m(x_m)=I,\quad F''_m(x_m)=0,$$

并且

$$\|F_m'''(x)\|\leqslant\left[1+\frac{\beta^2ME}{2(1-\beta M\rho)^2}+\frac{\beta M\rho}{(1-\beta M\rho)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\beta^2M^2\rho^2}{(1-\beta M\rho)^2}\right]\frac{\beta N}{1-\beta M\rho}+\frac{3}{2}\left[\frac{\beta M}{1-\beta M\rho}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\beta^2M^2\rho}{(1-\beta M\rho)^2}\right]\frac{\beta M}{1-\beta M\rho}+\frac{3}{2}\,\frac{\beta^3M^2D}{(1-\beta M\rho)^3}\equiv J,$$

$$(\|x-x_0\|\leqslant\rho).$$

又由(44)得
$$x_n-x_{n-1}=-F_{n-1}(x_{n-1}),$$
所以

$$\|F_{n-1}(x_n)\|=\|F_{n-1}(x_n)-F_{n-1}(x_{n-1})-F'_{n-1}(x_{n-1})(x-x_{n-1})-$$

$$-\frac{1}{2}F''_{n-1}(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})^2\|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{6}\sup_{\|\xi_n-x_0\|\leqslant\rho}\|F'''_{n-1}(\xi_n)\|\,\|x_n-x_{n-1}\|^3\leqslant\frac{1}{6}J\|x_n-x_{n-1}\|^3;$$

但
$$F_{n-1}(x_n)=Q_n\Gamma_{n-1}P(x_n),$$

这里
$$Q_n=I-\frac{1}{2}\left[\Gamma_{n-1}P''(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\Gamma_{n-1}P''(x_{n-1})\Gamma_{n-1}P''(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})^2-$$

$$\left.-\Gamma_{n-1}P''(x_{n-1})\Gamma_{n-1}P(x_{n-1})\right],$$

因为

$$\frac{1}{2}\|\Gamma_{n-1}P''(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})+$$

$$+\frac{1}{2}\Gamma_{n-1}P''(x_{n-1})\Gamma_{n-1}P''(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})^2-$$

$$-\Gamma_{n-1}P''(x_{n-1})\Gamma_{n-1}P(x_{n-1})\|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{2\beta M\rho}{1-\beta M\rho}+\frac{2\beta^2M^2\rho^2}{(1-\beta M\rho)^2}+\frac{\beta^2ME}{(1-\beta M\rho)^2}\right]=$$

$$=\frac{\beta M}{2(1-\beta M\rho)^2}(2\rho+\beta E)\equiv K<1,$$

所以 Q_n^{-1} 存在并且

$$\|Q_n^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-K} = L.$$

由此

$$\|P(x_n)\| \leqslant \|P'(x_{n-1})\| \, \|Q_n^{-1}\| \, \|F_{n-1}(x_n)\| \leqslant \frac{1}{6} DLJ \|x_n - x_{n-1}\|^3. \tag{46}$$

于是由(44),

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \left\|I + \frac{1}{2}\Gamma_n P''(x_n)\Gamma_n P(x_n)\right\| \|\Gamma_n\| \|P(x_n)\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{6}\left[1 + \frac{\beta^2 ME}{2(1-\beta M\rho)^2}\right] \frac{\beta DLJ}{1-\beta M\rho} \|x_n - x_{n-1}\|^3 =$$

$$= \alpha \|x_n - x_{n-1}\|^3 \leqslant \alpha^{1+3+\cdots+3^{n-1}} \|x_1 - x_0\|^{3^n} < \alpha^{\frac{3^n-1}{2}} h^{3^n} = h(\sqrt{\alpha}\, h)^{3^n-1}.$$

从而

$$\|x_{n-1} - x_0\| < h\left[\sum_{k=n}^{n} (\sqrt{\alpha}\, h)^{3^k-1}\right] < \rho,$$

即 x_{n-1} 也在球 $\|x - x_0\| \leqslant \rho$ 中。依数学归納法得知一切 x_n 都在这球中,且

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant h\left[\sum_{k=n}^{n+p-1} (\sqrt{\alpha}\, h)^{3^k-1}\right] < \rho(\sqrt{\alpha}\, h)^{3^n-1}. \tag{47}$$

既然設 $0 < \sqrt{\alpha}\, h < 1$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$ 存在,而在(47)中令 $P \to \infty$, 就得估値(45)。由(46)得 $P(x^*) = 0$, 解的一意性仿定理 1 就可証明。

定理 [illegible].(切双曲綫程序之收斂): 設 $P'''(x)$ 在 x_0 的某鄰域 G 中存在,且設

1°. $P'(x_0)^{-1}$ 存在,$\|P'(x_0)^{-1}\| \leqslant \beta$, $\|P(x_0)\| \leqslant l$;

2°. 在 G 中的一个球 $\|x - x_0\| \leqslant \rho$ 里,

$$\|P'''(x)\| \leqslant N,\ \|P''(x)\| \leqslant M,\ \|P'(x)\| \leqslant D,\ \|P(x)\| \leqslant E;$$

3°. $\beta M\rho < \frac{1}{2}\ \frac{\beta^2 ME}{2(1-\beta M\rho)^2} < 1$, $\sqrt{\alpha}\, h < 1$,

这里 $\rho=h\left[\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{3^k-1}\right], h=\dfrac{2\beta l}{2-\beta^2Ml}, \alpha=\dfrac{CBDLJ}{6(1-\beta M\rho)}$,

$$C=\frac{2(1-\beta M\rho)^2}{2(1-\beta M\rho)^2-\beta^2ME},\quad L=\frac{1-\beta M\rho}{1-2\beta M\rho},$$

$$J=\frac{\beta}{2(1-\beta M\rho)^2}(2N+3\beta M^2).$$

那末方程 (29) 在球 $\|x-x_0\|\leqslant\rho$ 中有一意的解 x^*, 并且切双曲綫程序

$$x_{n+1}=x_n-\left[I-\frac{1}{2}\Gamma_nP''(x_n)\Gamma_nP(x_n)\right]^{-1}\Gamma_nP(x_n)(n=0,1,2,\cdots). \quad (48)$$

收斂于 x^*, 斂速估值是

$$\|x_n-x^*\|\leqslant\rho(\sqrt{\alpha}h)^{3^n-1}.$$

証: 仿定理 1 得到 $P'(x)^{-1}$ 存在并且在 $\|x-x_0\|\leqslant\rho$ 中

$$\|P'(x)^{-1}\|\leqslant\frac{\beta}{1-\beta M\rho}.$$

对于 $1\leqslant m\leqslant n$, 令

$$R_m=I-\frac{1}{2}\Gamma_mP''(x_m)\Gamma_mP(x_m),$$

由于 $\dfrac{1}{2}\|\Gamma_0P''(x_0)\Gamma_0P(x_0)\|\leqslant\dfrac{1}{2}\beta^2Ml\equiv\tau<(1-\beta M\rho)^2<1,$

所以 R_0^{-1} 存在,并且

$$\|R_0^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-\tau}=\frac{2}{2-\beta Ml},$$

从而 $\|x_1-x_0\|\leqslant\|R_0^{-1}\|\|\Gamma_0\|\|P(x_0)\|\leqslant\dfrac{2\beta l}{2-\beta^2Ml}=h<\rho.$

一般設已知 $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1$ 在球 $\|x-x_0\|\leqslant\rho$ 中。对于$1\leqslant m\leqslant n$, 令

$$F_m(x)=\left[I-\frac{1}{2}\Gamma_mP''(x_m)(x-x_m)\right]\Gamma_mP(x).$$

于是
$$F_m'(x)=\left[I-\frac{1}{2}\Gamma_mP''(x_m)(x-x_m)\right]\Gamma_mP'(x)-$$
$$-\frac{1}{2}\Gamma_mP''(x_n)\Gamma_mP(x),$$

$$F''_m(x)=\left[I-\frac{1}{2}\Gamma_m P''(x_m)(x-x_m)\right]\Gamma_m P''(x)-$$

$$-\Gamma_m P''(x_m)\Gamma_m P'(x),$$

$$F'''_m(x)=\left[I-\frac{1}{2}\Gamma_m P''(x_m)(x-x_m)\right]\Gamma_m P'''(x)-$$

$$-\frac{3}{2}\Gamma_m P''(x_m)\Gamma_m P''(x_m).$$

对于 $1\leqslant m\leqslant n$,

$$F'_m(x_m)=I-\frac{1}{2}\Gamma_m P''(x_m)\Gamma_m P(x_m),\quad F''_m(x_m)=0,$$

而且

$$\|F'''_m(x)\|\leqslant\left(1+\frac{\beta M\rho}{1-\beta M\rho}\right)\frac{\beta N}{1-\beta M\rho}+$$

$$+\frac{3\beta^2M^2}{2(1-\beta M\rho)^2}\equiv J\quad(\|x-x_0\|\leqslant\rho).$$

又由(48)可知

$$F'_{n-1}(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})=-F_{n-1}(x_{n-1}),$$

所以

$$\|F_{n-1}(x_n)\|=\|F_{n-1}(x_n)-F_{n-1}(x_{n-1})-F'_{n-1}(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})-$$

$$F''_{n-1}(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})^2\|\leqslant\frac{1}{6}J\|x_n-x_{n-1}\|^3,$$

但

$$F_{n-1}(x_n)=Q_n\Gamma_{n-1}P(x_n),$$

这里

$$Q_n=I-\frac{1}{2}\Gamma_{n-1}P''(x_{n-1})(x_n-x_{n-1}),$$

因为

$$\frac{1}{2}\|\Gamma_{n-1}P''(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})\|\leqslant\frac{\beta M\rho}{1-\beta M\rho}\equiv K<1,$$

从而 Q_n^{-1} 存在,并且

$$\|Q_n^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-K}\equiv L.$$

于是

$$\|P(x_n)\|\leqslant\|P'(x_{n-1})\|\,\|Q_n^{-1}\|\,\|F_{n-1}(x_n)\|\leqslant\frac{1}{6}DLJ\|x_n-x_{n-1}\|^3.$$

因为

$$\frac{1}{2}\|\Gamma_n P''(x_n)\Gamma_n P(x_n)\|\leqslant\frac{\beta^2 ME}{2(1-\beta M\rho)^2}\equiv B<1,$$

所以 R_n^{-1} 存在,并且

$$\|R_n^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-B} = C.$$

从而

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant \|R_n^{-1}\| \|\Gamma_n\| \|P(x_n)\| \leqslant \frac{CBDLJ}{6(1-\beta M\rho)} \|x_n - x_{n-1}\|^3 =$$

$$= \alpha \|x_n - x_{n-1}\|^3 \leqslant h(\sqrt{\alpha} h)^{3^n - 1}.$$

于是得
$$\|x_{n+1} - x_0\| \leqslant h\left[\sum_{k=0}^{n} (\sqrt{\alpha} h)^{3^k - 1}\right] < \rho,$$

即 x_{n+1} 也在球 $\|x - x_0\| \leqslant \rho$ 中。

仿前定理之証，就可以完成本定理的証明。

例：考察非綫性积分方程

$$x(s) = \int_0^1 K(s, t, x(t))\, dt, \tag{49}$$

这里 $K(s, t, u)$ 設是其主目元的連續函数，且設它在区域 D 中按 u 有三阶連續偏导函数。把这方程写成 $(I-K)x = 0$, K 是(49)中右边的积分算子，那末令 $P = I - K$,

$$P'(x) = I - K'(x), \quad P''(x) = -K''(x), \quad P'''(x) = -K'''(x),$$

这里
$$K'(x)h = \int_0^1 K'_u(s, t, x(t)) h(t) dt,$$

$$K''(x)hh_1 = \int_0^1 K''_{uu}(s, t, x(t)) h(t) h_1(t)\, dt.$$

設 $K'_u(s, t, x_0(t))$ 有豫解核 $G(s, t)$; 不难看出，如果 G 表示与核 $G(s, t)$ 相应的綫性积分算子，$I - G$ 就是 $I - K'$ 的逆算子。切双曲綫程序 (48) 这时可以写成

$$\left[I - K'(x_n) + \frac{1}{2} K''(x_n)[I - K'(x_n)]^{-1}(I-K)x_n\right](x_{n+1} - x_n) +$$
$$+ (I - K)x_n = 0.$$

今把 $P=I-K$ 看成是由 $C[0,1]=C$ 到 C 中的算子，由定理 6 可以推出下列結果：如果設

1°. 对于初始近似 $x_0(s)$，核 $K'_u(s,t,x_0(t))$ 有豫解核 $G(s,t)$，使

$$\int_0^1 |G(s,t)|dt \leqslant \beta' \quad (0\leqslant s\leqslant 1),$$

并且

$$\left|x_0(s)-\int_0^1 K(s,t,x_0(t))dt\right|\leqslant l;$$

2°. 在 $|u-u_0|\leqslant\rho$ 中

$$|K'''_{uuu}(s,t,u)|\leqslant N,\quad |K''_{uu}(s,t,u)|\leqslant M,\quad |K'_u(s,t,u)|\leqslant D,$$
$$|K(s,t,u)|\leqslant E;$$

又設定理 6 中的条件 3° 成立，不过設那里的 $\beta=1+\beta'$。那末，方程(49)在球

$$\max_{0\leqslant s\leqslant 1}|x(s)-x_0(s)|\leqslant\rho$$

中有一意的連續解 $x^*(s)$，并且程序(48)在 $[0,1]$ 上一致收斂于 $x^*(s)$。斂速由定理 6 給出。

(三)最速下降法 数学物理中很多問題可以化成求某适当选擇的泛函数 $f(x)$ 的極端值問題。而为此，可以用逐步逼近的方法求这極端值。事实上，設想 $y=f(x)$ 是一个曲面，这里 $f(x)$ 是定义在一个 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 中的泛函数（如果 $\mathfrak{H}$ 是二維的，那末这就是一个平常的曲面）。对于不同的实数 a，$f(x)=a$ 表示一种"等高綫"。为了求 $f(x)$ 的極小值，可以从曲面 $y=f(x)$ 上某点（相应于 $x=x_0$）出發，取一方向 z，使 $f(x)$ 的値沿 z 的方向減小得最快，由于 $y=f(x)$ 一般不是平的，沿"直綫"方向 z 不一定能下降到 $f(x)$ 的極小値（相应的 x 点表示成 x^*，即所求的問題的准确解），而且所謂"減小得最快"即"降得最速"，只是在 x_0 附近才是眞的。因此，一般沿 z 下降要适可而止，即要适当选擇 ε_0，使降到 $x_0+\varepsilon_0 z$ 为止。于是再从 $x_1=x_0+\varepsilon_0 z$ 出發，重演上述的步驟，在适

当条件下这一程序逐步下降到的点 x_n 随 $n\to\infty$ 而趋于所求的解 x^*。这个方法叫做最速下降法，首先由 A. Cauchy 用来解 n 个未知数的 n 个方程的組：

$$f_i(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)=0 \quad (1\leqslant i\leqslant n) \tag{50}$$

但未給出証明。这一想法也可以用于一般的函数空間，这是由 J. Hadamard 指出的。H. B. Curry 曾就(50)的情形証明最速下降程序的收斂。对于綫性的方程，G. Temple 与 Л. В. Канторович 就 Hilbert 空間的情形，証明了程序的收斂。我們曾在 Hilbert 空間中考察非綫性的情形，其后裴鹿成得出更簡的証明，并改进了取 ε 的范圍。

我們首先根据上述的最速下降法的想法导出近似程序的公式来，然后考虑收斂的問題。

設 $\mathfrak{H}$ 表示 Hilbert 空間，$F(x)$是作用在 $\mathfrak{H}$ 中的算子。設它在 $\mathfrak{H}$ 中某区域 G 上有連續导算子 $F'(x)$，而設对于每个 $x\in G$，$F'(x)$ 是正定对称有界綫性算子，即設存在正数 $M>m>0$，使

$$0\leqslant m\|y\|^2\leqslant(F'(x)y, y)\leqslant M\|y\|^2, \ y\in\mathfrak{H}.$$

又設 $F(x)$ 是場位型的，即存在定义在 $\mathfrak{H}$ 上的泛函数 $f(x)$，使

$$\operatorname{grad} f(x)=F(x).$$

由于按 grad 的定义

$$(F(x), h)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(x+\lambda h)-f(x)}{\lambda},$$

从而 $f(x)$ 的值下降得最快的方向乃是 $h=F(x)$，这由上式及 Schwarz-Буняковский 不等式可以看出。但$f(x)$的極小值的所在处正是$F(x)=0$ 的根(§ 9)，从而最速下降程序应当是

$$x_{n+1}=x_n-\lambda_n F(x_n)$$

而剩下的乃是如何选擇 λ_n 的問題。

定理 7. 設 $P(x)$ 是作用在实 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 中的算子，設 $P'(x)$ 存在且連續，并且是正定对称有界綫性算子，即存在正数 $M>m>0$，使

$$m\|y\|^2 \leqslant (P'(x)y, y) \leqslant M\|y\|^2,\ y \in \mathfrak{H}.$$

那末，方程(29)有一意解，并且如取实数 ε_n 滿足

$$\frac{1-\alpha}{m} \leqslant \varepsilon_n \leqslant \frac{1+\alpha}{M} \quad 0<\alpha<1, \tag{51}$$

最速下降程序

$$x_{n+1} = x_n - \varepsilon_n P(x_n) \quad (n=0, 1, 2, \cdots) \tag{52}$$

必收斂于 x^*，斂速不慢于以 α 为公比的等比級数。

証：对于一个滿足(52)的 ε_n，

$$\|(I-\varepsilon_n P)x_1 - (I-\varepsilon_n P)x_2\| \leqslant \sup_{\bar{x}} \|I - \varepsilon_n P'(\bar{x})\| \|x_1 - x_2\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{m \leqslant \lambda \leqslant M} |1-\varepsilon_n \lambda| \|x_1 - x_2\| \leqslant \alpha \|x_1 - x_2\| \quad (x_1, x_2 \in \mathfrak{H}).$$

于是由定理 1，(29) 有一意解 x^*，而由(52)得

$$\|x_{n+1} - x^*\| = \|x_n - \varepsilon_n P(x_n) - (x^* - \varepsilon_n P(x^*))\| \leqslant \alpha \|x_n - x^*\|,$$

从而由数学归納法，

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \alpha^n \|x_0 - x^*\|.$$

証完。

注：这里值得提一下最速下降法与牛頓程序的关系。取 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 中一个正定有界对称綫性算子 B，幷引入新內积

$$[x, y] \equiv (Bx, y) = (x, By)$$

以及新范数

$$\|x\|_B = \sqrt{(Bx, x)}.$$

显然这一范数是与原来范数拓扑等价的。如果算子 $P(x)$ 是泛函数 $f(x)$ 按原来尺度的斜量：$P(x) = \operatorname{grad} f(x)$，令 $P_B(x)$ 表示 $f(x)$ 按新尺度的斜量，那末

$$[P_B(x), h] = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda} = (P(x), h) = [B^{-1}P(x), h],$$

而因上式对一切 $h \in \mathfrak{H}$ 成立，可知

$$P_B(x) = B^{-1}P(x).$$

于是按这一新尺度，最速下降程序可以写成

$$x_{n+1}=x_n-\varepsilon_n B^{-1}P(x_n). \tag{53}$$

如設 $P'(x)$ 在所考慮的某区域 G 中是正定对称綫性有界算子，那末，当在每一步驟改变尺度，卽在第 n 步驟取 B 为 $P'(x_n)$ 时，(53)变成

$$x_{n+1}=x_n-\varepsilon_n P'(x_n)^{-1}P(x_n),$$

这与牛頓程序只差一常数 ε_n。如果在每一步驟取定 $B=P'(x_0)$，(53)变成

$$x_{n+1}=x_n-\varepsilon_n P'(x_0)^{-1}P(x_n),$$

这与簡化的牛頓程序只差一常数 ε_n。

以上只是說明牛頓程序可以由最速下降法的想法导出。但在牛頓程序中我們得到更好的斂速，而在最速下降法的情形，我們只得出不慢于等比級数的斂速。

如果 $P(x)=0$ 是綫性方程

$$Ax=b, \tag{54}$$

这里 b 是 $\mathfrak{H}$ 中已知元，A 是正定对称綫性有界算子，令

$$f(x)=(Ax,x)-2(x,b).$$

那末，由于 A 的对称性

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(x+\lambda h)-f(x)}{\lambda}=$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\frac{(A(x+\lambda h),x+\lambda h)-2(x+\lambda h,b)-(Ax,x)+2(x,b)}{\lambda}=$$

$$=2(Ax,h)-2(b,h)=2(Ax-b,h),$$

从而

$$\operatorname{grad} f(x)=2(Ax-b).$$

这时，最速下降法的想法适用，因为 $P'(x)=A$ 是正定的。最速下降程序可以写成

$$x_{n+1}=x_n-\lambda_n(Ax_n-b).$$

$Ax_n-b\equiv z_n$ 叫做第 n 次逼近的殘量，λ_n 可以从种种不同想法去选取。

Канторович 原来的想法是取 λ_0，使 $f(x_0+\lambda z_0)$ 沿 z_0 方向当 $\lambda=\lambda_0$ 时降到最小；这时必須取 λ_0，使

$$\frac{d}{d\lambda}f(x_0+\lambda z_0)\Big|_{\lambda=\lambda_0}=0.$$

注意 $f(x)=(Ax,x)-2(x,b)$，不难得出

$$\lambda_0=-\frac{(z_0,z_0)}{(Az_0,z_0)},$$

从而一般的最速下降公式变成

$$x_{n+1}=x_n-\frac{(z_n,z_n)}{(Az_n,z_n)}z_n.$$

还可以考虑选擇 λ_n，使殘量 z_{n+1} 減到最小，即使 $\|z_{n+1}\|$ 極小，不难得出

$$\lambda_n=\frac{(z_n,Az_n)}{(Az_n,Az_n)},$$

这样的最速下降程序見于吉田耕作的書中，称作弛緩法。

如果用尺度 $[x,y]=(A^{-1}x,y)$，可以得出最速下降程序

$$x_{n+1}=x_n-\lambda_nAz_n,$$

而如按要求 $\|x_{n+1}-x^*\|$ 为極小来取 λ_n，得赵訪熊公式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{(z_n,z_n)}{(Az_n,Az_n)}Az_n,$$

而如取 λ_n 使 $\|x_{n+1}-x_n+z_n\|$ 为極小，就得出 Красносельский-Крейн 公式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{(Az_n,z_n)}{(Az_n,Az_n)}Az_n,$$

Канторович 对他的最速下降程序得出如下的斂速来:

$$\|x_n-x^*\|\leqslant\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n,$$

这里

$$\lambda=f(x_0)-f(x^*),\quad f(x)\equiv(Ax,x)-2(b,x).$$

М. Ш. Бирман[14] 考虑了更一般的"广义最速下降程序"，其中包含了 Канторович 的程序，并且他获得的斂速在这一特殊情形下也要更好，即不慢于以

$$\lambda=\frac{2}{\left[\frac{M+m}{M-m}-\sqrt{\left(\frac{M+m}{M-m}\right)^2-1}\right]^2+\left[\frac{M+m}{M-m}+\sqrt{\left(\frac{M+m}{M-m}\right)^2-1}\right]^2}$$

为公比的等差級数。

上述想法也可以用到并非定义在全空間而只定义在一个稠集上的無界綫性算子的情形上来，从而适用于微分方程的近似解法，这里也不詳述，請参看 Канторович 的長文。

例 1. 考察帶有对称核的 Fredholm 型第二种积分方程

$$P(x)\equiv x(s)-\lambda\int_a^b K(s,t)x(t)dt-b(s)=0,$$

設 λ 小于这方程的一切固有值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k, \cdots$。如果取 $\mathfrak{H}==L^2[a,b]$，則方程变成(54)型的綫性方程，其中 $A=I-\lambda K$，K 是由核 $K(s,t)$ 决定的綫性积分算子。这時令

$$\alpha=\max_k\frac{\lambda}{\lambda_k},\quad \beta=\min_k\frac{\lambda}{\lambda_k},$$

不難驗明 $\beta(x,x)\leqslant\lambda(Kx,x)\leqslant\alpha(x,x)\quad(x\in\mathfrak{H}),$

从而 $(1-\alpha)\|x\|^2\leqslant(Ax,x)\leqslant(1-\beta)\|x\|^2,$

既然依假定 $0<\alpha<1$，上述的一般結果适用，从而按 Канторович 的公式，第一近似是

$$x_1(s)=x_0(s)+\varepsilon_0 z_0(s),$$

这里 $$z_0(s)=Ax_0-b=x_0(s)-\lambda\int_0^b K(s,t)x_0(t)dt-b(s),$$

$$\varepsilon_0=-\frac{\int_0^b[P(x)]^2ds}{\int_0^b x^2(s)ds-\lambda\int_0^b\int_a^b K(s,t)x(s)x(t)ds\,dt},$$

这时斂速的估値式是

$$\sqrt{\int_a^b |x_n(s)-x^*(s)|^2 ds} \leqslant \sqrt{\frac{\gamma}{1-\alpha}} \left(\frac{\beta-\alpha}{2-(\alpha+\beta)}\right)^n,$$

这里 x^* 表示方程(55)的准确解，而

$$\gamma = f(x_0) - f(x^*),$$

$$f(x) = \int_a^b x^2(t)dt - \lambda \int_a^b \int_a^b K(s, t)x(s)x(t)ds\,dt - 2\int_a^b x(t)d(t)dt.$$

我們不难得出一致收斂来。即令 $y_n = x_n - P(x_n)$，則

$$|y_n(s) - x^*(s)| = |\lambda| \left| \int_a^b K(s, t)[x_n(t) - x^*(t)]dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| \left[\int_a^b K^2(s, t)dt\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b |x_n(t) - x^*(t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}.$$

注意在上述关于(54)的考慮中，假定 A 是对称并沒有必要。对于任意有界綫性算子 A, A^*A 是对称正的，因为

$$(A^*Ax, x) = (Ax, Ax) \geqslant 0,$$

考察泛函数

$$f_1(x) = (Ax - b, Ax - b) = (A^*Ax, x) - 2(x, A^*b) - (b, b) =$$

$$= f_{A^*A}(x) - (b, b),$$

这里 f_{A^*A} 是对算子 A^*A 作的前述的泛函数。由此可知 $f_1(x)$ 与 $f_{A^*A}(x)$ 在同一点处达到極小，从而这里的問題可以化成考察对称算子的方程 $A^*Ax - A^*b = 0$ 的情形。

又应注意，从一般的理論，只知道当 $\operatorname{grad} f(x) = P(x)$ 时，如果 $f(x)$ 在 $x = x^*$ 处达到極小值，那末 $P(x^*) = 0$。在綫性方程 (54) 的特殊情形，还可証明 $P(x^*) = 0$ 也是 $f(x)$ 在 $x = x^*$ 处达到極小值的充分条件；事实上，这时 $Ax^* = b$，从而

$$f(x)=(Ax,x)-2(Ax^*,x)=(A(x-x^*),x-x^*)-(Ax^*,x^*),$$

而由于 A 的正定性可知 $f(x)$ 在 $(A(x-x^*),x-x^*)=0$ 时为極小，即在 $x=x^*$ 处达到極小。

例 2. 考察 n 个变量的 n 个方程的組

$$f_k(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=0,\ (1\leqslant k\leqslant n).$$

这时，令

$$P(x)=(f_k(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n))_{1\leqslant k\leqslant n},\ x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n).$$

那末所謂 $P(x)$ 是場位型算子，是指存在一个 n 变量的数值函数 $\Phi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，使在所考察的 n 維空間区域 G 中，Φ 有連續偏导函数，并且

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i}=f_i(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),\ \ 1\leqslant i\leqslant n.$$

关于 $P'(x)$ 是正定对称綫性算子的假定，在这里乃是指二次齐式

$$\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_i\partial\xi_k}u_iu_k$$

是正定对称的。这时可以用最速下降程序解原来的方程組（参看 Crockett–Chernoff[17]）。

（四）用近似方程代替原方程的方法 在实用上解某一方程时，往往把它替換成一个較簡單的方程，而这后一方程的解可以取作前一方程的近似解。例如在解积分方程

$$x(s)-\int_a^b K(s,t)x(t)dt=b(s) \tag{55}$$

时，我們用某一机械求积公式把方程中的积分替換成一个有窮和

$$\int_a^b K(s,t)x(t)dt\doteq\sum_{k=1}^{n}A_kK(s,t_k)x(t_k),$$

并取$[a,b]$中 n 个点 $t_k(1\leqslant k\leqslant n)$处的值之間的等式代替方程(55)：

$$x(t_i)-\sum_{k=1}^{n}A_kK(t_i,t_k)x(t_k)=b(t_i)\quad(1\leqslant i\leqslant n).\quad(56)$$

这是一个 n 未知数的一次代数方程組 $x(t)$ 在諸点 t_i 处的值于是不难求出，而用插值法就可以求出 $x^*(t)$ 的一个近似，这里 x^* 表示(55)的准确解。現在要研究的問題在于(56)的可解性与(55)的可解性之間的关系，以及如果二者都可解，(56)的解取作(55)的近似解时誤差的估值。这个問題，在綫性方程的最一般形式最初由 Л. В. Канторович 在 1948 年提出，后来我們把这想法用到非綫性方程的情形上去。这里就 Канторович 的原来形式下介紹这一般理論①。

設 X, Y 是兩个 Banach 空間，$\bar{X}, \bar{Y}$ 是另外兩个 Banach 空間，而 X 有一个綫性子空間 X' 与 $\bar{X}$ 同構，这同構是由綫性算子 φ 实現的。同样，設 $\bar{y}=\psi_0 y$ 是由 Y 的綫性子空間 Y' 到 $\bar{Y}$ 上的同構，这里 ψ_0 是有界綫性算子。又設 ψ_0 可以延拓成由整个 Y 到 $\bar{Y}$ 上的綫性算子 ψ。

設 K 是由 X 到 Y 中的綫性算子，幷考察方程

$$Kx=y.\quad(57)$$

我們用 $\bar{Y}$ 中的方程

$$\bar{K}\bar{x}=\bar{y}\quad(58)$$

代替(57)，这里 $\bar{K}$ 是由 $\bar{X}$ 到 $\bar{Y}$ 中的綫性有界算子。要使(58)可以看成(57)的近似方程。我們必須明确“算子 $\bar{K}$ 是 K 的近似”这句話的涵义，而由于它們不是作用在同一空間的，我們必須把它們关联起来。为此我們假定下面条件成立：

条件 I. 对于每个 $x'\in X'$，

$$\|\bar{K}\varphi x'-\psi Kx'\|\leqslant\varepsilon\|x'\|.\quad(\mathrm{I})$$

我們还必須設 X 中每个元都能用子空間 X' 中的元任意逼近。这一要求可以陈述成下列条件：

① Канторович 的原来叙述与 Канторович 在綜合报告[22]中的叙述略有不同，这里的証明是我們补上的。

条件 II. 对于每个 $x\in X$, 存在 $x'\in X'$, 使

$$\|\psi Kx-\psi Kx'\|<\varepsilon_1\|Kx\|, \tag{II}$$

并且

$$\|x'\|\leqslant M\|Kx\|. \tag{59}$$

在这样条件下，如果 K 有逆，那末 $\overline{K}$ 也有逆(这里有逆都是指具有有界逆)。这一事实精确地陈述成定理 8:

定理 8. 如果在上述假設与条件 I, II 之下，逆算子 K^{-1} 存在，并且 K^{-1} 是綫性有界算子，而

$$q\equiv(\varepsilon M+\varepsilon_1)\|\psi_0^{-1}\|<1, \tag{60}$$

那末方程(58)对于任意 $\bar{y}\in\overline{Y}$ 有解 $\bar{x}$, 并且这时

$$\|\bar{x}\|\leqslant\frac{M\|\varphi\|\|\psi_0^{-1}\|}{1-q}\|\bar{y}\|.$$

証　对于任意 $\bar{y}\in\overline{Y}$, 令

$$y=\psi_0^{-1}\bar{y}.$$

注意 ψ_0 既是由 Y' 到 $\overline{Y}$ 上的同構，所以这里的 y 含在 Y' 中。既然假定 K^{-1} 存在，必存在一元 $x_0\in X$, 使 $Kx_0=y_0\equiv y$。依条件 II, 存在 $x_0'\in X'$, 使

$$\|\psi Kx_0-\psi Kx_0'\|<\varepsilon_1\|Kx_0\|,\ \|x_0'\|\leqslant M\|Kx_0\|.$$

于是

$$\begin{aligned}\|\overline{K}\varphi x_0'-\psi y_0\|&\leqslant\|\overline{K}\varphi x_0'-\psi Kx_0'\|+\|\psi Kx_0'-\psi Kx_0\|\leqslant\\&\leqslant\varepsilon\|x_0'\|+\varepsilon_1\|Kx_0\|\leqslant(M\varepsilon+\varepsilon_1)\|Kx_0\|=\\&=(M\varepsilon+\varepsilon_1)\|y_0\|=(M\varepsilon+\varepsilon_1)\|\psi_0^{-1}\bar{y}\|\leqslant q\|\bar{y}\|.\end{aligned}$$

既然已設 $q<1$, 由上面不等式可知 $\bar{x}_0\equiv\varphi x_0'$ 是方程(58)的一个比 Θ 更好的近似解。令 $\bar{y}_1=\bar{y}-\overline{K}\bar{x}_0$。令 $y_1=\psi^{-1}\bar{y}_1$, 而 $x_1=K^{-1}y_1$。依条件 II 取 x_1' 使

$$\|\psi Kx_1-\psi Kx_1'\|<\varepsilon_1\|Kx\|,\ \|x_1'\|\leqslant M\|Kx_1\|.$$

仿剛才証明的部分，可以証明

$$\|\overline{K}\varphi x_1'-\psi y_1\|\leqslant q\|\bar{y}_1\|.$$

再令 $\bar{y}_2=\bar{y}_1-\bar{K}\bar{x}_1$, 这里 $\bar{x}_1=\varphi x_1'$。类推。于是得兩串元$(\bar{y}_n)$, $(\bar{x}_n)$, 使

$$\|\bar{K}\bar{x}_n-\bar{y}_n\|\leqslant q\|\bar{y}_n\|,$$

即
$$\|\bar{y}_{n+1}\|\leqslant q\|\bar{y}_n\|. \tag{61}$$

于是

$$\bar{K}(\bar{x}_0+\bar{x}_1+\cdots+\bar{x}_n)=(\bar{y}-\bar{y}_1)+(\bar{y}_1-\bar{y}_2)+$$
$$+\cdots+(\bar{y}_n-\bar{y}_{n+1})=\bar{y}-\bar{y}_{n+1},$$

而既然由(61)按数学归納法得

$$\|\bar{y}_{n+1}\|\leqslant q^n\|\bar{y}_1\|,$$

从而依(60), $\bar{y}_{n+1}\to\Theta(n\to\infty)$, 于是得知

$$\bar{x}^*=\sum_{i=0}^{\infty}\bar{x}_i\in\bar{X}$$

乃是方程(58)的准确解，这时，

$$\|\bar{x}^*\|\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}\|\bar{x}_i\|\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}\|\varphi x_i'\|\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}\|\varphi\|M\|Kx_i\|=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\|\varphi\|M\|y_i\|=\|\varphi\|M\|\psi_0^{-1}\|\sum_{i=0}^{\infty}\|\bar{y}_i\|\leqslant\|\varphi\|M\|\psi_0^{-1}\|\frac{\|\bar{y}\|}{1-q},$$

証完。

前面已經講过，条件 II 在一定意义下意味着 X 中任意元可用 x' 中元任意逼近。有时这一条件用另外方式陈述。卽設已知方程(57)的准确解 x^* 可以用 X' 中的元逼近的程度：換句話說，設有正数 ε_2, 使存在 $x'\in X'$, 滿足

$$\|x^*-x'\|\leqslant\varepsilon_2\|x^*\|. \tag{62}$$

前面的定理是說明当知道(57)有解时，(58)也必有解。反之，要考察这样的問題，卽已知(58)可解，求用(58)的解逼近(57)的解的程度。

定理 9. 如果 $\bar{K}$ 具有有界逆 $\bar{K}^{-1}$, 并且(62)成立，那末在条件(I), (II)之下，方程(58)的解 $\bar{x}^*$ 滿足

$$\|x^*-\varphi^{-1}\bar{x}^*\|=\|x^*-\varphi^{-1}\bar{K}^{-1}\psi y\|\leqslant\{\varepsilon_2+$$
$$+[\varepsilon(1+\varepsilon_2)+\varepsilon_2\|\psi K\|]\|\varphi^{-1}\|\|\bar{K}^{-1}\|\}\|x^*\|, \quad (63)$$

这里在方程(58)中，$\bar{y}=\psi y$。

証 事实上，$x^*=\bar{K}^{-1}\bar{y}=\bar{K}^{-1}\psi y$，从而依(62)取 $x'\in X'$，那末

$$\|x^*-\varphi^{-1}\bar{x}^*\|=\|x^*-\varphi^{-1}\bar{K}^{-1}\psi y\|\leqslant\|x^*-x'\|+$$
$$+\|x'-\varphi^{-1}\bar{K}^{-1}\psi Kx'\|+\|\varphi^{-1}\bar{K}^{-1}\psi Kx'-$$
$$-\varphi^{-1}\bar{K}^{-1}\psi y\|\leqslant\varepsilon_2\|x^*\|+\|\varphi^{-1}\|\|\bar{K}^{-1}\|\|\bar{K}\varphi x'-$$
$$-\psi Kx'\|+\|\varphi^{-1}\|\|\bar{K}^{-1}\|\|\psi Kx^*-\psi Kx'\|\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon_2\|x^*\|+\|\varphi^{-1}\|\|\bar{K}^{-1}\|\varepsilon\|x'\|+$$
$$+\|\varphi^{-1}\|\|\bar{K}^{-1}\|\|\psi K\|\|x^*-x'\|\leqslant\varepsilon_2\|x^*\|+$$
$$+\|\varphi^{-1}\|\|\bar{K}^{-1}\|\varepsilon(1+\varepsilon_2)\|x^*\|+\|\varphi^{-1}\|\|\bar{K}^{-1}\|\|\psi K\|\varepsilon_2\|x^*\|=$$
$$=[\varepsilon_2+(\varepsilon(1+\varepsilon_2)+\varepsilon_2\|\psi K\|)\|\varphi^{-1}\|\|\bar{K}^{-1}\|]\|x^*\|,$$ 証完。

注 上定理給出了(58)的解被 φ^{-1} 映回空間 X 来作方程(57)的解的近似值时誤差的估值。

現在設有一串形如(58)的近似方程，表示成

$$\bar{K}_n\bar{x}=\bar{y}. \quad (64)$$

这时空間 $X'Y'$, $\bar{X}$, $\bar{Y}$ 都依賴于标数 n，从而 φ, ψ, ε, ε_1, ε_2, M 等也都依賴于 n。下面我們考察(64)解收斂($n\to\infty$)于(57)的解的問題。

定理 10. 設下列条件成立：

1) 逆算子 K^{-1} 存在(有界)；

2) 設 $\bar{K}_n$ 滿足条件(A)：即設由方程(64)对于任意 $\bar{y}$ 的可解性可知解的一意性；

3) $\lim\limits_{n\to\infty} M_n\|\varphi_n\|\|\psi_{0,n}^{-1}\|\|\varphi_n^{-1}\|[\varepsilon_n+\varepsilon_{2,n}(1+\|\psi_n\|)]=0$,

并且
$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_{1,n}\|\psi_{0,n}^{-1}\|=0. \quad (65)$$

那末近似解收斂于准确解，更确切地說，如 $\bar{x}_n^*$ 表示

$$\bar{K}_n\bar{x}=\bar{y}_n\equiv\psi_n y \tag{64'}$$

的解，那末

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n^{-1}\bar{x}_n^*-x^*\|=0. \tag{66}$$

証 依定理 9 的(63)，只須証

$$\varepsilon_{2,n}+[\varepsilon_n(1+\varepsilon_{2,n})+\varepsilon_{2,n}\|\psi_n K\|]\|\varphi_n^{-1}\|\|\bar{K}_n^{-1}\|\to 0\quad(n\to\infty). \tag{67}$$

但在条件(A)之下，由定理 8 可知方程(64)有一意逆，即 $\bar{K}_n^{-1}$ 存在，并且依定理 8，

$$\|\bar{K}_n^{-1}\|\leqslant\frac{M_n\|\varphi_n\|\|\psi_{0,n}^{-1}\|}{1-(\varepsilon_n M_n+\varepsilon_{1,n})\|\psi_{0,n}^{-1}\|}. \tag{68}$$

既然設 x^* 可用 X_n' 的元任意逼近，必然 $\varepsilon_{2,n}\to 0(n\to\infty)$。又由定理中的条件 3)可知

$$\lim_{n\to\infty}M_n\|\varphi_n\|\|\psi_{0,n}^{-1}\|\|\varphi_n^{-1}\|\varepsilon_n=0,$$

而由于

$$1=\|\varphi_n\varphi_n^{-1}\|\leqslant\|\varphi_n\|\|\varphi_n^{-1}\|$$

可知

$$\lim_{n\to\infty}M_n\|\psi_{0,n}^{-1}\|\varepsilon_n=0. \tag{69}$$

依(69)与(65)可知，当取 n 足够大时，可使

$$1-(\varepsilon_n M_n+\varepsilon_{1,n})\|\psi_{0,n}^{-1}\|>\frac{1}{2}. \tag{70}$$

于是依(67)(68)与(70)可知只須証明

$$[\varepsilon_n+\varepsilon_{2,n}(\varepsilon_n+\|\psi_n K\|)]\|\varphi_n^{-1}\|M_n\|\varphi_n\|\|\psi_{0,n}^{-1}\|\to 0\quad(n\to\infty).$$

但因 $\|K\|<+\infty$ 而 ε_n 可以任意小，可取 n 足够大，使

$$\varepsilon_n+\|\psi_n\|\|K\|<\|K\|+\|\psi_n\|\|K\|.$$

从而只須証

$$[\varepsilon_n+\varepsilon_{2,n}(1+\|\psi_n\|)\|K\|]\|\varphi_n^{-1}\|M_n\|\varphi_n\|\|\psi_{0,n}^{-1}\|\to 0\quad(n\to\infty).$$

但既然 $\|K\|<+\infty$，这由条件 3)得出，証完。

为了下面的叙述，我們把用 X' 中元逼近 X 中元的条件陈述成下面形式，然后用考察由 $\bar{K}$ 有逆推出 K 有逆的問題。

条件(III) 对于 $x\in X$，存在 $x'\in X'$，使

$$\|x-x'\|\leqslant\varepsilon_3\|x\|+N\|Kx\|.$$

定理 11. 在条件(I)(III)之下,如果 $\bar{K}$ 的逆算子存在且滿足条件

$$\rho=\varepsilon_3(1+\|\psi K\|\|\varphi^{-1}\|\|\bar{K}^{-1}\|)+2\varepsilon\|\varphi^{-1}\|\|\bar{K}^{-1}\|<1, \tag{71}$$

那末算子 K 也有左逆 K^{-1}, 并且

$$\|K^{-1}\|\leqslant\frac{\|\varphi^{-1}\bar{K}^{-1}\psi\|+N(1+\|\psi K\|\|\varphi^{-1}\|\|\bar{K}^{-1}\|)}{1-\rho}. \tag{72}$$

証 依条件 III, 如取

$$\varepsilon_2\leqslant\varepsilon_3+N\frac{\|Kx^*\|}{\|x^*\|}, \tag{73}$$

那末(62)成立。又既然在(62)中至少可以令 $x'=\Theta$, 所以 ε_2 可以取做 $\leqslant 1$。依定理 9,

$$\|x^*-\varphi^{-1}\bar{x}^*\|\leqslant[\varepsilon_2+(\varepsilon(1+\varepsilon_2)+\varepsilon_2\|\psi K\|)\|\varphi^{-1}\|\|\bar{K}^{-1}\|]\|x^*\|\leqslant$$
$$\leqslant[\varepsilon_2+(\varepsilon_2\|\psi K\|+2\varepsilon)\|\varphi^{-1}\|\|\bar{K}^{-1}\|]\|x^*\|.$$

因 $Kx^*=y$, 而 $\bar{y}=\psi y$, 利用(73)可知

$$\|x^*-\varphi^{-1}\bar{K}^{-1}\psi Kx^*\|\leqslant$$
$$\leqslant\left\{(1+\|\psi K\|\|\varphi^{-1}\|\|\bar{K}^{-1}\|)\left(\varepsilon_3+N\frac{\|Kx^*\|}{\|x^*\|}\right)+2\varepsilon\|\varphi^{-1}\|\|\bar{K}^{-1}\|\right\}\|x^*\|.$$

于是利用

$$\|x^*\|\leqslant\|\varphi^{-1}\bar{K}^{-1}\psi\|\|Kx^*\|+\|x^*-\varphi^{-1}\bar{K}^{-1}\psi Kx^*\|$$

代入上式并解出 $\|x^*\|$, 得

$$\|x^*\|\leqslant\frac{\|\varphi^{-1}\bar{K}^{-1}\psi\|+N(1-\|\psi K\|\|\varphi^{-1}\|\|\bar{K}^{-1}\|)}{1-\varepsilon_3(1+\|\varphi^{-1}\|\|\bar{K}^{-1}\|\|\psi K\|)-2\varepsilon\|\varphi^{-1}\|\|\bar{K}^{-1}\|}\|Kx^*\|. \tag{74}$$

依定理的条件,上式右边的系数是正的,并且由此可知 K 是一对一的,从而它的左逆 K^{-1} 存在,而由(74)得出估値(72)来。 証完。

在应用中有时算子 K, $\bar{K}$ 取如下的形式:

$$K=G-\lambda T,\ \bar{K}=\bar{G}-\lambda\bar{T}. \tag{75}$$

这里 λ 是实数, G 是由 X 到 Y 中的有界綫性算子, 且設 G 具有界逆 G^{-1}, 而 G 把 X 的綫性子空間 X' 映入 Y'。又設

$$\bar{G}=\psi_0 G\varphi^{-1} \tag{76}$$

$T, \bar{T}$ 各表示由 X 到 Y 中及由 $\bar{X}$ 到 $\bar{Y}$ 中的有界綫性算子，为了考察下面的应用，我們提合适的形式的条件(見 Карпиловская[25])，即新的条件 I′, II′：

条件 I′ 設存在正数 μ，使对于一切 $x' \in X'$，

$$\|\bar{T}\varphi x' - \psi T x'\| \leqslant \mu \|x'\|.$$

条件 II′ 存在正数 μ_1，使对于任意 $x \in X$，$\exists y' \in Y'$，使

$$\|Tx - y'\| \leqslant \mu_1 \|x\|.$$

于是由前面的定理不难导出下列定理：

定理 12. 設条件 I′, II″ 成立，那末，如果 K 有有界逆 K^{-1}，并且

$$q = [\|\psi\|\|G^{-1}\|\|K\|\mu_1 + \mu + \|G^{-1}\||\lambda|\mu\mu_1]\|\varphi\|\|\varphi^{-1}\|\|K^{-1}\||\lambda| < 1,$$

則方程

$$\bar{K}\bar{x} \equiv \bar{G}\bar{x} - \lambda\bar{T}\bar{x} = \bar{y} \tag{77}$$

对于任意 $\bar{y} \in \bar{Y}$ 有解。

証 首先証明由条件 I′ 引导出前面的条件 I。实际上，对于 $x' \in \in X'$，

$$\|K\varphi x' - \psi K x'\| = \|\bar{G}\varphi x' - \lambda\bar{T}\varphi x' -$$
$$- \psi_0 G x' - \lambda\psi T x'\| = |\lambda| \|\bar{T}\varphi x' - \psi T x'\| \leqslant |\lambda|\mu\|x'\|,$$

这是因为(76)成立并且 $GX' \subset Y'$(从而 $\psi G x' = \psi_0 G x'$)。这就是說，条件 I 成立，并且

$$\varepsilon = |\lambda|\mu. \tag{78}$$

为了驗明条件 II，考察 X 中任意元 x，令 $y = Kx$，且

$$\bar{y} = \psi y \in \bar{Y}, \quad y_0 = \psi_0^{-1}\bar{y} \in Y'.$$

取
$$z = K^{-1}\lambda T G^{-1} y_0,$$

不难驗明
$$z = G^{-1}\lambda T(z + G^{-1}y_0)$$

既然
$$K(z + G^{-1}y_0) = Kz + GG^{-1}y_0 - \lambda T G^{-1} y_0 = y_0,$$

所以
$$\|z + G^{-1}y_0\| \leqslant \|K^{-1}\|\|y_0\| \leqslant \|K^{-1}\|\|\psi_0^{-1}\|\|\psi\|\|Kx\|.$$

依条件 II′，取 $y' \in Y'$，使

$$\left\|T(z+G^{-1}y_0)-\frac{y'}{\lambda}\right\|\leqslant\mu_1\|z+G^{-1}y_0\|.$$

令 $v'=y'+y_0$, 那末 $v'\in Y'$。令 $x'=G^{-1}v'\in X'$。注意

$$z-G^{-1}y'=G^{-1}[\lambda T(z+G^{-1}y_0)-y'],$$

所以
$$\|z-G^{-1}y'\|\leqslant\|G^{-1}\|\,|\lambda|\,\mu_1\|z+G^{-1}y_0\|.$$

利用这个 $x'\in X'$, 于是

$$\begin{aligned}\|\psi Kx-\psi Kx'\|&=\|\bar{y}-\psi KG^{-1}(y+y_0)\|=\\&=\|\bar{y}-\psi KG^{-1}\psi_0^{-1}\bar{y}-\psi KG^{-1}y'\|\leqslant\\&\leqslant\|\bar{y}-\psi(G-\lambda T)G^{-1}\psi_0^{-1}\bar{y}-\psi KG^{-1}y'\|=\\&=\|\lambda\psi TG^{-1}\psi_0^{-1}\bar{y}-\psi KG^{-1}y'\|\leqslant\\&\leqslant\|\psi\|\|\lambda TG^{-1}\psi_0^{-1}\bar{y}-(G-\lambda T)G^{-1}y'\|=\\&=\|\psi\|\|\lambda T(G^{-1}y_0+z)-y'+\lambda T(G^{-1}y'-z)\|=\\&=\|\psi\|\|Gz-y'+\lambda TG^{-1}(y'-Gz)\|=\\&=\|\psi\|\|(G-\lambda T)G^{-1}(Gz-y')\|\leqslant\\&\leqslant\|\psi\|\|K\|\|z-G^{-1}y'\|\leqslant\|\psi\|\|K\|\|G^{-1}\|\,|\lambda|\,\mu_1\|z+G^{-1}y_0\|\leqslant\\&\leqslant\|\psi\|\|K\|\|G^{-1}\|\,|\lambda|\,\mu_1\|K^{-1}\|\|\psi_0^{-1}\|\|\psi\|\|Kx\|,\end{aligned}$$

从而条件 II 滿足，其中

$$\varepsilon_1=\|\psi\|\|K\|\|G^{-1}\|\,|\lambda|\,\mu_1\|K^{-1}\|\|\psi_0^{-1}\|\|\psi\|,$$

而
$$\begin{aligned}\|x'\|=\|G^{-1}(y'+y_0)\|&\leqslant\|G^{-1}y'-z\|+\|z+G^{-1}y_0\|\leqslant\\&\leqslant(1+\|G^{-1}\|\,|\lambda|\,\mu_1)\|z+G^{-1}y_0\|\leqslant\\&\leqslant(1+\|G^{-1}\|\,|\lambda|\,\mu_1)\|K^{-1}\|\|\psi_0^{-1}\|\|\psi\|\|Kx\|,\end{aligned}$$

即 II 中的常数 M 是

$$M=(1+\|G^{-1}\|\,|\lambda|\,\mu_1)\|K^{-1}\|\|\psi_0^{-1}\|\|\psi\|.$$

于是在定理的条件下，(60)滿足，从而利用定理 8, 本定理証完。

系　如果 $\bar{K}$ 滿足条件(A), 那末

$$\|\bar{K}^{-1}\bar{G}\|\leqslant\frac{(1+|\lambda|\,\|G^{-1}\|\mu_1)\|K'\|\|G\|\|\varphi\|\|\varphi^{-1}\|\|\psi_0\|\|\psi^{-1}\|}{1-q}.\tag{79}$$

証　这由 $\bar{K}\bar{x}=\bar{y}$ 及(76)直接导出。完。

象以前一样，設方程 $Kx=y$ 的解 x^* 可以用 X' 中的元适当逼近，即設存在正数 η 及一元 $x'\in X'$，使

$$\|x^*-x'\|<\eta\|x^*\|. \tag{80}$$

这时由定理 9 可以导出下列定理。

定理 13. 如果条件 I′, II′ 与(80)成立，并設 $\bar{K}^{-1}$ 存在，那末下列估值成立，

$$\|x^*-\varphi^{-1}\bar{x}^*\|\leqslant\{\eta(1+\|\varphi^{-1}\|\|\bar{K}^{-1}\bar{G}\|\|\varphi\|\|G^{-1}\|\|\psi_0^{-1}\|\|\psi\|\|K\|)+$$
$$+2|\lambda|\mu\|\varphi^{-1}\|\|\bar{K}^{-1}\bar{G}\|\|\varphi\|\|G^{-1}\|\|\psi_0^{-1}\|\}\|x^*\|. \tag{81}$$

这里 $\bar{x}^*$ 表示方程

$$\bar{K}\bar{x}=\bar{y}\qquad(\bar{y}=\psi y)$$

的解。

証 令 $\bar{x}_1$ 表示方程

$$\bar{K}\bar{x}=\psi Kx'$$

的解，其中 x' 是满足(80)的元 $x'\in X'$。如果 $\bar{x}^*$ 表示方程 $\bar{K}\bar{x}=\bar{y}$ 的解，而 $\bar{y}=\psi y$，那末

$$\bar{K}\bar{x}^*=\psi Kx^*$$

于是
$$\bar{K}(\bar{x}^*-\bar{x}_1)=\psi K(x^*-x').$$

从而
$$\|\bar{x}^*-\bar{x}_1\|\leqslant\|\bar{K}^{-1}\bar{G}\|\|\bar{G}^{-1}\|\|\psi K\|\eta\|x^*\|$$

但
$$\|\bar{K}\varphi x'-\bar{K}\bar{x}_1\|=\|\bar{K}\varphi x'-\psi Kx'\|\leqslant|\lambda|\mu\|x'\|,$$

所以
$$\|\varphi x'-\bar{x}_1\|\leqslant\|\bar{K}^{-1}\bar{G}\|\|\bar{G}^{-1}\||\lambda|\mu\|x'\|\leqslant$$
$$\leqslant\|\bar{K}^{-1}\bar{G}\|\|\bar{G}^{-1}\||\lambda|\mu(1+\eta)\|x^*\|\leqslant$$
$$\leqslant 2|\lambda|\mu\|\bar{K}^{-1}\bar{G}\|\|\bar{G}^{-1}\|\|x^*\|, \tag{82}$$

这里取 η 足够小，使 $\eta\leqslant 1$。但

$$\|\varphi^{-1}\bar{x}_1-\varphi^{-1}\bar{x}^*\|\leqslant\|\varphi^{-1}\|\eta\|\bar{K}^{-1}\bar{G}\|\|\bar{G}^{-1}\|\|\psi K\|\|x^*\|, \tag{83}$$

所以合并(80)(82)(83)，得

$$\|x^*-\varphi^{-1}\bar{x}^*\|\leqslant\{\eta(1+\|\varphi^{-1}\|\|\bar{K}^{-1}\bar{G}\|\|\varphi\|\|G^{-1}\|\|\psi_0^{-1}\|\|\psi\|\|K\|)+$$
$$+2|\lambda|\mu\|\varphi^{-1}\|\|\bar{K}^{-1}\bar{G}\|\|\varphi\|\|G^{-1}\|\|\psi_0^{-1}\|\}\|x^*\|.$$

証完。

例(Э. Б. Карпиловская)　解常微分方程的插值法:

考察常微分方程

$$Kx \equiv \frac{d^{2m}x}{dt^{2m}} - p_1(t)\frac{d^{2m-1}x}{dt^{2m-1}} - \cdots - p_{2m}(t)x = y(t), \tag{84}$$

帶有边界条件

$$x = \frac{dx}{dt} = \cdots = \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} \text{ 如果 } t=a \text{ 或 } t=b. \tag{85}$$

今試求作下列形狀的近似解

$$x'(t) = (t-a)^m(b-t)^m \sum_{k=1}^{n} c_k t^{k-1}. \tag{86}$$

这里近似的意义是指 $x'(t)$ 在 $[a, b]$ 中的点 $t_1, \cdots, t_n$ 处满足方程(84):

$$\frac{d^{2m}}{dt^{2m}}(t-a)^m(b-t)^m \sum_{n=1}^{n} c_k\, t^{k-1}\Big|_{t=t_i} -$$

$$- \sum_{s=1}^{2m} P_s(t)\frac{d^{2m-s}}{dt^{2m-s}}(t-a)^m(b-t)^m \sum_{k=1}^{m} c_k\, t^{k-1}\Big|_{t=t_i} =$$

$$= y(t_i), \qquad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{87}$$

为了应用前面的一般方法，我們取 X 为由$[a, b]$上具有直到 $2m$ 阶連續导函数并满足边界条件(85)的一切函数全体所組成的綫性空間，范数定义成

$$\|x\|_X \equiv \sum_{k=0}^{2m} \max_{a \leqslant t \leqslant b} \left|\frac{d^k x}{dt^k}\right|. \tag{88}$$

令 $\bar{X}$ 表示 n 維空間，其元是 n 数組 $\bar{x} = (c_1, \cdots, c_n)$, X' 表示 X 中形如(86)的多項式全体所形成的綫性子空間。X' 与 $\bar{X}$ 同構。这一同構由下面的綫性算子 φ 实現:

$$x_1(t) = (t-a)^m(b-t)^m \sum_{k=1}^{n} c_k t^{k-1},\ \bar{x} = \varphi x_1 = (c_1, \cdots, c_n). \tag{89}$$

今定义 $\bar{X}$ 中的范数如下:

$$\|\bar{x}\|_{\bar{X}}=\|\varphi^{-1}\bar{x}\|_X=\|x_1(t)\|_X.$$

显然这时 $\|\varphi\|=\|\varphi^{-1}\|=1$。取 $Y=C[a, b]$, 而 Y' 表示 Y 中次数不超过 $n-1$ 的多項式全体所組成的綫性子空間, $\bar{Y}=m_n$。关于由 Y 到 $\bar{Y}$ 中的算子 ψ, 我們取

$$\bar{y}=\psi y=(y(t_1), \cdots, y(t_n)), y\in Y.$$

这时 $\|\psi\|=1$。ψ 制限在子空間 Y' 上表为 ψ_0。ψ_0 实現由 Y' 到 $\bar{Y}$ 上的同構, 其逆 ψ^{-1}。把 $\bar{Y}$ 中的元 $\bar{y}=(\eta_1, \cdots, \eta_n)$ 映成 Y' 中元 $y'(t)=$ $=\sum_{k=1}^{n} C_k t^{k-1}$, 使

$$y'(t_i)=\eta_i \quad (1\leqslant i\leqslant n).$$

由插值理論①,可知当 $(t_1, \cdots, t_n)$ 是 Чебышев 分点时,

$$\|\varphi_0^{-1}\|\leqslant A\log n+B, \tag{90}$$

而当 $(t_1, \cdots, t_n)$ 是 Gauss 分点时,

$$\|\psi_0^{-1}\|\leqslant D\sqrt{n}. \tag{91}$$

今取 (87) 作为方程(84)(85)的近似方程。引用前面定理 12 中的符号,这里

$$\lambda=1, Gx=\frac{d^{2m}x}{dt^{2m}}, \quad Tx=\sum_{s=1}^{2m} p_s\frac{d^{2m-s}x}{dt^{2m-s}}, \bar{G}\bar{x}=\psi_0 G\varphi^{-1}\bar{x},$$

$$\bar{T}\bar{x}=\psi T\varphi^{-1}\bar{x}.$$

显然 G 把 X 映到 Y 中, 把 X' 映入 Y'。現在必須驗明上述的条件 I′, II′。这里因

$$\|\bar{T}\varphi x'-\psi Tx'\|=\|\psi T\varphi^{-1}\varphi x'-\psi Tx'\|=0,$$

可取 $\mu=0$。設方程(84)的諸系数 $p_k(1\leqslant k\leqslant 2m)$ 为連續可微分。那末

$$\left\|\frac{d}{dt}Tx\right\|_C\leqslant\sum_{s=1}^{2m}\left(\left\|\frac{dp_s}{dt}\right\|_C\left\|\frac{d^{2m-s}x}{dt^{2m-s}}\right\|_C+\|p_s\|_C\left\|\frac{d^{2m-s+1}x}{dt^{2m-s+1}}\right\|_C\right)\leqslant$$

$$\leqslant a\|x\|_X,$$

① Натансон[30], 540 頁。

这里 α 是一常数，依函数構造論中的結果[1]可知存在常数 β，使对于 $x\in X$，可找到一元 $y'\in Y'$，滿足

$$\|Tx-y'\|_G\leqslant\frac{\beta}{n}\|x\|_X,$$

卽条件 II′ 成立，这里

$$\mu_1=\frac{\beta}{n}.$$

今設 λ 不是方程(84)(85)的固有値，那末(84)(85)有一意解，并且这解可借 Green 函数 $g(t, v)$表示成

$$x(t)=\int_a^b g(t, v)y(v)dv\equiv K^{-1}y. \tag{92}$$

依微分方程理論[2]，$g(t, v)$具有直到 $2m-2$ 阶的連續导函数［在正方形 $a\leqslant t, v\leqslant b$ 中］，而其 $2m-1$ 阶导函数存在且有界。今把(92)按 t 微分 $2m-1$ 次，得

$$\frac{dx}{dt}=\int_0^b\frac{\partial g}{dt}y(v)dv, \cdots, \frac{d^{2m-1}x}{dt^{2m-1}}=\int_0^b\frac{\partial^{2m-1}g}{\partial t^{2m-1}}y(v)dv. \tag{93}$$

由(84)

$$\frac{d^{2m}x}{dt^{2m}}=p_n(t)\frac{d^{2m-1}x}{dt^{2m-1}}+\cdots+p_{2m}(t)x+y(t),$$

把(93)中諸式代入上式，并利用 $g(\tau, v)$ 的諸导函数的有界性，不难看出

$$\|K^{-1}y\|_X=\|x\|_X=\sum_{k=0}^{2m}\max_t\left|\frac{d^kx}{dt^k}\right|\leqslant\gamma\|y\|_Y,$$

于是

$$\|K^{-1}\|\leqslant\gamma<+\infty.$$

---

① Натансон[30]，164 頁。

② 見例如 Sansone, G.: Equazioni differenziali nel campo reale 第五章 § 3 第二段。

同样利用微分算子 $G\frac{d^{2m}}{dt^{2m}}$ 的 green 函数［边界条件如前］，也可以証明 G 有有界逆 G^{-1}。又因

$$\|Kx\|_Y\leqslant\left\|\frac{d^{2m}x}{dt^{2m}}\right\|_Y+\|p_1\|_Y\left\|\frac{d^{2m-1}x}{dt^{2m-1}}\right\|_Y+\cdots+\|p_{2m}\|_Y\|x\|_Y\leqslant p\|x\|_X,$$

即
$$\|K\|\leqslant\rho<+\infty.$$

同理，因
$$\|Gx\|_Y=\left\|\frac{d^{2m}x}{dt^{2m}}\right\|_Y\leqslant\|x\|_X,$$

即 $\|G\|\leqslant 1$，依定理 12，那里的常数 q 是

$$q=\|G^{-1}\|\rho\frac{\beta}{n}\|\psi^{-\frac{1}{0}}\|\gamma=O\left(\frac{\|\psi^{-\frac{1}{0}}\|}{n}\right).$$

依 (90)(91) 当 n 足够大时，q 确可 <1，从而当 n 足够大时近似方程可解，而依(79)，

$$\|\bar{K}^{-1}\bar{G}\|=O(\|\psi^{-\frac{1}{0}}\|).$$

为了驗証(80)，我們还要附加一些条件，即設

$$p(t),\ p_2(t),\ \cdots,\ p_{2m}(t),\ y(t)\in C_r[a,b],$$

$$\frac{d^r p_1}{dt^r},\ \frac{d^r p_2}{dt^r},\ \cdots,\ \frac{d^r p_{2m}}{dt^r},\ \frac{d^r y}{dt^r}\in(Lp\alpha),\ \alpha>0. \tag{94}$$

注意
$$\|x^*-x_1\|_X\leqslant\|G^{-1}\|\left\|\frac{d^{2m}x^*}{dt^{2m}}-\frac{d^{2m}x_1}{dt^{2m}}\right\|_Y,$$

从而条件(80)的要求变成用 $\frac{d^{2m}x_1}{dt^{2m}}$ 一致逼近 $\frac{d^{2m}x^*}{dt^{2m}}$ 的問題，而既然 $\frac{d^{2m}x_1}{dt^{2m}}$ 是任意 $n-1$ 次多項式，而 $\frac{d^{2m}x^*}{dt^{2m}}$ 是連續函数。并且在条件(94)之下 $\frac{d^{2m}x^*}{dt^{2m}}$ 有直到 r 阶的連續函数，且其 r 阶导函数滿足具指数 α 的 Lipschitz 条件。于是依函数逼近論的結果① 可取 $n-1$ 次多項式，使这多項式逼近 $\frac{d^{2m}x^*}{dt^{2m}}$ 的阶是 $\frac{1}{n^{r+\alpha}}$，即可取 $x_1\in X'$，使

$$\|x^*-x_1\|_X=O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

---

① Натансон[80]。

从而可取
$$\eta = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$
于是引用定理 13,
$$\|x^* - \varphi^{-1}\bar{x}^*\|_X = O\left(\frac{\|\psi_n^{-1}\|^2}{n^{r+\alpha}}\right).$$
按照插值时取 Чебышев 分点或是 Gauss 分点，可得誤差估値
$$\|x^* - \varphi^{-1}\bar{x}^*\|_X = O\left(\frac{(\log n)^2}{n^{r+\alpha}}\right)(r \geqslant 0),$$
或
$$\|x^* - \varphi^{-1}\bar{x}^*\|_X = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-1}}\right)(r \geqslant 0).$$

应用类似的方法还可得到解常微分方程的 Галеркин 方法等（見[22]）。

在应用中有时算子 $K, \bar{K}$ 取如下的形式：
$$K = I - \lambda H;\quad \bar{K} = \bar{I} - \lambda \bar{H},$$
这里 I 与 $\bar{I}$ 各表示空間 X 与 $\bar{X}$ 中的單位算子，H 与 $\bar{H}$ 各表示由 X 到 X 中及由 $\bar{X}$ 到 $\bar{X}$ 中的有界綫性算子。这时条件(I), (II)换成如下的

条件(I″)：存在正数 ε，使得对于一切 $x' \in X'$,
$$\|\bar{K}\varphi x' - \varphi K x'\| \leqslant \varepsilon \|x'\|.$$

条件(II″)：存在正数 ε_1，使得对于每个 $x \in X$，存在 $x' \in X'$，使
$$\|Hx - x'\| \leqslant \varepsilon_1 \|x\|.$$
而条件(62)可换成：对于 $y \in X$，存在 $y' \in X'$，使
$$\|y - y'\| \leqslant \varepsilon_2 \|y\|.$$

于是由前面的定理得到了两种結果：一种是由精确方程的可解性得出近似方程的可解性以及“近似解的收斂于准确解”，反之，另一种是由近似方程的可解性得出精确方程的可解性以及近似解对精确解的誤差程度。

应用这些結果可得出积分方程
$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) x(t)\, dt = y(s)$$

的多种近似解法：如机械求积方法，Ritz 方法等等。請参看[22](及[3])。

参考文献

[1] 何柏庆：在 Banach 空間中非綫性泛函数方程近似解的三次收斂性(摘要)，东北人民大学 1957 学术报告会。

[2] 林群：牛頓方法及最速下降法的簡化，数学进展 3:2 (1957), 263—267。

[3] 林群：关于分析中近似方法的 Канторович 理論，科学記录 2:3 (1958), 82—87。

[4] 陈文𡾰：解非綫性泛函数方程的累次程序，数学进展 3:3 (1957), 434—444。

[5] 赵訪熊：解联立方程的斜量法，数学学报 3(1953), 328—342。

[6] 管紀文：論非綫性極小化問題的斜量法收斂性定理及修正形式，东北人民大学自然科学学报，1955: 1, 113—140。

[7] 裴鹿成：压縮映象原理的补充及其某些应用，东北人民大学自然科学学报，1957: 2, 1—24。

[8] 盧文：关于巴拿赫空間非綫性泛函数方程的 Канторович 方法，数学进展2: 4(1956), 711—718。

[9] 盧文与关肇直：張弛問題的最速下降法，数学学报 5:4 (1955), 497—504。

[10] 关肇直：关于解函数方程的牛頓方法的一点注記，数学进展 2:2 (1956), 290—295。

[11] 关肇直：解非綫性方程的最速下降法，数学学报 6:4 (1956), 638—650。

[12] 关肇直与林群：关于用近似方程解非綫性泛函方程的近似方法，科学記录 1:6(1957), 355—358。

[13] Акилов, Г. П.: О применеии одного метода решения нелинейных функциональных уравнений, к исследованию систем дифференциальных уравнений, ДАН 68 (1949), 645—648.

[14] Бирман., М. Ш.: Некоторые оценки для метода наискорейшего спуска, Успехи матем. наук 5:3 (1950), 152—155.

[15] Cauchy. A.: Méthode générale pour la resolution des systèmes d'équations simultanéss, Comptes Rendus Paris 25 (1847). 536—538.

[16] Collatz, L.: Einige Anwendungen funktionalanalytischen Methoden in der praktischen Analysis, Z. angew. Math. Phys. 4 (1953), 327—357.

[17] Crockett J. B. and Chernoff, H.: gradient methods of maximization, Pac. Journ. Math. 5 (1955), 33—50.

[18] Curry, H. B.: The method of steepest descent for nonlinear minimization problems, quart Appl math 2 (1944), 258—261.

[19] Фаддеева, В. Н.: Вычислительные Методы Линейной алгебры, 1950.

[20] Гавурин, М. К.: Применение полиномов наилучшего приближения к улучшению сходимости итеративных процессов, Успехи Матем. наук, 5:3 (1950), 156—160.

[21] Hadamard, J.: Mémoire Sur le problème d'analyse relatef à l'équilibre des plaques élastiques encastrées, mémoires présentées par divers savants étrangers à l'Académie des Sciences de l'Institut de France, (2) 33 (1908).

[22] Канторович, Л. В.: 泛函分析与应用数学, 数学进展 1:4 (1955), 638—747.

[23] Канторович Л. В.: 泛函方程的近似解法, 数学进展 4:1 (1958), 1—13.

[24] Канторович Л. В. и Крылов, В. И.: Приближенные методы высшего анализа, Изд. 3ое, 1949.

[25] Карпиловская, Э. Б.: О сходимости интерполяционного Метода для обыкновенных дифференциальных уравнений, успехи Матем. наук, 8:3 (1953), 111—118.

[26] Красносельский, М. А. и Крейн, С. Г.: Иерационный процесс с Минимальными невязками, матнм. Сб. 31 (1952), 315—334.

[27] Мертвецова, М. А.: Аналог процесса касательных гипербол, для общих функциональных уравнений, ДАН 88 (1953), 611-614.

[28] Мысовских И. П.: К вопросу о сходимости Ньютона, Труды Матем. Ин-та им, В. А. Стеклова, 28 (1949), 145-147.

[29] Мысовских, И. П.: О сходимости Метода Л. В. Канторовича для решения нелинейных. Функциональных уравнений и его применениях, вестник. ЛГУ, 1953:11, 25—48.

[30] Натансон, И. П.: Конструктивная теория функций, 1949.

[31] Нечеиуренко, М. И.: О методе Чебышева для функциональных уравнений, Успехи Матем. наук, 9:2 (1954), 163—170.

[32] Салехов, Г. С.: О сходимости процесса касательных Гипербол, ДАН 82 (1952), 525—528.

[33] Салехов, Г. С. и Мертвецова, М. А.: 論某些叠代过程的收敛性，数学进展 3:3 (1957). 341—374.

[34] Stein, M.: On methods for obtaining solutions of fixed end-point problems in the calculus of variations, J. Research Nat. Bur Stand 50 (1953) 277—297.

[35] Temple G.: The general theory of relaxation methods applied to linear systems, Proc., Roy. Soc. Lond. ser. A 169 (1938—39) 476—500.

[36] Воробьёв, Ю. В.: Операторные ортогональные Многочлены и приближенные Методы определения Спектра Линейных ограниченных операторов, успехи Матем. наук 9:1 (1954), 83—90.

[37] Weissinger, J.: Zur Theorie und Anwendung des Iterationsverfahrens, math. Nachr. 8 (1952), 193—212.

[38] Weissinger, J. Verallgemeinerungen des Seidelschen Iterationsverfahrens, Z. angew. math. mech. 33 (1953) 155—163.

第三章　Hilbert 空間中綫性算子的譜理論

引　言

有穷維（n 維）的內积空間 E（即一內积空間——或 Hilbert 空間，其中綫性無关元的最大数目是 n）也叫做 n 維欧几里得空間（也叫做內积空間），这种空間的理論已在綫性代数的書中叙述了，今假定讀者已熟悉这些知識①。

对于这种空間，定义在全空間上的綫性算子一定連續，即有界。如果取一个直交規格化基（即 n 个綫性無关的矢 $e_1, \cdots, e_n$），一个綫性算子按这个基由一个 n 行方陣 $A=(\alpha_{ik})_1^n$ 表示，这里

$$\alpha_{ik}=(Ae_k, e_i)\quad(1\leqslant i, k\leqslant n).$$

伴隨算子 A^* 由轉置复数共軛方陣表示：

$$A^*=(\alpha_{ik}^*)_1^n,\quad \overline{\alpha_{ik}}=\alpha_{ki}^*.$$

自伴綫性算子 A 由 Hermite 方陣表示：

$$\alpha_{ik}=\overline{\alpha_{ki}}.$$

---

① 这方面有很多專書可以参考，例如 Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц 1953（汉譯本：矩陣論）；Ф. Р. Гантмахер, и Крейн, М. Г.：Осцилляционные матрицы и ядра, и малые колебания Механических систем, 2-е изд. 1950；И. М. Гельфанд, Лекций по линейной алгебре, 2-е изд. 1951（汉譯本：一次代数学）；А. И. Мальцев：Основы линейной алгебре, 2-ое изд. 1956（汉譯本：綫代数基础）；В. И. Смирнов：Курс высшей математики, т. III；P. R. Halmos：Finite dimensional vector spaces；G. Julia：Introduction mathématique aux théories quantiques, 1e partie, 1936；Schreier und Sperner：解析几何与代数；藤原松三郎：行列と行列式（旧有汉譯本：行列与行列式）；Wintner, A.：Spektral theorie der unendlichen Matrizen, 1929, Шилов, Г. Е.：Введение в теорию линейных пространств, 1952（汉譯本：綫性空間引論）。

保范算子U由滿足下列条件的方陣表示:

$$U=(\eta_{ik})_1^n;$$

$$\sum_{j=1}^{n}\eta_{ij}\bar{\eta}_{kj}=\delta_{ik}\quad\left(\text{这等价于}\sum_{j=1}^{n}\eta_{ji}\bar{\eta}_{jk}=\delta_{ik}\right).$$

在綫性代数中，一个重要問題乃是固有值問題，即对綫性算子A，求出那样的复数λ，使存在非零矢x，滿足

$$Ax=\lambda x.$$

用几何語言表达，有趣的問題在于是否能求出二次曲面$(Ax,x)=\gamma$(常数)的主軸，換句話說，即把A化成对角綫性[①]。更确切地說，是否能找出A的固有元，使它構成空間的直交基。綫性代数中的一个重要結果乃是下列定理：为了綫性算子A有一組固有元，構成空間的直交規格化基(即其数目等于空間的維数)，必須且只須A是正規的，即滿足

$$A^*A=AA^*.$$

自伴綫性算子与保范算子都是正規算子。这兩种算子的特征可以表述如下：为了綫性算子H是自伴的，必須且只須它有一組固有元，構成空間的直交規格化基，使相应的固有值都是实数；为了綫性算子U是保范的，必須且只須它有一組固有元，構成空間的直交規格化基，使它們的相应固有值都是絕对值为1的复数。用矩陣論的語言表达，这三个結果可以叙述如下：为了方陣A的相应綫性算子是正規、Hermite的或保范的，各必須且只須存在保范方陣$U(U^*=\overset{-1}{U})$，使

$$A=U(\lambda_i\delta_{ik})_1^n\overset{-1}{U};$$

或
$$A=U(\lambda_i\delta_{ik})_1^n\overset{-1}{U}\quad(\lambda_i\text{是实数});$$

或
$$A=U(\lambda_i\delta_{ik})_1^n\overset{-1}{U}\quad(|\lambda_i|=1).$$

有了对角形，就不难定义算子A的函数：如果

$$A=(\lambda_i\delta_{ik})_1^n,$$

① 例如見前引 Шилов 書，10–11章。

那末令
$$f(A)=(f(\lambda_i)\delta_{ik})_1^n.$$
按照这样定义的算子函数，任意綫性算子 A 可以有"極坐标表示"。更确切地說，任意綫性算子 A 可以表示成
$$A=HU=U_1H_1,$$
H, H_1 都是非負自伴綫性算子：$(Hx, x)\geqslant 0$, $(H_1x, x)\geqslant 0 (x\in E)$，而 U, U_1 都是保范算子。为了算子 A 是正規的，必須且只須 H 与 U（或相应地，U_1 与 H_1）是交換的：$HU=UH(U_1H_1=H_1U_1)$。但保范算子 U, U_1 可以表示成
$$U=e^{iF},\quad U_1=e^{iF_1}$$
的形式，这里 F, F_1 都是自伴綫性算子。这里的指数函数乃是按上述算子的函数理解的，从而
$$A=He^{iF}=e^{iF_1}H_1,$$
这不但与复数的極坐标表示 $z=\rho e^{i\theta}$ 形式上类似，而且当空間是一維时，上述公式当眞化成复数的極坐标表示。有时用 $t=\dfrac{1+is}{1-is}$ 形狀的一一对应代替 $t=e^{is}$，相应的 U 与 F 之間的关系式可以表达如下：
$$U=(I+iF)(I-iF)^{-1},\quad F=i(I-U)(I+U)^{-1},$$
这里的关系叫做 Cayley 变式。

至于無穷維情形，在全連續綫性算子的情形，上述得到較自然的推广。Hilbert 在 1906 年建立了無穷多变元的全連續二次齐式的直交变換理論，并由此重新导出綫性积分方程的固有值問題。用現代語言来說，Hilbert 考虑的乃是实 Hilbert 空間(l^2)中全連續綫性算子的譜理論，而这种算子的譜理論我們已在第三章 §8 中用更近代的形式介紹了。在实空間(l^2)中，保范算子所引起的变換叫做直交变換。Hilbert 首先建立了函数
$$\mathfrak{K}(x, x)=\sum_{p,q=1}^{\infty}K_{pq}\xi_p\xi_q$$

在(l^2)的單位球上达到極大值与極小值，这里实际利用了(l^2)中單位球的弱列緊性。設这極大値是ρ，达到極大值的点是$a=(\alpha_i)$，那末

$$\rho_1=\Re(a,a),\quad \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2=1.$$

于是与有窮維情形一样，作一直交变换，把$\alpha=(\alpha_i)$点映成$e_1=(1,0,0,\cdots)$，于是

$$\Re(x,x)=\rho_1\xi_1^2+\Re'(x',x'),$$

这里$\Re'$是一全連續二次齐式。再求$\Re'(x',x')$的極值，反复进行上述推理，可以得出：使用一个适当的直交变换，可以把每个全連續二次齐式化成范式

$$\Re(x,x)=\sum_{p,q=1}^{\infty}K_{pq}\xi_p\xi_q=\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k\xi_k'^2,$$

这里ρ_k是由$\Re(x,x)$一意决定的一串不等于零但斂于0的实数（当确存在無窮多个ρ_k的时候），这时

$$f(x,x)=\sum_{p=1}^{\infty}\xi_p^2=\sum_k\xi_k'^2+\sum_k\xi_k''^2,$$

这里的(ρ_k)实际上是由方陣(k_{pq})决定的(l^2)中全連續綫性算子H的譜集$\sigma(H)$。这和綫性积分方程的联系，已在"历史概述"部分略为道及了。用陣的形式表示，这和有窮維情形很类似。Hilbert 的方法首先是由有窮維到無窮維，从而很自然地要加上全連續性的限制，因为 Hilbert 把双綫性齐式

$$\Re(x,y)=\sum_{p,q=1}^{\infty}K_{pq}\xi_p\eta_q,\quad x=(\xi_p),\quad y=(\eta_p)$$

叫做全連續，是指对于"截部"

$$\Re_n(x,y)=\sum_{p,q=1}^{n}K_{pq}\xi_p\eta_q$$

$\mathfrak{K}_n(x, y)$)在(l^2)中單位球上一致收斂于 $\mathfrak{K}(x, y)$。这样对全連續性的定义与第三章 § 8 引入的相符（在 Hilbert 空間）。但 Hilbert 在 1906 除全連續二次齐式外也考虑了更广的有界二次齐式的直交变换理論。这使得可以处理具有較强特异性的核的积分方程的固有值問題，这时前述的理論已不适用了。后来（1908）H. Weyl 所考察的一类积分方程就是这样的。Weyl 把对称核 $k(s, t)$叫做有界的，是指它在正方形 $a\leqslant\leqslant s, t\leqslant b$ 中除有穷多个点及有穷多条單調連續的曲綫弧外連續，并使

$$\int_a^b k^2(s, t)dt\equiv(k(s))^2$$

在至多具有一个积集点的至多可数的点集外存在，且为連續函数，而对于 $L^2[a, b]$中每个滿足

$$\int_a^b u(s)^2ds\leqslant 1,\qquad \int_a^b |k(s)u(s)|ds<+\infty$$

的函数 $u(s)$

$$\left|\int_a^b\int_a^b k(s, t)u(s)u(t)ds\, dt\right|\leqslant M. \tag{1}$$

用 Hilbert 化积分方程为無穷多变量的齐式的方法，与这种积分方程相应的（1）中积分式通过一个适当的完全直交組的选擇（H. Weyl 在 1908 年具体作出）就化成一个所謂有界二次齐式。Hilbert 把二次齐式

$$\mathfrak{K}(x, x)\equiv \sum_{p, q=1}^{\infty} K_{pq}\xi_p\xi_q,\ K_{pq}=K_{qp}$$

叫做有界，是指存在正数 μ，使

$$\sum_{p=1}^{\infty}\xi_p^2\leqslant 1\longrightarrow |\mathfrak{K}_n(x, x)|\equiv\left|\sum_{p, q=1}^{\infty}K_{pq}\xi_p\xi_q\right|\leqslant\mu.$$

Hilbert 考察了用直交变换把这种齐式化成范式的問題,但他發現并非每个这样的齐式可以用直交变换化成平方和。Hilbert 在他的書中举出了第一个簡單例,即所謂 J-式

$$\mathfrak{K}(x,x)=\sum_{p=1}^{\infty}\xi_p\xi_{p+1}.$$

正如同在解某些边界值問題时,很早就知道有时除可数多个离散分布的固有值外还出現連續分布的"例外值"一样(有时解不能用 Fourier 級数表示),而用 Fourier 积分表示),这里也出現了类似情况。事实上,Hilbert 作出了一般理論,对平方和項添加一个积分項,即一个有界二次齐式 $\mathfrak{K}(x,x)$ 可以用直交变换 $(\xi_n)\to(\xi'_n,\xi''_m)$ 化成如下形式:

$$\mathfrak{K}(x,x)=\sum_k\rho_k\xi'^2_k+\int_{-M}^{M}\rho\,dS(\rho;\xi'',\xi''),$$

同时

$$\sum_{p=1}^{\infty}\xi_p^2=E(x,x)=\sum_k\xi'^2_k+\int_{-M}^{M}dS(\rho;\xi'',\xi''),$$

这里平方和項至多含可数無穷項,而且諸 ρ_k 按絕对值都不超过 M,都是实数。又

$$S(\rho;\ \xi'',\xi'')=\sum_{p,q=1}^{\infty}s_{pq}(p)\xi''_p\xi''_q,\ \ S_{pq}(\rho)=S_{qp}(\rho).$$

乃是一个依賴于在$[-M,M]$中变化的参数 ρ 的定有界二次齐式(叫做譜齐式),它的值对于每个固定的元 (ξ''_p) 随 ρ 增加,由 $S(-M;\ \xi'',\xi'')=0$ 單調連續增加到 $S(M;\xi'',\xi'')=\sum\limits_{p=1}^{\infty}\xi''^2_p$,中間有些地方可能片段为常数。这个函数的增量($\Delta$ 表示区間$[\rho,\rho']$)

$$\Delta S(\rho;\ \xi'',\xi'')=S(\rho';\xi'',\xi'')-S(\rho;\xi'',\xi'')=\sum_{p,q=1}^{\infty}\Delta s_{pq}(\rho)\xi''_p\xi''_q.$$

滿足下列关系：如果 $\Delta,\ \Delta'$ 是兩个区間，那末

$$\Delta S\cdot\Delta_1 S=0\left(\text{即}\sum_{r=1}^{\infty}\Delta s_{pr}\Delta_1 s_{rq}=0\right),\quad \text{如果 } \Delta\cap\Delta_1=\phi,$$

$$\Delta S\cdot\Delta S_1=\Delta S,\quad \left(\text{即}\sum_{r=1}^{\infty}\Delta s_{pr}\cdot\Delta s_{rq}=\Delta s_{pq}\right).$$

上面式中的积分乃是 Stieltjes 型的。Hilbert 称可数集(ρ_p)做点譜（間断譜），那些点 ρ，在它的鄰域中 $s(\rho;\xi'',\xi'')$ 幷非对一切(ξ''_p)都按 ρ 为常数，組成一个完集，叫做綫段譜(連續譜)，点譜与連續譜合幷，再添上点譜的集积点，組成一个集，叫做齐式 $\mathfrak{K}$ 的譜。如果 ν 不屬于 $\mathfrak{K}$ 的譜，那末 $\mathfrak{K}(x,x)-\nu f(x,x)$ 具有有界逆，幷且这个逆等于

$$K(\nu;x,x)=\sum_{\alpha}\frac{\xi_\alpha'^2}{\rho_\alpha-\nu}+\int_{-M}^{M}\frac{dS(\rho;\xi'',\xi'')}{\rho-\nu}.$$

Hilbert 的証明乃是用从有穷到無穷取極限的办法，这里不詳述。特別当 $\mathfrak{K}$ 是全連續时，譜齐式 $S(\rho;x,x)\equiv 0,\ \lim\limits_{k}\rho_k=0$。

以上是就二次齐式的形式叙述的。現代的叙述方式是直接用算子，而不依賴于特殊直交規格化完全組的选擇 这在有穷維情形，Halmos 的書(見前引的書)就是这样处理的，而对無穷維情形，上述結果就可化成現代有界綫性对称算子譜分解的形式[①]。

下一步的工作乃是考察無界綫性算子的情形。Hilbert 的理論也适用于一些無界的 $\mathfrak{K}$，即至少有一 λ 不是截部

$$\mathfrak{K}_n(x,y)=\sum_{p,q=1}^{n}K_{pq}\xi_p\eta_q$$

① 見 Люстерник–Соболев 書第五章。

的固有值 $\lambda_k^{(n)}$ 的集积点，A. Wintner 由量子力学的考察引入的半有界 Hermite 陣也屬于此类。再进一步的發展乃是考虑下列的情形：每个 λ 是諸 $\lambda_k^{(n)}$ 的积集点，这时整个实数軸是譜。T. Carleman 所考察的很广的一类特异积分方程就化成这种情形。

Hilbert 的譜理論的最远的發展乃是 J. von Neumann 的 Hermite 算子理論。他的理論是由量子力学的考虑引起的。为了統一处理 Heisenberg Born 与 Jordan 的“陣力学”与 Schröduiger 的“波力学”，V. Neumann、發現 Hilbert 空間中自伴綫性算子是合适的数学工具。在“陣力学”中所考察的是数列(ξ_n)，这里往往加上規格化条件

$$\Sigma|\xi_n|^2=1,$$

而在 Schröduiger 理論中，描述力学系統的态的乃是一个波函数 $x=$ $=x(q_1,\cdots,q_n)$，使

$$\int\cdots\int|x(q_1,\cdots,q_n)|^2dq_1\cdots dq_n=1.$$

这兩理論的統一处理正是用抽象 Hilbert 空間統一了 l^2 与 L^2 这兩个具体空間(二者等价)。物理中可观测量不是由数値变量表示，而是用作用在上述的 Hilbert 空間之中的自伴綫性算子 A 来表示，这里要求自伴的理由在于(Ax,x)表示可观测量的平均值，从而应当是实的。这一可观测量的可能值并不是任意的，而恰是固有值問題

$$Ax=\lambda x\quad(x\neq\Theta)$$

的解 λ。

如何从有穷維的情形过渡到無穷維情形呢？我們先把有穷維情形进一步分析一下。在 R^n 中，固有值問題乃是求解綫性方程組

$$Ax=\lambda x,\quad A=(\alpha_{\mu\nu}),\quad x=(\xi_\nu),\quad A=A^*.\tag{2}$$

这方程的解 x 形成完全直交規格化組 $\{x_1,\cdots,x_n\}$，$x_k=(\xi_{ki})_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是与固有值 λ_k 相应的固有元（諸 λ_i 之中可能有重复的)。今取 $\{x_1,\cdots,x_n\}$作基。令 $e_k=(\delta_{kj})_{1\leqslant j\leqslant n}$ (δ_{kj} 表示 Kronecker 符号)，那末

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \xi_{ik} e_k \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

因

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{ji} \xi_{ki} = \delta_{kj},$$

(ξ_{ik})是保范陣。于是(因 $\overset{-1}{U} = U^* = \overline{U}'$)

$$\xi_i = \sum_{\mu=1}^{n} \xi_{\mu i} \xi'_\mu, \quad \xi'_i = \sum_{\mu=1}^{n} \xi_{i\mu} \xi_\mu$$

决定一坐标变换,这里(ξ'_μ)是 x 在基$\{x_1, \cdots, x_n\}$中的坐标,(ξ_i)是 x_i 在基$\{e_1, \cdots, e_n\}$中的坐标。上面等式是由下列关系导出的:

$$\sum_i \left(\sum_\mu \xi_{\mu i} \xi'_\mu\right) e_i = \sum_\mu \xi'_\mu x_\mu.$$

于是(2)变成

$$\sum_\nu \alpha_{\mu\nu} \xi_{\rho\nu} = \lambda_\rho \xi_{\rho\mu}.$$

令
$$y = \Sigma \eta_i e_i = \Sigma \eta'_i x_i,$$

于是((x, y)表示内积 $\Sigma \xi_i \eta_i$)

$$\sum_{\rho, \mu} \left(\sum_\nu \alpha_{\mu\nu} \xi_{\rho\nu}\right) \xi'_\rho \overline{\eta}_\mu = \left(\sum_\rho \xi'_\rho A x_\rho, y\right) =$$

$$= (Ax, y) = \left(\sum_\rho \lambda_\rho \xi'_\rho x_\rho, y\right) = \sum_{\rho, \mu} \lambda_\rho \xi'_\rho \xi_{\rho\mu} \overline{\eta}_\mu.$$

这就是

$$(Ax, y) = \sum_\rho \lambda_\rho (\xi'_\rho x_\rho, y) = \sum \lambda_\rho \xi'_\rho \overline{\eta}'_\rho =$$

$$= \sum_\rho \lambda_\rho \left(\sum_\mu \overline{\xi}_{\mu\rho} \xi_\mu\right) \overline{\left(\sum_\nu \overline{\xi}_{\nu\rho} \eta_\nu\right)}. \quad (3)$$

又　　$(x, y)=\Sigma\xi_\mu\bar{\eta}_\mu=\Sigma\xi'_\mu\bar{\eta}'_\mu=\sum\left(\sum_\rho\bar{\xi}_{\rho\mu}\xi_\mu\right)\overline{\left(\Sigma\bar{\xi}_{\rho\nu}\eta_\nu\right)}.$　　(4)

解决固有値的問題化成了求方陣(ξ_{ik})的問題，这个陣滿足(3),(4)。

注意这里$(\xi_{\mu\nu})$並不一意决定：每行$(\xi_{\rho1},\cdots,\xi_{\rho n})$乘上一数$e^{i\vartheta_\rho}$($\vartheta_\rho$是实数)並不妨碍上述結果。如果諸$\lambda_\rho$有重的，还可調換諸相应$x_\rho$。因此直接由上述令$n\to\infty$,沒有意义。为了取極限，必須先消除上述諸不定性。如諸λ_ρ之中可能有重的，我們考察

$$\sum_{\lambda\rho=l}\left(\sum_\mu\bar{\xi}_{\rho\mu}\xi_\mu\right)\overline{\left(\sum_\nu\bar{\xi}_{\rho\nu}\eta_\nu\right)},$$

这式不受上述諸不定性影响。又如$l\neq$任何λ_ρ时，上式实际上$=0$,考察下列 Hermite 齐式

$$E(\lambda;x,y)=\sum_{\lambda\rho\leqslant\lambda}\left(\sum_\mu\bar{\xi}_{\rho\mu}\xi_\mu\right)\overline{\left(\sum_\nu\xi_{\rho\mu}\eta_\nu\right)},$$

这式也是对上述諸不定性不变，如果能知道諸式$E(\lambda;x,y)$,就不难計算出$\lambda_\rho,\xi_{\mu\nu}$来。因此在問題的陈述中，应以$E(\lambda;x,y)$代替$(\lambda_\rho)$,$(\xi_{\mu\nu})$等等。設$E(\lambda)$表示与此双綫性齐式相应的陣。(4)意味着当$\lambda$足够大时(即$\lambda>$一切$\lambda_\rho$),$E(\lambda)=I$,而如$\lambda$足够小(小于一切$\lambda_\rho$)时，$E(\lambda)=0$。又$E(\lambda)$除在有穷多点$\lambda_1<\cdots<\lambda_m(m\leqslant n)$处是常数，在諸$\lambda_i$处有間断。$E(\lambda)$是右連續的，这由它的定义和

$$\sum_{\lambda_\rho\leqslant\lambda}$$

的形式直接看出。注意

$$\lambda'\leqslant\lambda''\Longrightarrow E(\lambda')E(\lambda'')=E(\lambda'')E(\lambda')=E(\lambda').$$

事实上，

$$E(\lambda';x,y)=\sum_{\lambda\rho\leqslant\lambda'}\xi'_\rho\bar{\eta}_\rho.$$

因此按坐标$\{x_1,\cdots,x_n\}$,

$$E(\lambda')\sim\begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

这陣中看有几个 $\lambda_\rho\leqslant\lambda'$，卽有几个 1。从而上述乘法关系容易証明。由此也容易看出 $\lambda'\leqslant\lambda''\Longrightarrow E(\lambda')\leqslant E(\lambda'')$。(3) 意味着什么呢？这是說

$$(Ax,y)=\Sigma\alpha_{\mu\nu}\xi_\nu\bar{\eta}_\mu=\sum_{\tau=1}^{n}\lambda_\tau\{E(\lambda_\tau;x,y)-E(\lambda_{\tau-1};x,y)\}.$$

如果 $\lambda_0'<\lambda_1'<\cdots<\lambda_k'$ 是 $\lambda_1<\cdots<\lambda_n$ 的細分，上式用 λ_i' 代 λ_i 仍成立。因此"令無限細分下去"，得

$$(Ax,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda;x,y). \tag{5}$$

原問題于是化成求一串陣 $F(\lambda)$，使滿足上述諸条件的問題。这种提法已与維數無关了，从而容易过渡到無穷維上去。事实上，Hilbert 的上述結果的形式和(5)是相似的，因为由 Stieltjes 积分总可以分出一个和来，剩下还有一积分項。

Hilbert 空間中線性自伴算子譜理論旣然很重要（用到微分方程、概率論、物理等等），証法也是很多的。下面为了免于反复，我們采用了 von Neumann 的直接处理無界的情形的方式。

参 考 文 献

[1] Carleman, T.: Sur les équations intégrales singulières a noyau réel et symétrique, 1923.

[2] Hellinger, E.: Hilberts Arbeiten über Integralgleichungen und unendliche Gleichungs systeme, gesammelte Abhandlungen von David Hilbert, 3. Bd., 94—145.

[3] Hellinger, E. und Toeplitz, O.: Integralgleichungen und gleichungen mit unendlichen Unbekaunten, Enzyklopädie des math. Wissenschaften.

[4] Hilbert, D.: Grundzüge einer allgememi Theorie der linearen Integralgleichungen, 2. Aufl. 1924.

[5] Neumann, J. von: Mathematische grundlogen der quantenmechanik.

[6] Riesz, F.: Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, 1913.

[7] Wintner, A.: Spektraltheorie der unendlichen Matrizen, Einführung in den analytischen apparat der quantenmechanik, 1929.

[8] Cooke, R. G.: Linear operators, spectral theory and some other applications, 1953.

§1. Hilbert 空間中綫性算子的初等理論

在第三章論一般 Banach 空間理論时，我們主要考慮了定义在整个空間上的有界綫性算子，在一些具体問題中，我們常要考察不必定义在整个 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上并且不必有界的綫性算子。例如在空間 $L^2(-\infty, \infty)$ 中考察微分算子

$$T=\frac{d}{dt}$$

时，如果 D 表示 $L^2(-\infty, \infty)$ 中凡具一阶連續导函数并在有界区間外等于 0 的函数所形成的綫性子空間，那末 T 是定义在 D 上的綫性算子，但 T 不能定义在整个 $\mathfrak{H}$ 上。又如 D 表示 $L^2(R^2)$ 中由凡具有二阶連續导数并在有界区域外为 0 的函数所組成的綫性子空間，那末

$$T=\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{\partial^2}{\partial t^2} \qquad (s, t)\in R^2$$

是定义在 D 上的綫性算子。

这样，当考察一些这类算子时，每个算子可能具有不同的定义域，从而算子的相加与相乘就不象有界算子那末簡單了。

定义 1. 設 $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ 是 Hilbert 空間。設 S, T 是綫性算子，而 $\mathfrak{D}(T), \mathfrak{D}(S) \subset \mathfrak{H}$, $\mathfrak{W}(T), \mathfrak{W}(S) \subset \mathfrak{H}_1$。那末定义 S, T 的和为算子

$$(S+T)x = Sx + Tx (x \in \mathfrak{D}(T) \cap \mathfrak{D}(S)),$$

定义数 α 与 T 的积为算子

$$(\alpha T)x = \alpha(Tx) \qquad (x \in \mathfrak{D}(T)),$$

如果 $\mathfrak{D}(U) \subset \mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{W}(U) \subset \mathfrak{H}_2$, 而 U 是綫性算子，那末定义 U 与 T 的积为算子

$$(UT)x = U(Tx) (x \in \mathfrak{D}(T) \text{且} Tx \in \mathfrak{D}(U)).$$

注　注意一般 T^2 不一定有定义，甚至当 $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1$ 时，T^2 也可能只在 $x = \Theta$ 处有意义。同理 UT 与 TU 即使是 $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2$ 时也不一定有意义，因此我們不一般地定义 T 与 U 的交换性，为了后面应用，我們采取下列定义：

定义 2. 定义在 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 中的綫性算子 T 叫做与有界綫性算子 B 交换，是指对于每个 $x \in \mathfrak{D}(T)$, $Bx \in \mathfrak{D}(T)$ 并且

$$BTx = TBx.$$

定义 3. 設 T, S 是定义在 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 之中的两个綫性算子。T 叫做是 S 的延拓，是指

$$G(T) \supset G(S),$$

这里 $G(T)$, $G(S)$ 各表示 T 与 S 的圖象。我們这时表示成 $T \supset S$。

显然 $T \supset S \Longleftrightarrow \mathfrak{D}(T) \supset \mathfrak{D}(S)$ 并且对于 $x \in \mathfrak{D}(S)$, $Tx = Sx$。由此，T 与有界綫性算子 B 的交换性可以表示如下：

$$BT \subset TB.$$

在第二章中已經定义过伴随算子（共軛算子）T^*，稠定算子等。如果 V 表示积空間 $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ 中的算子 $T\{x, y\} = \{-y, x\}$，那末

$$G(T^*) = (VG(T))^{\perp}。$$

由此不难看出，$T \supset S \Longrightarrow T^* \subset S^*$。

定义 4. $\mathfrak{N}(T) = \{x | x \in \mathfrak{D}(T), Tx = \Theta\}$ 叫做綫性算子 T 的零点

集。

証 綫性算子的零点集一定是綫性子空間。

定理 1. 如果 T 是稠定算子，那末 $\overline{\mathfrak{W}(T)}=\mathfrak{N}(T^*)^{\perp}$。

証 对于 $x\in\mathfrak{D}(T)$, $y\in\mathfrak{D}(T^*)$, 常有 $(Tx,y)=(x,T^*y)$, 从而 $\mathfrak{N}(T^*)\subset\mathfrak{W}(T)^{\perp}$, 从而 $\mathfrak{N}(T^*)^{\perp}\supset(\mathfrak{W}(T)^{\perp})^{\perp}$。

另一方面，如果 $x\in\mathfrak{W}(T)$, 可以写成 $x=Tz$, $z\in\mathfrak{D}(T)$。

于是
$$(Tz,y)=(z,T^*y)(y\in\mathfrak{D}(T^*)).$$
如果 $y\in\mathfrak{N}(T^*)$, 那末 $(x,y)=0$, 从而
$$x\in\mathfrak{N}(T^*)^{\perp}.$$
这就是說，
$$\mathfrak{W}(T)\subset\mathfrak{N}(T^*)^{\perp},$$
从而
$$\overline{\mathfrak{W}(T)}\subset\mathfrak{N}(T^*)^{\mathrm{T}}.$$

証完。

定理 2. 設 T 是稠定綫性算子。为了 T 具有閉延拓(即存在一閉綫性算子 $A\supset T$), 必須且只須 $T^{**}\equiv(T^*)^*$ 存在，也就是說(第二章 §5, 定义 2)必須且只須 T^* 是稠定的。

証 1) **充分性** 設 T^{**} 存在，依伴随算子的定义，T^{**} 是閉的，而 $G(T^{**})=(\vee G(T^*))^{\perp}=(\vee\vee G(T)^{\perp})^{\perp}=(G(T)^{\perp})^{\perp}=\overline{G(T)}\supset G(T)$ 从而，T^{**} 是 T 的閉延拓。

2) **必要性** 設 $T\subset T_1$, T_1 是閉綫性算子，那末 $\overline{G(T)}\subset G(T_1)=\overline{G(T_1)}$ 从而 $\{\Theta,y\}\in\overline{G(T)}\Longrightarrow\{\Theta,y\}\in G(T_1)\Longrightarrow y=\Theta$, 即 $\overline{G(T)}$ 是某个綫性算子的圖象，但依上述，$\overline{G(T)}=(\vee G(T^*))^{\perp}$, 从而 $(\vee G(T^*))^{\perp}$ 是某綫性算子的圖象，于是依第二章 § 5, 定理 1 下之說明，$\overline{\mathfrak{D}(T^*)}=\mathfrak{H}$, 于是 T^{**} 存在。

系 設 T 是稠定綫性算子。为了 T 是閉的，必須且只須 $T=T^{**}$。

証 設 $T=T^{**}$, 那末 T 当然是閉的，反之，如果 T 是閉的，那末
$$G(T)=\overline{G(T)}=G(T^{**}),$$
即 $T=T^{**}$。

定义 5. 綫性算子 T 叫做对称的，是指它是稠定的，并且 $T^*\supset T$。綫性算子 T 叫做自伴的。是指 $T=T^*$。

据定义知自伴算子必是稠定和閉的，因而自伴算子必須是对称的，但下面將举例說明对称算子不必是自伴的，但如果 $\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{H}$，那末对称性与自伴性是等价的。又注意如果 $\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{H}$ 而 T 是对称的，那末 T 必是有界的，因为 $T\subset T^*$ 且 $\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{H}\Longrightarrow T=T^*$，从而 T 是閉的，依閉圖象定理（第二章 §5）T 是有界的。

例 1. 在第二章 §8 中已經考察过积分算子

$$Tx=y:\ \ y(s)=\int_0^1 K(s,t)x(t)dt,\ x\in l^2[0,1],$$

这里

$$\int_0^1\int_0^1 |K(s,t)|^2\,ds\,dt<+\infty.$$

这是有界綫性算子，定义在全空間 $L^2[0,1]$ 之上。如果 $\overline{K(t,s)}=$ $=K(s,t)$，那末由 $L^2[0,1]$ 中而积的形式不难看出。

$$(Tx,y)=(x,Ty)\ \ (x,y\in L^2[0,1]),$$

从而 T 是对称的。

例 2. 設 $\mathfrak{H}=L^2(-\infty,+\infty)$，而令 $Tx=y$ 表示 $y(t)=tx(t)$ $(t\in$ $\in(-\infty,\infty))$。

这时

$$\mathfrak{D}(T)=\{x\,|\,x(t)\in L^2(-\infty,\infty),\ tx(t)\in L^2(-\infty,\infty)\}$$

A 在有穷区間外为 0 的可測有界函数屬于 $\mathfrak{D}(T)$，而旣然这种函数的全体在 $\mathfrak{H}$ 中稠，所以 $\overline{\mathfrak{D}(T)}=\mathfrak{H}$。因此 T^* 存在。現在找出 T^* 的具体表現来。設 $y\in\mathfrak{D}(T^*)$，令 $T^*y=y^*$。于是对于每个 $x\in\mathfrak{D}(T)$，

$$\int_{-\infty}^{\infty} tx(t)\overline{y(t)}dt=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y^*(t)}dt$$

特別取 $x(t)$ 为区間$[\alpha,t_0]$的特征函数，那末，

$$\int_{a}^{t_0} t\,\overline{y(t)}dt = \int_{a}^{t_0} \overline{y^*(t)}dt$$

由不定积分的微分定理可知对于殆一切 t, $ty(t)=y^*(t)$, 特别 $ty(t)\in L^2(-\infty,\infty)$, 从而 $y\in\mathfrak{D}(T)$, 而旣然 $y\in\mathfrak{D}(T^*)$ 是任意的，得証 $T^*\subset T$, 反之，如果 $y\in\mathfrak{D}(T)$, 反轉上面的推理可知 $y^*(t)=ty(t)$ 满足 $y^*=T^*y$, 从而 $T\subset T^*$, 于是証完 $T=T^*$。这就是說，T 是自伴算子。

例 3. 設 $\mathfrak{H}=L^2(-\infty,\infty)$, 令 A 表示 $L^2(-\infty,\infty)$ 中在每个有穷区間上絕对連續并且它的导函数 $x'(t)\in L^2(-\infty,\infty)$的函数全体。于是

$$Tx=y \qquad y(t)=\frac{1}{i}x'(t) \quad (i=\sqrt{-1})$$

是 $\mathfrak{H}$ 中一个綫性算子，而 $\mathfrak{D}(T)=A$。我們証明 T 是自伴的。

設 $y\in\mathfrak{D}(T^*)$, 令 $T^*y=y^*$。对于每个 $x\in\mathfrak{D}(T)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{i}x'(t)\overline{y(t)}dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\overline{y^*(t)}dt \tag{1}$$

取一函数 $x_n(t)$ 如下:

$$x_n(t)=\begin{cases}1 & \text{如 } a\leqslant t\leqslant t_0\\ 0 & \text{如 } t\leqslant a-\frac{1}{n} \text{ 或 } t\geqslant t_0+\frac{1}{n}\\ t \text{ 的一次函数，} & \text{如 } a-\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant a \text{ 或 } t_0\leqslant t\leqslant t_0+\frac{1}{n}\end{cases}$$

$x_n(t)$ 都是連續函数，并且不难看出，把 $x_n(t)$ 代入(1)式中，得

$$n\int_{a-\frac{1}{n}}^{a}\frac{1}{i}\overline{y(t)}dt-n\int_{t_0}^{t_0+\frac{1}{n}}\frac{1}{i}\overline{y(t)}dt=\int_{-\infty}^{\infty}x_n(t)\overline{y^*(t)}dt$$

令 $n\to\infty$, 利用不定积分的微分定理，得

$$\frac{1}{i}(\overline{y(a)}-\overline{y(t_0)})=\int_a^{t_0}\overline{y^*(t)}\,dt. \tag{2}$$

但既然 $y^*\in L^2(-\infty,\infty)$, $\overline{y^*(t)}$ 在任意有穷区間上是可积分的，这由 Буняковский–Schwarz 不等式不难驗明。于是由(2) $\bar{y}(t)$ 是一不定积分加常数，从而在任意有穷区間中是絕对連續的，再利用不定积分的微分定理，由(2)可知对于殆一切 t_0, $\frac{1}{i}y'(t_0)$存在，并且 $=-y^*(t_0)$。这就是說，$y\in\mathfrak{D}(T)$ 并且 $T^*y=\frac{1}{i}y'(t)$。从而 $T^*\subset T$。

反之，設 $y\in\mathfrak{D}(T)$, 并用分部积分，得，对于任意有穷区間$[a,b]$。

$$\int_a^b\frac{1}{i}x'(t)\overline{y(t)}\,dt=\frac{1}{i}[x(t)\overline{y(t)}]_a^b+\int_a^b x(t)\overline{\left(\frac{1}{i}y'(t)\right)}dt$$

而因为 $x(t)y(t)\in L^2(-\infty,\infty)$, 可知

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}[x(t)\overline{y(t)}]=0$$

于是
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{i}x'(t)\overline{y(t)}dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\overline{\left(\frac{1}{i}y'(t)\right)}dt$$

这正是說，$y\in\mathfrak{D}(T^*)$ 并且 $(T^*y)(t)=\frac{1}{i}y'(t)$, 換句話說，$T\subset T^*$ 于是 T 的自伴性得証。

注意 T 是稠定的，实际上，如上的函数 $x_n(t)$的一切綫性組合的全体在 $\mathfrak{H}$ 中稠。

例 4. Carleman 型积分算子。令 $\mathfrak{H}=L^2(-\infty,\infty)$, 所謂 Carleman 型核，是指兩变量 s,t 的可測函数，$K(s,t)(-\infty<s,t<+\infty)$, 滿足 $\overline{K(s,t)}=K(t,s)$; 并且对于殆一切的 s 值，

$$\int_{-\infty}^{\infty}|K(s,t)|^2\,dt<+\infty,\text{ 令}$$

$$K(s)=\begin{cases}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|K(s,t)|^2dt} & \text{如果根号下的式} <+\infty \\ 0 & \text{如果根号下的式} =+\infty\end{cases}$$

首先証明殆遍(对 s 来說)

$$\int_{-\infty}^{\infty}|K(t,s)|^2dt=K^2(s) \tag{3}$$

令
$$E_\alpha=\left\{s\,\Big|\,-\alpha\leqslant s\leqslant\alpha,\ \int_{-\infty}^{\infty}|K(s,t)|^2dt<+\infty,\ K(s)\leqslant\alpha\right\}$$

$$E_{\alpha,\beta}=\{(s,t)\,|\,s\in E_\alpha,\ -\beta\leqslant t\leqslant\beta\}$$

如果 $x(s)$ 是滿足不等式 $0\leqslant x(s)\leqslant s$ 的任意可測函数，那末积分

$$\int_{E_\alpha}x(s)ds\int_{-\beta}^{\beta}|K(s,t)|^2dt$$

存在，并且不超过

$$\int_{E_\alpha}K^2(s)x(s)ds. \tag{4}$$

因此，依 Fubini 定理，重积分

$$\iint_{E_{\alpha,\beta}}|K(s,t)|^2x(s)\,ds\,dt$$

也存在，并且不超过同样的量(4)。引用 $K(s,t)$的对称性

$$\iint_{E_{\alpha,\beta}}|K(t,s)|^2x(s)\,ds\,dt\leqslant\int_{E_\alpha}K^2(s)x(s)ds$$

依 Fubini 定理

$$\int_{E_\alpha}x(s)ds\int_{-\beta}^{\beta}|K(t,s)|^2dt\leqslant\int_{E_\alpha}K^2(s)x(s)ds,$$

$x(s)$ 与 β 既然都是任意的，积分

$$\int_{-\beta}^{\beta} |K(t,s)|^2 dt$$

在 $E(\alpha)$ 中殆遍存在，并且不超过 $K^2(s)$。α 既是任意的，可知在全实数轴上，

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(t,s)|^2 dt \leqslant K^2(s)$$

由 $K(s)$ 的定义可知上式中<不适用，从而(3)得証。

由上面所証，可知对于任意 $x \in L^2(-\infty, \infty)$，

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(s,t) x(t) dt \tag{5}$$

存在，但这式作为 s 的函数不必属于 $L^2(-\infty, \infty)$。要使上列积分决定一个 $L^2(-\infty, \infty)$ 中的算子，必須先找出适当的定义域来。

令

$$[L^2]_K = \left\{ x \,\middle|\, x \in L^2(-\infty, \infty),\ \int_{-\infty}^{\infty} K(t) |x(t)| dt < +\infty \right\}$$

我們証明，$x \in [L^2]_K \Longrightarrow Ax \in L^2(-\infty, \infty)$，这里 A 表示由积分(5)决定的算子。事实上，殆遍。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(s,u)\overline{K(s,v)} x(u)\overline{x(v)}| ds \leqslant$$

$$\leqslant |x(u)|\,|x(v)| \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |K(s,u)|^2 ds \int_{-\infty}^{+\infty} |K(t,v)|^2 dt} =$$

$$= K(u)K(v)|x(u)|\,|x(v)|$$

而
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(u)K(v)|x(u)||x(v)|du\,dv=$$
$$=\left\{\int_{-\infty}^{\infty} K(u)|x(u)|du\right\}^2<+\infty$$

从而依 Fubini 定理
$$\int_{-\infty}^{\infty} ds\left|\int_{-\infty}^{\infty} K(s,t)x(t)dt\right|^2=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} ds\int_{-\infty}^{\infty} K(su)x(u)du\int_{-\infty}^{\infty}\overline{K(s,v)}\overline{x(v)}dv<+\infty$$

不难看出，如果定义算子 A_0 如下
$$\mathfrak{D}(A_0)=[L^2]_K \quad (A_0x)(s)\equiv\int_{-\infty}^{+\infty} K(s,t)x(t)dt,$$

A_0 是綫性算子 $\mathfrak{W}(A_0)\subset L^2(-\infty,\infty)$，并且对于 $x\in\mathfrak{D}(A_0)$
$$\|A_0x\|\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty} K(u)|x(u)|du$$

我們証明 $\overline{\mathfrak{D}(A_0)}=L^2(-\infty,\infty)$ 事实上，我們証明，$\mathfrak{D}(A_0)^{\perp}=\{\Theta\}$ 即
$$y\in L^2(-\infty,\infty),\ \int_{-\infty}^{\infty} x(s)\overline{y(s)}ds=$$
$$=0\ \text{对每个}\ x\in\mathfrak{D}(A_0)\text{成立}\Longrightarrow y=\Theta.$$

注意 $y(s)$ 是殆遍有穷的，令
$$E(\alpha)\equiv\{s\,|\,K(s)\leqslant\alpha,\ |y(s)|\leqslant\alpha\}$$

并取 E 为 $E(\alpha)$ 的任意測度有穷的可測子集，取函数 $x_E(s)$（即集 E 的特征函数），那末 $x_E\in[L^2]K$，从而依假定

$$\int_E y(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x_E(s)}\, y(s)ds = \bar{0} = 0$$

E 旣是任意的，必然 $y(s)$ 在 $E(\alpha)$ 中殆遍 $=0$，α 旣是任意的，$y(s)$ 在全数軸上殆遍 $=0$。

現在証明 A_0 是对称的，我們証明 $(A_0x, y)=(x, A_0y)$ 对每个 $x\in\mathfrak{D}(A_0)$ 及 $y\in\mathfrak{H}$ 成立，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} K(s,t)x(t)\,dt\right\}\overline{y(s)}\,ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} K(s,t)\overline{y(s)}\,ds\right\}x(t)\,dt \tag{6}$$

事实上，殆遍

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(s,t)x(t)y(s)|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant |x(t)|\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|y(s)|^2ds\int_{-\infty}^{\infty}|K(s,t)|^2ds} =$$

$$= K(t)|x(t)|\,\|y\|.$$

从而

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|K(s,t)x(t)\overline{y(s)}|\cdot ds\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} K(t)|x(t)|dt,\ \|y\| < +\infty$$

于是依 Fubini 定理，(6)得証

令

$$\mathfrak{D}(A) \equiv \{x \mid x\in\mathfrak{H},\ Ax\in\mathfrak{H}\},$$

$$(Ax)(s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} K(s,t)x(t)\,dt$$

于是 A 看成定义在 $\mathfrak{D}(A)$ 上的綫性算子必是 A_0 的伴随算子。如此，我們証明，$\mathfrak{D}(A)=\mathfrak{D}(A_0^*)$ 并且对于这个集中之任意 x, $Ax=A_0^*x$. 但已知为了 $y\in\mathfrak{D}(A_0^*)$, 必須且只須存在一元 $y^*\in\mathfrak{H}$, 使对于每个 $x\in$ $\in\mathfrak{D}(A_0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}K(s,t)x(t)dt\right\}\overline{y(s)}ds=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\overline{y^*(t)}dt$$

也就是說

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\overline{K(t,s)}\,x(t)dt\right\}\overline{y(s)}\,ds=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\overline{y^*(t)}\,dt$$

由(6)上述关系可以改写成

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\overline{K(t,s)y(s)}ds-\overline{y^*(t)}\right\}dt=0\quad(x\in\mathfrak{D}(A_0)).\;(7)$$

依 $\mathfrak{D}(A_0)$ 的稠性，可知(7)等价于

$$\int_{-\infty}^{\infty}K(t,s)y(s)ds=y^*(t)\quad(\text{对 } t \text{ 殆遍成立})$$

既然 y^* 应当 $\in\mathfrak{H}$, 故 $y\in\mathfrak{D}(A)$ 并且 $y^*=Ay$。

以后將通过具体例說明一般不必 $A_0=A$, 从而 A_0 不必是自伴的。

定理 3. 如果 T 是对称算子，T^{**} 也必是对称的。

証 如果 T 是对称的，那末 $\overline{\mathfrak{D}(T)}=\mathfrak{H}$, 而 $\mathfrak{D}(T^*)\supset\mathfrak{D}(T)$. 从而 $\overline{\mathfrak{D}(T^*)}=\mathfrak{H}$, 因此 T^{**} 存在。由定理 2 的証明 1), $T\subset T^{**}$ 所以 $\mathfrak{D}(T^{**})=\mathfrak{H}$, 即 T^{***} 存在，由 $T^*\supset T$ 可知 $T^{**}\subset T^*$, 从而 $T^{***}\supset T^{**}$, 即 T^{**} 是对称的，証完。

定理 4. 如果 T 是有界对称算子，那末，

$$\|T\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|(Tx,x)|\qquad(8)$$

但对于一般有界綫性算子 T，有

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\| = \sup_{\substack{\|x\|\leqslant 1\\ \|y\|\leqslant 1}} |(Tx, y)| \tag{9}$$

而对于对称有界綫性算子，則有更精密的(8)成立。

証 令
$$\gamma = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |(Tx, x)|$$
由(9)可知 $\gamma \leqslant \|T\|$。对于任意实数 λ,

$$|(T(y\pm\lambda z), y\pm\lambda z)| = |(Ty, y)\pm$$
$$\pm 2\lambda\Re(Ty, z)+\lambda^2(Tz, z)| \leqslant \gamma\|y\pm\lambda z\|^2$$

(在上式中左，右同时用 + 或用 − 号)，所以

$$4\lambda\Re(Ty, z) \leqslant \gamma(\|y+\lambda z\|^2+\|y-\lambda z\|^2) \leqslant 2\gamma(\|y\|^2+\lambda^2\|z\|^2).$$

令 $\lambda = \frac{\|y\|}{\|z\|}$(如果 $z\neq\Theta$), 得

$$|\Re(Ty, z)| \leqslant \gamma\|y\|\|z\|,$$

而对 $z=\Theta$, 这式显然仍成立。令 $\vartheta = \arg(Ty, z)$(卽复数 (Ty, z) 的偏角，那末，用 $e^{i\vartheta}z$ 代替上式中的 z, 得

$$|(Ty, z)| \leqslant r\|y\|\|z\| \qquad (y, z\in\mathfrak{H})$$

于是由(9)知 $\|T\| \leqslant r$, 証完。

显然有界对称綫性算子具有下列特征：即为了有界綫性算子 A 是对称的，必須且只須对每个 $x\in\mathfrak{H}$, (Ax, x)是实数，必要性乃是对称性的直接后果，$(Ax, y)=(y, Ax)$, 从而$(Ax, x)=(x, Ax)=\overline{(Ax, x)}$, 反之，設对每个 $x\in\mathfrak{H}$, (Ax, x)是实数，由不难驗証的恒等式

$$4(Ax, y) = (A(x+y), (x+y)) - (A(x-y), x-y) +$$
$$+ i(A(x+iy, x+iy) - i(A(x-iy), x-iy))$$

以及
$$(Au, u) = \overline{(Au, u)}$$
(一切 $u\in\mathfrak{H}$)直接推出

$$4(Ax, y) = 4(x, Ay) \quad (x, y\in\mathfrak{H})$$

从而 A 是对称的，这一結果以后往往用到。

定理 5. 自伴綫性算子 T 的逆算子 $\overset{-1}{T}$(如果存在)必仍是自伴的。

証　$T=T^* \Longleftrightarrow (\vee G(T))^{\perp}=G(T)$。又

$$G(\overset{-1}{T})=\{(x,\overset{-1}{T}x)\,|\,x\in\mathfrak{D}(\overset{-1}{T})\}=\{(x,\overset{-1}{T}x)\,|\,x\in\mathfrak{M}(T)\}=$$

$$=\{(Ty,y)\,|\,y\in\mathfrak{D}(T)\}=\{\in(-Ty,y)\,|\,y\in\mathfrak{D}(T)\}=\vee G(-T)$$

而 $(-T)^*=-T^*=-T$, 所以 $(\vee G(-T))^{\perp}=G(-T)$, 从而

$$(\vee G(\overset{-1}{T}))^{\perp}=G(-T)^{\perp}=(\vee G(-T))^{\perp\perp}=$$

$$=\overline{\vee G(-T)}=\vee G(-T)=G(\overset{-1}{T})$$

因为 $T=T^*$ 是閉的,因此, $(\overset{-1}{T})^*=\overset{-1}{T}$, 証完。

定义 6. 綫性算子 T 叫做等距的,是指对于每个 $x\in\mathfrak{D}(T)$

$$\|Tx\|=\|x\|$$

滿足 $\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{W}(T)=\mathfrak{H}$ 的等距算子叫做**保范算子**。如果对于綫性算子 T, 有一閉綫性子空間 M 存在, 使 T 是由 M 到 $N=T(M)$ 上的保范算子,但 $x\in M^{\perp}\Longrightarrow Tx=\Theta$, 那末 T 叫做部分等距算子。

注　1) 注意部分等距算子 T 必是有界綫性的, 并且如 $T\neq\Theta$, 必然 $\|T\|=1$, 但等距算子不必定义在全空間之上。

2) 对于部分等距算子,也可引进如下。一般,对于任意有界綫性算子 A, $\mathfrak{N}(A)=\{x\,|\,Ax=\Theta, x\in\mathfrak{H}\}$ 是 $\mathfrak{H}$ 中閉綫性子空間,而在 $\mathfrak{N}(A)^{\perp}$ 上的投影算子 $P=p\mathfrak{N}(A)^{\perp}$ 叫做 A 的支柱。对于每个 $y\in\mathfrak{H}$, $y-Py\in\mathfrak{N}(A)$, 从而 $A(I-P)y=\Theta$, 卽 $A=AP$。綫性有界算子 T 叫做**部分等距**的,是指 T 在 $P\mathfrak{N}(T)^{\perp}\mathfrak{H}$ 上是等距的, 这时 $T\mathfrak{H}=TP\mathfrak{H}$ 是 $\mathfrak{H}$ 中一个閉綫性子空間 Y, 而 T 把 $P\mathfrak{H}$ 等距地映到 $TP\mathfrak{H}$ 之上。P 叫做 T 的始投影, 而 $P_{TP\mathfrak{H}}$ 叫做終投影, 而 $\mathfrak{N}(T)^{\perp}$ 与 $TP\mathfrak{H}$ 各叫做 T 的始域及終域。

定理 6. 为了有界綫性算子 T 是保范的, 必須且只須 $\mathfrak{W}(T)=\mathfrak{H}$ 并

$$T^*=\overset{-1}{T}$$

証　1）**必要性**　設 T 是保范算子，那末，

$$4\Re(Tx, Ty)=\|T(x+y)\|^2-\|T(x-y)\|^2=$$
$$=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2=4\Re(x, y),$$

而在上式中用 iy 代替 y，得 $4\Im(Tx, Ty)=4\Im(x, y)$，从而

$$(Tx, Ty)=(x, y)\quad (x, y\in\mathfrak{H}) \tag{10}$$

但旣然 $\|Tx\|=\|x\|$ 对每个 $x\in\mathfrak{H}$ 成立，所以 $Tx=\Theta\Longrightarrow x=\Theta$，卽 $\overset{-1}{T}$ 存在。由(10)得知 $T^*T=I=TT^*$，因为令 $y=T^*z$，則

$$(Tx, TT^*z)=(x, T^*z)=(Tx, z)$$

而因保范算子的値域 $\mathfrak{W}(T)=\mathfrak{H}$，从而由上式得知 $TT^*=I$。同理証 $T^*T=I$。这正是說 $T^*=\overset{-1}{T}$。

2）**充分性**　已知 $\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{W}(T)=\mathfrak{H}$ 而

$$(Tx, Ty)=(x, T^*Ty)=(x, \overset{-1}{T}Ty)=(x, y)$$

特别令 $x=y$，得 $\|Tx\|=\|x\|$，卽 T 是保范的。

例　在 $L^2(-\infty, +\infty)$ 中，令 $Tx\equiv y$，这里 $y(t)=x(t+1)$。不难看出 T 是保范算子。

定理 7. 設 A 是对称綫性算子，那末

$$\mathfrak{G}\equiv\{((A+iI)x, (A-iI)x\}\mid x\in\mathfrak{D}(A)\}$$

是一个等距綫性算子 V 的圖象，并且 $\mathfrak{D}(A)=\mathfrak{W}(I-V)$。又对于 $y\in\mathfrak{D}(V)$，有

$$A(y-Vy)=i(y+Vy).$$

如果 A 是閉的，V 也是閉的。

証　1）先証 $\mathfrak{G}$ 是一个等距閉綫性算子 V 的圖象，由于 A 的对称性，

$$((A\pm iI)x, (A\pm iI)x)=(Ax, Ax)\pm(Ax, ix)\pm(ix, Ax)+(x, x),$$

所以
$$\|(A+iI)x\|^2=\|(A-iI)x\|^2=\|Ax\|^2+\|x\|^2 \tag{11}$$

于是 $(\Theta, y)\in\mathfrak{G}\Longrightarrow y=\Theta$，所以 $\mathfrak{G}$ 是某綫性算子 V 的圖象，这个算子是等距的，也由(11)直接看出。如果 A 是閉的今証 V 是閉的。

設 $$(A+iI)x_n \to y,\ (A-iI)x_n \to z \qquad (n\to\infty)$$

于是 $$Ax_n \to \frac{1}{2}(y+z),\quad x_n \to \frac{y-z}{2i}$$

由于 A 是閉的，有

$$\frac{y-z}{2i} \in \mathfrak{D}(A) \text{ 并且 } A\frac{y-z}{2i} = \frac{1}{2}(y+z)$$

于是

$$(A+iI)\frac{y-z}{2i} = \frac{y+z}{2} + \frac{y-z}{2} = y,\quad (A-iI)\frac{y-z}{2i} = \frac{y+z}{2} - \frac{y-z}{2} = z$$

这就是說 $Vy=z$，証明了 V 的閉性。

2）如果 $y\in\mathfrak{D}(V)$，必存在 $x\in\mathfrak{D}(A)$，使 $y=(A+iI)x$，所以

$$y-Vy=(A+iI)x-(A-iI)x=2ix\in\mathfrak{D}(A),$$

反之，如果 $x\in\mathfrak{D}(A)$，那末

$$y=\frac{1}{2i}(A+iI)x\in\mathfrak{D}(V),$$

而 $$x=\frac{1}{2i}(A+iI)x-\frac{1}{2i}(A-iI)x=y-Vy$$

于是得証 $\mathfrak{R}(I-V)=\mathfrak{D}(A)$。

3）設 $y=(A+iI)x\in\mathfrak{D}(V)$，那末

$$A(y-Vy)=A(2ix)=2iAx=i(y+Vy),$$

証完。

定义 7. 定理 7 中由对称性算子 A 决定的等距綫性算子 V 叫做 A 的 Cayley 变式，表示成 V_A。

注 V_A 也常常表示成

$$V_A=(A-iI)(A+iI)^{-1}.$$

$(A+iI)^{-1}$ 的存在也由(11) 看出。因$(A+iI)x=\Theta \Longrightarrow x=\Theta$。特别由定理 7 可知$\{y-Vy \mid y\in\mathfrak{D}(V)\}$在 $\mathfrak{H}$ 中稠。

定理 7 的逆命題也成立。

定理 8. 設 V 是等距綫性算子，而 $\mathfrak{W}(I-V)$ 在 $\mathfrak{H}$ 中稠，那末必存在唯一确定的对称性算子 $A\equiv A_V$，使 V 是 A 的 Cayley 变式。如果 V 是閉的，A_V 也是閉的。

証 对于 $y\in\mathfrak{D}(V)$，定义算子 A，使

$$G(A)\equiv\{\{y-Vy,\ i(y+Vy)\}\mid y\in\mathfrak{D}(V)\}.$$

为了証明 A 是綫性算子，首先要証明 $(\Theta, z)\in G(A)\Longrightarrow z=\Theta$。換句話說，只須証明 $y=Vy\Longrightarrow y=\Theta$。事实上，設 $w\in\mathfrak{W}(I-V)$，那末，$\exists a\in\mathfrak{D}(V)$，使 $(I-V)a=w$，于是对于 $y\in\mathfrak{D}(V)$，

$$(y, w)=(y, a)-(y, Va)=(Vy, Va)-$$
$$-(y, Va)=(Vy-y, Va)=0,$$

如果 $y=Vy$。这正是說，$y\in\mathfrak{W}(I-V)^{\perp}$。依假定 $\mathfrak{W}(I-V)$ 在 $\mathfrak{H}$ 中稠，从而 $y=\Theta$。

現在証 A 是对称的。令 $x=y-Vy$, $u=w-Vw$，那末

$$(x, Au)=(y-Vy, i(w+Vw))=-i\{(y, w)-(Vy, w)+$$
$$+(y, Vw)-(Vy, Vw)\}=i\{(Vy, w)-(y, Vw)\}.$$

交換 y 与 w，得

$$(u, Ax)=i\{(Vw, y)-(w, Vy)\}=i\{\overline{(y, Vw)}-\overline{(Vy, w)}\}=$$
$$=\overline{(x, Aw)}=(Au, x).$$

$x, u\in\mathfrak{D}(A)$ 是任意的，从而得知 A 是对称的。

如果設 V 是閉的，今証 A 也是閉的。設 $y_n-Vy_n\to z$, $y_n+Vy_n\to w$。那末

$$y_n\to\frac{z+w}{2},\quad Vy_n\to\frac{w-z}{2}.$$

V 既是閉的，必然

$$\frac{z+w}{2}\in\mathfrak{D}(V),\ \text{并且}\ \frac{w-z}{2}=V\frac{z+w}{2},$$

从而 $$\frac{z+w}{2}-V\frac{z+w}{2}=\frac{z+w}{2}-\frac{w-z}{2}=z\in\mathfrak{D}(A),$$

并且 $$i\left(\frac{z+w}{2}+V\frac{z+w}{2}\right)=i\left(\frac{z+w}{2}+\frac{w-z}{2}\right)=iw,$$

A 的閉性証完。

因由 A 的定义可知对于每个 $y\in\mathfrak{D}(V)$, $A(y-Vy)=i(y+Vy)$，从而对于每个 $x\in\mathfrak{D}(A)=\mathfrak{R}(I-V)$， $x=y-Vy(y\in\mathfrak{D}(V))$，所以由上式，$y+Vy=-iAx$，于是

$$2y=x-iAx=-i(A+iI)x,$$
$$2Vy=-iAx-x=-i(A-iI)x,$$

即 V 确是 A 的 Cayley 变式。由定理 7，A 由 V 一意决定，因为 A 的形式已由 V 給出。

系 設 V_1, V_2 各是对称綫性算子 A_1, A_2 的 Cayley 变式。为了 V_1 是 V_2 的眞延拓(即 $\mathfrak{G}(V_1)\neq\mathfrak{G}(V_2)$)，必須且只須 A_1 是 A_2 的眞延拓。

据前面定理 2 証明中所述，$\mathfrak{G}(T^{**})=\overline{\mathfrak{G}(T)}$，从而 T^{**} 是 T 的最小閉延拓。因此，今后当考察对称綫性算子延拓时，無妨只考察閉的 T。于是它的相应 Cayley 变式 V 也是閉的。今証 $\mathfrak{D}(V)$ 是閉的。事实上，設 $x_n\in\mathfrak{D}(V)$，$\|x_p-x_q\|\to0(p, q\to\infty)$，那末，由于 V 的等距性，

$$\|Vx_p-Vx_q\|=\|x_p-x_q\|\to0(p, q\to\infty).$$

于是 $(x_p)\to x_0'\in\mathfrak{H}$, $(Vx_p)\to y\in\mathfrak{H}$, 而依 V 的閉性，必然 $x_0'\in\mathfrak{D}(V)$ 并且 $Vx_0'=y$，証完了 $\mathfrak{D}(V)$ 的閉性。由于 V 的等距性，$\mathfrak{W}(V)$ 也是閉的。这就是說，$\mathfrak{D}(V)$，$\mathfrak{W}(V)$ 都是閉綫性子空間。

定义 8. 閉綫性子空間 $\mathfrak{D}(V)^{\perp}$ 与 $\mathfrak{W}(V)^{\perp}$ 叫做閉对称算子 T 的亏子空間，而这兩个子空間的維数 m, n (可能是有穷数或超穷基数)叫做 T 的亏指数，我們表示成：T 具亏指数 (m, n)。亏子空間以后表成 H_T^+, H_T^-。

定理 9. 对于对称綫性算子 T，H_T^+ 由 T^* 的与固有值 i 相应的固有元組成，H_T^- 由 T^* 的与固有值 $-i$ 相应的固有元組成。

証 事实上，

$$x\in H_T^+\Longleftrightarrow x\perp\mathfrak{D}(V)\Longleftrightarrow(Ty+iy,x)=0(\text{每个 } y\in\mathfrak{D}(T)$$

依定理 $7)\Longleftrightarrow(Ty,x)=(y,ix)\Longleftrightarrow x\in\mathfrak{D}(T^*)$

且 $T^*x=ix$.

同理証明定理的第二部分。

定理 10. 对于閉对称性算子 T, $\mathfrak{D}(T^*)$ 可以表示成 $\mathfrak{D}(T)$, H_T^+, H_T^- 的直和，換句話說，$\mathfrak{D}(T^*)$中每个元可以一意表示成各屬于 $\mathfrak{D}(T)$, H_T^+, H_T^- 中的元的和。用符号可以表示成 $\mathfrak{D}(T^*)=\mathfrak{D}(T)\oplus H_T^+\oplus H_T^-$。

証 設 $x+y+z=\Theta$, $x\in\mathfrak{D}(T)$, $y\in H_T^+$, $z\in H_T^-$, 那末把 T^*+iI 作用在 $x+y+z$ 之上，于是依定理 9，得

$$(T+iI)x+2iy=\Theta.$$

但 $(T+iI)x\in\mathfrak{D}(V)$, $y\in H_T^+=\mathfrak{D}(V)^\perp$, 由上面等式只能 $2iy=\Theta$，卽 $y=\Theta$。既然 T 是对称算子，$-i$ 不可能是它的固有値(否則

$$(-ix,x)=(Tx,x)=(x,Tx)=(x,-ix)=i(x,x),$$

只能在 $x=\Theta$ 时成立)，从而 $x=\Theta$，于是 $z=-x-y=\Theta$。

由于 $H_T^+=\{x\mid T^*x=ix,\ x\in\mathfrak{H}\}$, 从而 $H_T^+\subset\mathfrak{D}(T^*)$; 同理 $H_T^-\subset\mathfrak{D}(T^*)$。由此得知 $x\in\mathfrak{D}(T)$, $y\in H_T^+$, $z\in H_T^-\Longrightarrow x+y+z\in\mathfrak{D}(T^*)$。反之，設 $u\in\mathfrak{D}(T^*)$。T 既是閉的，由前述得知 $\mathfrak{D}(V)$是閉綫性子空間，而因 $H_T^+=\mathfrak{D}(V)^\perp$, 从而

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{D}(V)\oplus H_T^+.$$

$(T^*+iI)u$ 既是 $\mathfrak{H}$ 中一元，它可以表示成

$$(T^*+iI)u=(T+iI)x+2iy,\ x\in\mathfrak{D}(T),\ y\in H_T^+.$$

由定理 9 我們可以写成

$$(T^*+iI)u=(T^*+iI)(x+y).$$

由此得知
$$(T^*+iI)(u-x-y)=\Theta,$$

而令 $z=u-x-y$; 那末依定理 9, $z\in H_T^-$, 从而每个 $u\in\mathfrak{D}(T^*)$ 可以表示成 $u=x+y+z$。表示的一意性由証明的第一部分直接得出，証完。

在定理 10 中，对于任意 $u\in\mathfrak{D}(T^*)$，依定理 9 必然有

$$T^*u = Tx + iy - iz,\ x \in \mathfrak{D}(T),\ y \in H_T^+,\ z \in H_T^-.$$

这样就把 T^* 的作用明白地表示出来。

系 1. 为了閉对称綫性算子是自伴的，必須且只須 $H_T^+ = H_T^- = \{\Theta\}$，也就是説，必須且只須它的亏指数 $(m, n) = (0, 0)$。

系 2. 为了閉对称綫性算子 T 是自伴的，必須且只須它的 Cayley 变式 V 是保范的。

証 因为 $(m, n) = (0, 0) \Longleftrightarrow \mathfrak{D}(V) = \mathfrak{W}(V) = \mathfrak{H}$。

系 3. 对于閉对称綫性算子 T；对于 $u \in \mathfrak{D}(T^*)$，如果 $u = x + y + z$ 是定理 10 中的表示，$x \in \mathfrak{D}(T)$，$y \in H_T^+$，$z \in H_T^-$，那末[①]。

$$\mathfrak{I}(T^*u, u) = \|y\|^2 - \|z\|^2.$$

这个等式叫做 von Neumann 公式。

証 注意

$$(Tx, y+z) = (x, T^*(y+z)) = (x, i(y-z)),$$

从而依定理 10 后的注，

$$\begin{aligned}(T^*u, u) &= (Tx + iy - iz, x + y + z) = \\ &= (Tx, x) + (Tx, y+z) + i(y-z, x) + i(y-z, y+z) = \\ &= (Tx, x) + (x, i(y-z)) + i(y-z, x) + i(\|y\|^2 - \|z\|^2) + \\ &\qquad + i((y, z) - (z, y)) = \\ &= (Tx, x) + i(\|y\|^2 - \|z\|^2) + 2\mathfrak{R}[(x, i(y-z)) + i(y, z)].\end{aligned}$$

但由于 T 是对称的，$(Tx, x) = (x, Tx)$ 是实数，从而公式得証。

特别的，如系 1 中只有一个亏指数是 0，那末 T 不是自伴的。下面將証明这时 T 是極大的，卽它沒有自伴延拓。

定理 11. 为了对称綫性算子 T 具有自伴的延拓，必須且只須它的亏指数相等。更确切地説，設对称綫性算子 T 的亏指数是 (m, n)，而設存在基数 m', n', y，使

---

① $\mathfrak{I}S$ 表示复数 S 的虛数部分：$\mathfrak{I}S = \frac{1}{2i}(S - \bar{S})$。

$$m' = m + y, \quad n = n' + y, \tag{11}$$

那末必存在T的閉对称延拓T_1，使它的亏指数等于(m', n')。反之，設T_1是T的对称延拓，而T_1的亏指数是(m', n')，那末必存在基数y，使$m = m' + y, n = n' + y$。

証 取 Hilbert 空間$H_{+}^{\perp}$，$H_{-}^{\perp}$中的完全直交規格化組$M = \{x_\alpha\}$与$N = \{y_\beta\}$，$\alpha \in A$，$\beta \in B$。于是A, B各是基数为m, n的标号族。如果(11)成立，可以分解A, B成$A = A_1 \cup A_2$，$A_1 \cap A_2 = \phi$，$B = B_1 \cup B_2$，$B_1 \cap B_2 = \phi$，使A_1，B_1的基数各是m'，n'，从而A_2与B_2的基数都是y。今令A_2与B_2的元之間有一一对应，于是引起$(x_\alpha)(\alpha \in A_2)$与$(y_\beta)(\beta \in B_2)$之間的一一对应，这个一一对应不难綫性地延拓成从由$M$所張成的子空間$E_1$到由$B_2$張成的子空間$E_2$上的綫性等距算子$W$。設$V = V_T$是$T$的 Cayley 变式，那末对于$x = y + z \in \mathfrak{D}(V) \oplus E_1$，$y \in \mathfrak{D}(V)$，$z \in E_1$，規定

$$V_1 x = Vy + Wz,$$

于是不难看出V_1是由$\mathfrak{D}(V) \oplus E_1$到$\mathfrak{W}(V) \oplus E_2$上的等距算子，而$V_1$的 Cayley 变式$T_1 = T_{V_1}$，即是$T$的对称延拓。$T_1$的亏指数就是$(m', n')$。

反之，設T_1是T的对称延拓，而設T_1的亏指数是(m', n')。設V_1是T_1的 Cayley 变式，从而V_1是V的延拓，設

$$y = \dim(\mathfrak{D}(V_1) \ominus \mathfrak{D}(V)),$$

即$\mathfrak{D}(V)$在$\mathfrak{D}(V_1)$中的直交补的維数，那末不难看出

$$m = m' + y, \quad n = n' + y.$$

証完。

从定理所說的延拓的作法可知当閉对称算子T的兩个亏指数都大于零时，T一般有無穷多个閉对称延拓。同时前面已經指出，如果閉对称算子T的亏指数有一个$= 0$，T是極大的。如果T的兩个亏指数都是0，即T是自伴的，那末自然应叫它作超極大的(Hypermaximal Hermi-

tesch—von Nenmann 的命名)。与此相应，von Neumann 称对称綫性算子作 Hermitesch 的，即 Hermite 型的。

例 1. 設 Ω 是 m 維欧几里得空間中一个开有界区域，$L^2(\Omega)$表示定义在 Ω 上并且平方有和的复值可测函数的全体按内积

$$(u, v)=\int_{\Omega} u(t)\overline{v(t)}d\Omega,\ t=(\tau_1, \cdots, \tau_m)$$

所組成的可分 Hilbert 空間。由公式

$$D_{i_1 i_2, \cdots, i_k}x=\frac{\partial^k x}{\partial\tau_{i_1}, \partial\tau_{i_2}, \cdots, \partial\tau_{i_k}}(x=x(\tau_1, \cdots, \tau_m))$$

决定一个綫性算子，它的定义域 $\mathfrak{D}(D_{i_1}, \cdots, {}_{i_k})$是 $M_k(\Omega)$, 卽在 Ω 中 k 阶連續可微分并在 Ω 內部某閉区域之外等于 0 且屬于 $L^2(\Omega)$ 的函数全体。可以証明，$M_k(\Omega)$是在 $L^2(\Omega)$中稠的綫性子空間，从而 $D^*_{i_1}, \cdots {}_{i_k}$ 存在，算子

$$(-1)^k D^*_{i_1}, \cdots, {}_{i_k}$$

叫做按变量 $\tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_k}$ 的广义微分的算子，而对于 $u\in\mathfrak{D}(D^*_{i_1}, \cdots, {}_{i_k})$, $(-1)^k D^*_{i_1}, \cdots, {}_{i_k}u$ 叫做 u 在区域 Ω 中按变量 $\tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_k}$ 的 k 阶广义微商。这在偏微分方程理論中是很重要的概念。[①]

例 2 考察 $L^2(0, 1)$ 中的微分算子 $-\dfrac{d^2}{dt^2}\equiv A$，它的定义域是一切包含在 $L^2(0, 1)$ 中且具二阶連續导函数的函数全体。設 $\mathfrak{D}_0$ 是 $\mathfrak{D}(A)$ 中滿足条件

$$y(0)=y(1)=0,\ y'(0)=y'(1)=0$$

的函数 $y(t)$的全体，A_0 表示 A 在 $\mathfrak{D}_0$ 上的限制，那末可以証明[②], A_0 是閉对称綫性算子，其亏指数是$(2, 2)$，而 $A_0^*=A$。

在数学物理問題中，所遇到的微分算子往往是半有界的。例如考察常微分算子

① 詳見，例如 Михлин [3], §§. 15—18。

② 詳見 Наймарк [4], §17, 2。

$$Ax=-[p(t)x'(t)]'+q(t)x(t),\ p(t)\geqslant 0,\ q(t)\geqslant q_0\ \ (0\leqslant t\leqslant 1).$$

今在 $L^2(0,1)$ 中考察，A 的定义域看成是具二阶連續微商并滿足条件

$$x(0)=0,\ x'(1)+\alpha x(1)=0$$

的函数 $x(t)$全体，这里 α 是非負常数，并設 $p(t)$, $p'(t)$, $q(t)$ 都連續。于是

$$(Ax,x)=\int_0^1\{-[p(t)x'(t)]'+q(t)x(t)\}\overline{x(t)}dt=$$

$$=-p(t)x'(t)\overline{x(t)}\Big|_0^1+\int_0^1 p(t)|x'(t)|^2dt+\int_0^1 q(t)|x(t)|^2dt=$$

$$=\alpha p(1)|x(1)|^2+\int_0^1 p(t)|x'(t)|^2dt+\int_0^1 q(t)|x(t)|^2dt\geqslant$$

$$\geqslant\int_0^1 q_0|x(t)|^2dt=q_0(x,x).$$

在物理問題中常遇到的微分算子

$$-\Delta x\equiv-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)$$

也具有类似性質。事实上，設 Ω 是二維空間中一个有界区域，S 是它的边界。設 M 是在 $\Omega\setminus S$ 中具二阶連續微商并在 S 上等于 0 的函数全体，$-\Delta$ 看作定义在M上的綫性算子滿足下列条件

$$(-\Delta x,x)\geqslant\frac{1}{\alpha^2}\|x\|^2,\ \alpha\ \text{是常数。}①$$

以上的例使得有必要引入下列定义:

定义 8. Hilbert 空間中对称綫性算子 T 叫做下半有界（或上半有界），是指存在常数 α 使对每个 $x\in\mathfrak{D}(T)$

① 詳見 Михлин [8], §8。

$$(Tx, x) \geqslant \alpha(x, x)$$

(或相应地$(Tx, x) \leqslant \alpha(x, x)$)。如果 $\alpha=0$, T 叫做正算子。如果 $\alpha>0$, T 叫做正定算子。

显然，每个下半有界綫性对称算子加上不变算子的适当倍后就得出正定算子，$S=T+\gamma I$。上面例中的兩个算子 A，$-\Delta$ 都是正定的。由关系 $S=T+\gamma I$ 不难看出，为了 T 有自伴延拓，必須且只須 S 有自伴延拓。因此，为了考虑半有界算子的自伴延拓的可能性，只須考察正定算子的情形就够了。

首先注意，对于对称綫性算子 A 可以引出一个相应 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_A$ 来，設存在数 $\gamma>0$，使

$$x \in \mathfrak{D}(A) \Longrightarrow (Ax, x) \geqslant \gamma \|x\|^2. \tag{12}$$

在集 $\mathfrak{D}(A)$上引入內积

$$[u, v]=(Au, v), \quad (u, v \in \mathfrak{D}(A))$$

$[u, v]$ 确是內积，不难看出（例如$[u, u]=0 \Longrightarrow 0 \leqslant \gamma\|u\|^2 \leqslant (Au, u)= =[u, u]=0 \Longrightarrow u=\Theta$)。与这个內积相应的范数表示成$|\!|\!|u|\!|\!|$。由(12)可見

$$\|u\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\gamma}} |\!|\!|u|\!|\!| (u \in \mathfrak{D}(A)). \tag{13}$$

$\mathfrak{D}(A)$不一定是备的，今把它完备化，表示成 $\mathfrak{H}_A$。我們証明 $\mathfrak{H}_A$ 可以看成是 $\mathfrak{H}$ 中的子集(Friedrichs[2])。实际上，$\mathfrak{D}(A)$ 本来就包含在 $\mathfrak{H}$ 中，而如 $u \in \mathfrak{H}_A \setminus \mathfrak{D}(A)$，依定义必存在 $u_n \in \mathfrak{D}(A)$，使

$$|\!|\!|u_n-u|\!|\!| \to 0, \quad (n \to \infty),$$

从而 (u_n) 是按范数 $|\!|\!|u|\!|\!|$ 的基本列。依(13)它也是按范数 $\|u\|$ 的基本列，所以收斂于 $\mathfrak{H}$ 中一元，表示成 u_1。由关系 $\varphi(u)=u_1$ 决定一个由 $\mathfrak{H}_A$ 到 $\mathfrak{H}$ 中的綫性算子。φ 是一意的。事实上，設另有一按范数 $|\!|\!|u|\!|\!|$ 的基本列(u_n')收斂于 u，那末

$$|\!|\!|u_n-u_n'|\!|\!| \to 0, \quad (n \to \infty).$$

依(13),可知$\|u_n-u_n'\|\to 0$, 从而$\|u_n'-u_1\|\to 0(n\to\infty)$, 即 $\varphi(u)$ 不依賴于列(u_n)的选取，φ 是一对一的。事实上，設 $\varphi(u)=\varphi(u')=u_1$, 那末 $\varphi(u-u')=0$。如果 $v_n\in\mathfrak{D}(A)$, $\|v_n-(u-u')\|\to 0(n\to\infty)$, 那末依 φ 的定义，$\|v_n\|\to 0$。对任意 $x\in\mathfrak{D}(A)$，必然$(v_n, A_x)\to 0(n\to\infty)$。但$(v_n, A_x)=[v_n, x]$, 而由于 $\|v_n-(u-u')\|\to 0$, 故 $[u-u', x]=0$。x 既是 $\mathfrak{D}(A)$ 中任意元，而 $\mathfrak{D}(A)$ 是 $\mathfrak{H}_A$ 中稠集，从而 $u=u'$。今后常把 $u\in\mathfrak{H}_A$ 与 $\varphi(u)$等同起来，并用同一符号表示。

● 利用上面引入的工具，可以証明下列关于半有界算子的自伴延拓存在的定理。

定理 12. 每个正定对称性算子(从而每个半有界算子)必具有自伴延拓。

証 設 A 是正定对称綫性算子，从而 $\mathfrak{D}(A)$是 $\mathfrak{H}$ 中稠集，并且存在正数 r, 使

$$(Au, u)\geqslant r\|u\|^2 \quad (u\in\mathfrak{D}(A)).$$

对于任意 $y\in\mathfrak{H}$ 及任意 $u\in\mathfrak{H}_A$, $f(u)=(u, y)$是 $\mathfrak{H}_A$ 上綫性泛函数；这个泛函数也是有界的，依(13),

$$|f(u)|=|(u, y)|\leqslant\|u\|\|y\|\leqslant\frac{\|y\|}{\sqrt{r}}\|u\|.$$

依 Hilbert 空間的自共軛性，存在一唯一确定的元 y_1, 表示成 Ty, 使

$$(u, y)=f(u)=[u, y_1]=[u, Ty], \tag{14}$$

并且

$$\|y_1\|\leqslant\frac{1}{\sqrt{r}}\|y_1\|\leqslant\frac{\|y\|}{r}. \tag{15}$$

T 是由 $\mathfrak{H}$ 到 $\mathfrak{H}_A$ 中的綫性算子，而依(15)，当把 T 看成是由 $\mathfrak{H}$ 到 $\mathfrak{H}$ 中的綫性算子时，有 $\|T\|\leqslant\frac{1}{r}$, 即 T 是有界的。由(14),令 $u=Ty$,

$$(Ty, y)=[Ty, Ty]=\|Ty\|^2\geqslant 0, \tag{16}$$

即对于每个 $y\in\mathfrak{H}$, (Ty, y)是实数。依定理 4 的証明下注，T 是 $\mathfrak{H}$ 中的对称算子。由 $Ty=\Theta$ 可知$(u, y)=0$, 而这对于每个 $u\in\mathfrak{D}(A)$成立，从

而 $y=\Theta$，这說明 T 是一对一的，卽逆算子 $\overset{-1}{T}$ 存在。$A_1=\overset{-1}{T}$ 是有界对称性算子 T 的逆，从而依定理 5，是自伴的。

A_1 是下半有界的。事实上，設 $z=Ty$ 是 $\mathfrak{D}(A_1)$ 中任意元，依(16)，

$$(z, Az)=[z, z]\geqslant r(z, z).$$

对于 $x\in\mathfrak{H}_A$ 与 $z\in\mathfrak{D}(A_1)$，有

$$(x, A_1z)=(x, y)=[x, Ty]=[x, z].$$

$\mathfrak{D}(A_1)$在 $\mathfrak{H}_A$ 中是稠集。实际上，設 $x_0\in\mathfrak{H}_A$，使

$$(x_0, A_1z)=[x_0, z]=0 \ (\text{一切 } z\in\mathfrak{D}(A_1)),$$

那末，因 $\mathfrak{W}(A_1)=\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{H}$，必然 $x_0=\Theta$.

前后証明 A_1 是 A 的自伴延拓。設 $x, y\in\mathfrak{D}(A)$，依(14)，

$$(x, Ay)=[x, TAy].$$

另一方面，

$$(x, Ay)=[x, y],$$

从而，由于 $\mathfrak{D}(A)$在 $\mathfrak{H}_A$ 中的稠性，可知对每个 $y\in\mathfrak{D}(A)$

$$TAy=y.$$

这說明 $y\in\mathfrak{W}(T)=\mathfrak{D}(A_1)$，而

$$A_1y=Ay.$$

这正意味着 $A\subset A_1$。証完。

自伴算子与保范算子都是正規算子的特例。

定义 9. Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$中綫性算子 A 叫做正規的，是指它是稠定閉算子，并且滿足关系

$$A^*A=AA^*. \tag{16}$$

本节只論正規算子的几个初等性質。

定理 13. 設 A 是稠定閉綫性算子，那末 A^*A 与 AA^* 都是正自伴算子。

証 由于 $G(A^*)=(VG(A))^\perp=V(G(A))^\perp$，从而

$$\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}=G(A)\oplus VG(A^*),$$

于是对于任意元 $h\in\mathfrak{H}$, 必存在一意分解

$$\{h, \Theta\}=\{x, Ax\}+\{-A^*y, y\}, x\in\mathfrak{D}(A), y\in\mathfrak{D}(A^*). \quad (17)$$

由此得
$$h=x-A^*y, \quad \Theta=Ax+y.$$

于是 $y=-Ax\in\mathfrak{D}(A^*)$, 即 $x\in\mathfrak{D}(A^*A)$，并且由分离的一意性可知滿足 $A^*Ax+x=h$ 的元 x 由 h 一意决定。这說明 $(I+A^*A)^{-1}$ 在全 $\mathfrak{H}$ 上有定义。对于 $h, k\in\mathfrak{H}$, 令

$$x=(I+A^*A)^{-1}h, y=(I+A^*A)^{-1}k,$$

那末依上述, $x, y\in\mathfrak{D}(A^*A)$, 并且

$$\begin{aligned}(h, (I+A^*A)^{-1}k)&=((I+A^*A)x, y)=(x, y)+(A^*Ax)y=\\&=(x, y)+(Ax, Ay)=(x, y)+(x, A^*Ay)=\\&=(x, (I+A^*A)y)=((I+A^*A)^{-1}h, k).\end{aligned}$$

这証明了 $(I+A^*A)^{-1}$ 是对称的。

据定义 5, 定义在全空間上的对称算子 $(I+A^*A)^{-1}$ 是自伴算子。[旣然它是自伴的，它是閉算子，而旣然定义在全空間上，它必是有界的]。它的逆算子 $I+A^*A$, 以及 A^*A, 依定理 5 也必是自伴算子。依定理 2 的系，旣然 A 是稠定閉綫性算子，$A=A^{**}$，从而 $\overline{\mathfrak{D}(A^*)}=\mathfrak{H}$。于是 $AA^*=(A^*)^*A^*$ 依上面巳証部分也是自伴的。对于 $x\in\mathfrak{D}(A^*A)$,

$$(A^*Ax, x)=(Ax, Ax)=\|Ax\|^2\geqslant 0,$$

从而 A^*A 是正的。証完。

定理 14. 設 U 是以 M, N 为始域与終域的部分等距算子。U 的伴随算子 U^* 也必是部分等距的，并且当把它看作是由 N 到 M 中的算子时，乃是 U 限制在 M 上的逆算子。

証 設 $y=Ux, x\in M, y\in N$。对于任意 $z\in M$,

$$(Uz, y)=(Uz, Ux)=(z, x).$$

对于 $z\in M^\perp$, $(Uz, y)=0=(z, x)$，从而無論如何，对于一切 $z\in\mathfrak{H}$, $(Uz, y)=(z, x)$, $Ux=y$, 从而 $x=U^*y=U^*Ux$, $y=Ux=UU^*y(y\in N)$。对于 $y\in N^\perp$, 及任意 $x\in M$, 有

$$(Ux, y)=0=(x, \Theta),$$

而对于 $x\in M^{\perp}$, $(Ux, y)=(\Theta, y)=(x, \Theta)$,

从而 $U^*y=\Theta$。这証明了 U^* 是部分等距的。完。

定理 15. 为了綫性算子 U 是部分等距的，必須且只須 U^*U (与 UU^*)是投影算子。

証 1) **必要性** 設 U 是部分等距算子，M, N 各是它的始域与終域。設 P_M 表示在子空間 M 上的投影算子。于是对一切 $x\in\mathfrak{H}$, $Ux==UP_Mx$。从而依前定理 $U^*Ux=U^*UP_Mx=P_Mx$, 卽 $U^*U=P_M$。同理可証 $UU^*=P_N$。

2) **充分性** 設 U^*U 是在子空間 M 上的投影。那末对于 $x\in M$, $U^*Ux=x$, 从而 $(Ux, Ux)=(x, U^*Ux)=(x, x)$, 对于 $x\in M^{\perp}$, 那末 $U^*Ux=\Theta$, 从而 $(Ux,Ux)=(x,U^*Ux)=0$, 卽 $Ux=\Theta$。所以 U 在 M 上是等距的，而在 $M^{\perp}$ 上是 Θ, 卽 U 是以 M 为始域的部分等距算子。

定理 16. 設 A, B 是閉綫性算子，而 $\overline{\mathfrak{D}(A)}=\mathfrak{H}=\overline{\mathfrak{D}(B)}$, $A^*A=B^*B$, 那末 $\mathfrak{D}(A)=\mathfrak{D}(B)$, 并且存在以 $\overline{\mathfrak{W}(A)}$ 为始域，以 $\overline{\mathfrak{W}(B)}$ 为終域的部分等距算子 V, 使 $B=V_A$。

証 对于 $x\in\mathfrak{D}(A^*A)=\mathfrak{D}(B^*B)$,

$$(A^*Ax, x)=\|Ax\|^2, (B^*Bx, x)=\|Bx\|^2,$$

从而 $\|Ax\|=\|Bx\|$。今把 A 限制在 $\mathfrak{D}(A^*A)$ 上，表示成 A_1。我們証明 $\overline{\mathfrak{G}(A_1)}=\mathfrak{G}(A)$。由于 $\overline{\mathfrak{G}(A_1)}\subset\overline{\mathfrak{G}(A)}=\mathfrak{G}(A)$, 所以只須証

$$\{x_0, Ax_0\}\in\mathfrak{G}(A)\cap\mathfrak{G}(A_1)^{\perp}\Longrightarrow x_0=Ax_0=\Theta.$$

事实上，对于任意 $y\in\mathfrak{D}(A^*A)$,

$$0=[\{x_0, Ax_0\}, \{y, Ay\}]=(x_0, y)+(Ax_0, Ay)=(x_0, y+A^*Ay).$$

但依定理 13 之証，$\mathfrak{W}(I+A^*A)=\mathfrak{H}$, 从而 $x_0=\Theta$, 于是 $Ax_0=\Theta$。

对于任意 $x_0\in\mathfrak{D}(A)$, 必存在 $x_n\in\mathfrak{D}(A_1)$ 使 $x_n\to x_0$, $Ax_n\to Ax_0$ 依上面已証得的关系，

$$\|A(x_n-x_m)\|=\|B(x_n-x_m)\|,$$

从而 (Bx_n) 收斂。既然 B 是閉算子，可知 $x_0\in\mathfrak{D}(B)$，所以 $\mathfrak{D}(A)\subset\mathfrak{D}(B)$，并且 $Bx_n\to Bx_0$。由于 A 与 B 的相互关系的对称性不難推出 $\mathfrak{D}(A)=\mathfrak{D}(B)$，并且对于一切 $x\in\mathfrak{D}(A)\equiv\mathfrak{D}(B)$，有 $\|Ax\|=\|Bx\|$。于是 $Ax\to Bx$ 是由 $\mathfrak{W}(A)$ 到 $\mathfrak{W}(B)$ 上的一对一等距算子。这对应可以按連續性延拓到整个 $\overline{\mathfrak{W}(A)}$ 及 $\overline{\mathfrak{W}(B)}$ 上，并且得出定义在全空間上而在 $\overline{\mathfrak{W}(A)}^{\perp}$ 上为 0 的算子。証完。

定理 17. 設 A 是閉綫性算子，而 $\overline{\mathfrak{D}(A)}=\mathfrak{H}$，那末 A 的零点集 $\mathfrak{N}(A)\equiv\{x\,|\,Ax=\Theta,\ x\in\mathfrak{D}(A)\}=\mathfrak{W}(A^*)^{\perp}=\overline{\mathfrak{W}(A^*)}^{\perp}$ 又 $\mathfrak{N}(A^*)\equiv\mathfrak{W}(A)^{\perp}$。

証 如果 $x\in\mathfrak{N}(A)$，对于 $y\in\mathfrak{D}(A^*)$，$(x,A^*y)=(Ax,y)=0$，从而 $x\in\mathfrak{W}(A^*)^{\perp}$。反之，設 $x\in\mathfrak{W}(A^*)^{\perp}$，对于 $y\in\mathfrak{D}(A^*)$，有 $(x,A^*y)==0$，所以 $(Ax,y)=0$，即 $Ax\in\mathfrak{D}(A^*)^{\perp}$。既然依定理 1 的系，$A^{**}=A$ 存在，$\overline{\mathfrak{D}(A^*)}=\mathfrak{H}$。所以 $Ax=\Theta$ 即 $x\in\mathfrak{N}(A)$。于是得証 $\mathfrak{N}(A)==\mathfrak{W}(A^*)^{\perp}$。因 A^* 是閉的，并且依定理 2 的系，$\overline{\mathfrak{D}(A^*)}=\mathfrak{H}$，由上面推理可知 $\mathfrak{N}(A^*)=\mathfrak{W}(A^{**})^{\perp}=\mathfrak{W}(A)^{\perp}$。完。

定理 18. 为了稠定閉綫性算子 A 是正規的，必須且只須 $\mathfrak{D}(A)==\mathfrak{D}(A^*)$，并且对于 $x\in\mathfrak{D}(A)$，$\|Ax\|=\|A^*x\|$。

通常我們把滿足条件 $\mathfrak{D}(A)=\mathfrak{D}(B)$ 与 $\|Ax\|=\|Bx\|(x\in\mathfrak{D}(A))$ 的算子 A 与 B 叫做"度量相等"。

証 必要性：如果 A 是正規的，那末，令 $B=A^*$，由于 $B^*=A^{**}==A$ 存在，$\overline{\mathfrak{D}(B)}=\overline{\mathfrak{D}(A)}=\mathfrak{H}$，从而依定理 16 $\mathfrak{D}(A)=\mathfrak{D}(A^*)$，并且对于 $x\in\mathfrak{D}(A)$，$\|Ax\|=\|A^*x\|$。

充分性：依假定，$\mathfrak{N}(A)=\mathfrak{N}(A^*)$。从而依定理 17，$\overline{\mathfrak{W}(A)}==\overline{\mathfrak{W}(A^*)}$。依定理 16 的証明可知存在部分等距算子 W，使 $A^*=WA$ 于是

$$A=A^{**}=(WA)^*=A^*W^*$$

这是因为一般对于兩个綫性算子 A，B，如果 A^*，B^* 存在并且 B 有界，

必有

$$(BA)^*=A^*B^*.$$

事实上，首先注意 $\mathfrak{D}(BA)=\mathfrak{D}(A)$，而由 $\overline{\mathfrak{D}(A)}=\mathfrak{H}$ 可知 BA 是稠定的，从而 $(BA)^*$ 存在。对于 $y\in\mathfrak{D}((BA)^*)$ 与任意 $x\in\mathfrak{D}(A)=\mathfrak{D}(BA)$，有

$$(Ax, B^*y)=(BAx, y)=(x, (BA)^*y),$$

所以 $B^*y\in\mathfrak{D}(A^*)$，并且 $A^*B^*y=(BA)^*y$，即 $(BA)^*\subset A^*B^*$。反之，設 $y\in\mathfrak{D}(A^*B^*)$，那末 $B^*y\in\mathfrak{D}(A^*)$，从而对于 $x\in\mathfrak{D}(A)=\mathfrak{D}(BA)$，

$$(BAx, y)=(Ax, B^*y)=(x, A^*B^*y),$$

即 $y\in\mathfrak{D}((BA)^*)$，并且 $(BA)^*y=A^*B^*y$，于是 $(BA)^*\supset A^*B^*$。

回到定理本身的証，注意

$$AA^*=A^*W^*WA,$$

但依定理 14，对于 $x\in\mathfrak{D}(A)$，$W^*WAx=Ax$，所以 $AA^*=A^*A$，証完。

系 为了对称綫性算子 A 是正規的，必須且只須它是自伴的。

証 充分性不待証。如果 A 是正規的，依定理 $\mathfrak{D}(A)=\mathfrak{D}(A^*)$，而因 $A\subset A^*$，可得 $A=A^*$。

下面討論由有界綫性算子構成一般算子的方法，这在下面常要用到。設 (M_k) 是 $\mathfrak{H}$ 中一組兩兩互相直交的閉綫性子空間，并設有 $\mathfrak{H}=\sum_{k=1}^{\infty}\oplus M_k$，即 $\mathfrak{H}$ 中每元 x 可以表示成强斂的級数 $x=\sum_{k=1}^{\infty}x_k$，$x_k\in M_k$。P_k 表示在 M_k 上面的投影，設 T_k 是定义在 M_k 中的有界綫性算子。今定义綫性算子 T 如下：設

$$\mathfrak{D}(T)=\left\{x: x\in\mathfrak{H}, \sum_{k=1}^{\infty}\|T_kP_kx\|^2<+\infty\right\}, \tag{18}$$

而对于 $x\in\mathfrak{D}(T)$，定义

$$Tx=\sum_{k=1}^{\infty}T_kP_kx. \tag{19}$$

于是 T 是定义在綫性子空間 $\mathfrak{D}(T)$ 上的綫性算子，我們用符号 $\sum_{k=1}^{\infty}\oplus T_k \equiv T_1\oplus T_2\oplus\cdots$ 表示 T。注意当 $x\in M_k$ 时，$P_i x=\Theta$ 如果 $i\neq k$，$P_k x=x$，从而 $x\in\mathfrak{D}(T)$ 并且 $Tx=T_kP_kx=T_kx$，即 T 在 M_k 上的限制等于 T_k。又因在(19)中用 P_ix 代替 x 等

$$TP_ix=\sum_{k=1}^{\infty}T_kP_kP_ix=T_iP_ix=P_i\sum_{k=1}^{\infty}T_kP_kx=P_iTx,$$

而这对每个 $x\in\mathfrak{H}$ 成立，由此可知 $TP_i\supset P_iT\,(i=1,2\cdots)$。

定理 19. 上述的綫性算子 T 是稠定算子，并且

$$T^*=\sum_{k=1}^{\infty}\oplus T_k^*.$$

如果每个 T_k 是正規的，T 也是正規的，并且它是唯一的限制在 M_k 上等于 T_k 的正規綫性算子。

証 1) $\overline{\mathfrak{D}(T)}=\mathfrak{H}$。事实上，每个 x 可以用一个有穷和 $\sum_{k=1}^{n}x_k$ $(x_k\in M_k)$ 任意逼近，而对于有穷和 $\sum_{k=1}^{n}x_k$，T 是有定义的。

2) 設 $T_1=\sum_{k=1}^{\infty}\oplus T_k^*$，$T_k^*$ 表示空間 M_k 中 T_k 的伴随算子，如果 $y\in\mathfrak{D}(T_1)$，那末对于每个 $x\in\mathfrak{D}(T)$，令 $P_kx=x_k$，有

$$(Tx,y)=\sum_{k=1}^{\infty}(T_kx_k,y)=\sum_{k=1}^{\infty}(P_kT_kx_k,y)=\sum_{k=1}^{\infty}(T_kx_k,P_ky)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k,T_k^*P_ky)=\left(x,\sum_{k=1}^{\infty}T_k^*P_ky\right)=(x,T_1y),$$

从而 $T_1\subset T^*$。反之，設 $z\in\mathfrak{D}(T^*)$，那末对于每个 $x\in\mathfrak{D}(T)$，$(Tx, z)=$
$=(x, T^*z)$，从而，利用 $\mathfrak{H}=\sum\limits_k\oplus M_k$，可知

$$\sum_k (T_kP_kx, P_kz)=\sum_k (P_kx, P_kT^*z),$$

特別令 $x=x_k\in M_k$，得

$$(T_kx_k, P_kz)=(x_k, P_kT^*z).$$

上式既然对于每个 $x_k\in M_k$ 成立，可知

$$T_k^*P_kz=P_kT^*z \ (\text{每个 } z\in\mathfrak{D}(T^*)).$$

由此，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|T_k^*P_kz\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\|P_kT^*z\|^2=\|T^*z\|^2<+\infty,$$

卽 $z\in\mathfrak{D}(T_1)$，从而 $\mathfrak{D}(T_1)\supset\mathfrak{D}(T^*)$。既然又証 $T_1\subset T^*$，必須 $T_1=T^*$。

3) 設每个 T_k 是 M_k 中的正規綫性有界算子。依定理 18，$\|T_kP_kx\|$
$=\|T_k^*P_kx\|$ 对于每个 $x\in\mathfrak{H}$ 成立，从而依上面的 2)，$\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{D}(T^*)$。
对于 $x\in\mathfrak{D}(T)$，依(19)，

$$\|Tx\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\|T_kP_kx\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\|T_k^*P_kx\|^2=\|T^*x\|^2,$$

从而依定理 18，T 是正規的。設 T_0 是一正規綫性算子，使 T_0 在 M_k 上的限制等于 T_k，那末，由于 T_0 是閉算子，并且对于 $x\in\mathfrak{D}(T)$，

$$\sum_{k=1}^{n}P_kx\to x,\quad T_0\sum_{k=1}^{n}P_kx=\sum_{n=1}^{n}T_kP_nx\to Tx \ (n\to\infty),$$

可知 $x\in\mathfrak{D}(T_0)$ 并且 $Tx=T_0x$，卽 $T\subset T_0$。但 $T\subset T_0\Longrightarrow T^*\supset T_0^*$，从而 $\mathfrak{D}(T^*)\supset\mathfrak{D}(T_0^*)$，而依定理 18，对于正規算子 T，T_0，$\mathfrak{D}(T)=$
$\mathfrak{D}(T^*)\supset\mathfrak{D}(T_0^*)=\mathfrak{D}(T_0)$，从而 $T\subset T\Longrightarrow T=T_0$，証完。

最后一部分实际上証明了下列系：

系　正規算子必是極大的，即它沒有眞正規延拓。

本节最后一部分略为介紹 $L^2(-\infty, \infty)$ 中的 Fourier 变式理論，作为保范算子理論的釋例。这里的敘述是依照 F. Riesz–Sz. Nagy[5] 的。

下面設 $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$, $L^2 = L^2(\alpha, \beta)$ 等于有穷区間 $[\alpha, \beta]$ 上的 $L^2 = L^2[\alpha, \beta]$ 或無穷区間 $(-\infty, +\infty)$ 上的 $L^2 = L^2(-\infty, +\infty)$。这种空間中的保范算子的特征曾由 Bochner 找出([1]):

定理 20(Bochner). 对于 L^2 中的每个保范算子 $y = Ux$ 存在兩个定义在开正方形 $\alpha < s < \beta$, $\alpha < t < \beta$ 上的函数 $K(s, t)$, $H(s, t)$, 使每个固定的 s, $K(s, t)$ $H(s, t) \in L^2$, 并且

$$\int_0^s y(\tau)d\tau = \int_\alpha^\beta \overline{K(s, t)}x(t)dt, \quad \int_0^s x(\tau)d\tau = \int_\alpha^\beta \overline{H(s, t)}y(t)dt. \tag{20}$$

这兩函数滿足下列条件:

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} \displaystyle\int_\alpha^\beta K\overline{(s, t)}K(\sigma, t)dt \\ \displaystyle\int_\alpha^\beta H(s, t)H(\sigma, t)dt \end{matrix}\right\} = \begin{cases} \min\{|s| \cdot |\sigma|\} & \text{如果 } s\sigma \geqslant 0, \\ 0 & \text{如果 } s\sigma \leqslant 0, \end{cases} \\ \displaystyle\int_0^\sigma K(s, t)dt = \int_0^s \overline{H(\sigma, t)}dt. \end{cases} \tag{21}$$

反之，每兩个滿足上述各条件的函数 H, K 必按照(20)产生 L^2 中的保范算子及其逆算子。

証　1) 設 U 是 L^2 中一个保范算子，定义兩函数 K, H 如下:

$$H(s, t) = (Ue_s)(t), \quad K(s, t) = (\overset{-1}{U}e_s)(t),$$

这里 $$e_s(t)=\begin{cases}\operatorname{sgn} s & \text{如果 } t \text{ 在以 } 0,\ s \text{ 为端点的区間之中}\\ 0 & \text{如果 } t \text{ 不在上述区間中}\end{cases}$$

既然 U, $\overset{-1}{U}$ 是等距的。

$$(y, e_s)=(Ux, e_s)=(x, \overset{-1}{U}e_s)(x_1e_s)=(\overset{-1}{U}y, e_s)=(y, Ue_s).$$

这就是(20)。取

$$x=\overset{-1}{U}e_\sigma,\ y=Ux=e_\sigma,$$

得

$$\int_\alpha^\beta \overline{K(s, t)}\,K(\sigma, t)dt=(\overset{-1}{U}e_\sigma,\ \overset{-1}{U}e_s)=(e_\sigma, e_s)=\int_\alpha^\beta \overline{e_s(t)}e_\sigma(t)dt=$$

$$=\begin{cases}\min\{|s|, |\sigma|\}, & \text{如果 } s\sigma\geqslant 0,\\ 0 & \text{如果 } s\sigma\leqslant 0.\end{cases}$$

再取 $$x=e_\sigma,\ \ y=Ue_\sigma,$$

便得(21)中的第二式。又

$$\int_0^\sigma K(s, t)dt=(\overset{-1}{U}e_s, e_\sigma)=(e_s, Ue_\sigma)=\int_0^s \overline{H(\sigma, t)}dt$$

2) 反之，設 K, H 是滿足定理中条件的函数。对于如上述的函数 $e_s(t)$, 定义算子 U, V 如下:

$$Ue_s(t)=H(s, t),\ Ve_\sigma(t)=K(\sigma, t).$$

由(21)得知

$$(Ve_s, Ve_\sigma)=\int_\alpha^\beta [\overline{K(\sigma, t)}\,K(s, t)]dt=\int_\alpha^\beta e_s(t)\overline{e_\sigma(t)}dt=$$

$$=(e_s, e_\sigma), \tag{22}$$

$$(Ue_s, Ue_\sigma)=(e_s, e_\sigma),\ (Ve_\sigma, e_s)=(e_\sigma, Ue_s).$$

設 $x(t)$ 是阶狀函数，它可以一意表示成有穷多个 $e_s(t)$ 的綫性組合，于是自然地把 U, V 的定义延拓到这种函数上来。于是不难看出对于阶狀函数 x, y, (22)仍成立，即

$$(Vx, Vy)=(x, y),\ (Ux, Uy)=(x, y),\ (Vx, y)=(x, Uy). \qquad (23)$$

于是 U, V 在它們現在的定义域 $\mathfrak{D}$（即一切阶狀函数的全体）上是等距的。既然 $\mathfrak{D}$ 在 L^2 中稠，U, V 可以按連續性延拓到全空間上去，使(23)仍成立。但既然(23)中第三式对于一切 $x, y\in L^2$ 成立，$U^*=V, V^*=U$, $U^*U=V^*V=I$。这說明 U 有左逆 U^*, 及右逆 V（因 $UV=V^*V=1$）从而有逆，并 $=U^*=V$。于是得知 U 确是保范的。依 U, V 的定义方式可知 K, H 正是証明 1) 中的那兩函数，并且 U, U^{-1} 的作用由(20)給出。証完。

考察一个特例：令

$$K(s, t)=\frac{\overline{x(st)}}{t},\quad H(s, t)=\frac{x(st)}{t},$$

并选擇函数 x 使 $\frac{x(t)}{t}\in L^2(\alpha, \beta)$, 并使对于任意 $s, \sigma\in(\alpha, \beta)$,

$$\int_\alpha^\beta \frac{\overline{x(st)}x(st)}{t^2}dt=\begin{cases}\min\{|\sigma|, |s|\} & \text{如果}\ \ \sigma s\geqslant 0,\\ 0 & \text{如果}\ \ \sigma s\leqslant 0.\end{cases}$$

于是上定理的諸条件都成立，因为(23)的最后一式利用积分变数代换 $\frac{st}{\sigma}=\tau$ 得出。于是

$$y(s)=\frac{\partial}{\partial s}\int_\alpha^\beta \frac{x(st)}{t}x(t)dt,\quad x(s)=\frac{\partial}{\partial s}\int_\alpha^\beta \frac{\overline{x(st)}}{t}y(t)dt \qquad (24)$$

定义 L^2 中的一个保范算子及其逆。(24) 叫做 Watson 的广义变换。特别取 $\alpha=-\infty, \beta=+\infty$, 并令

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-it}-1}{-i}$$

注意 $\frac{e^{-it}-1}{t}\in L^2(-\infty, \infty)$, 而

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(e^{ist}-1)(e^{i\sigma t}-1)}{t^2}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(s-\sigma)t-\cos st-\cos\sigma t+1}{t^2}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\{|s|+|\sigma|-|s-\sigma|\}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}du=$$

$$=\frac{1}{2}\{|s|+|\sigma|-|s-\sigma|\}=\begin{cases}\min\{|s|,|\sigma|\} & \text{如果 } s\sigma\geqslant 0,\text{①}\\ 0 & \text{如果 } s\sigma\leqslant 0.\end{cases}$$

于是得出下列定理，

定理 21. 由公式

$$y(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\int_{-n}^{n}e^{-its}x(s)ds,$$
$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\int_{-n}^{n}e^{its}y(s)ds \tag{25}$$

决定一个空間 $L^2(-\infty,+\infty)$中的保范算子及其逆。这里 $l.i.m.$(平均極限)是指把积分 $\int_{-n}^{n}$ 当作 t 的函数按 $L^2(-\infty,\infty)$ 收斂的極限。

証 依照上面一般的考慮，

$$y(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-its}-1}{-is}x(s)ds,\ x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{its}-1}{is}y(s)ds$$

决定一个保范算子 U 及其逆：$y=Ux,\ x=\overset{-1}{U}y$。令

① 見例如 Фихтенгольц 微积分教程，第二卷 §46。

$$x_n(t)=\begin{cases}x(t) & \text{如果}\ -n\leqslant t\leqslant n,\\ 0 & \text{如果}\ |t|>n\end{cases}$$

那末，令 $y_n=Ux_n$, 等

$$y_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dt}\int_{-n}^{n}\frac{e^{-its}-1}{-is}x(s)ds=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{-n}^{n}\frac{e^{-i(t+h)s}-e^{-its}}{-is}x(s)ds=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{h\to 0}\int_{-n}^{n}\frac{\sin\frac{hs}{2}}{\frac{hs}{2}}e^{-i\frac{hs}{2}}e^{-its}x(s)ds.$$

注意积分号下函数按絕对值不超过 $|x(s)|$，而 $|x(s)|$ 在有穷区間 $[-n, n]$ 上有和，从而按在积分号下取極限的定理，得

$$y_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}e^{-its}x(s)ds.$$

由于 $x_n(t)$ 平均(指在 $L^2(-\infty,\infty)$ 中)收斂于 $x(t)$, 而 U 是保范算子，可知 y_n 平均收斂于 y。这正是所要証的。第二式的証明也是一样的。

值得注意的是定理 21 中的算子 U 正是古典分析中所謂 Fourier 变式，由此我們可以从保范算子这一角度出發来研究 Fourier 变式的一些性質。在定理 21 中，我們还可以看出

$$(Ux)(t)=(\overset{-1}{U}x)(-t),$$

从而 $$(U^4x)(t)=(U^2U^2x)(t)=(U^2x)(-t)=x(t),$$

即 $U^4=1$。

又注意对于一般的 $x\in L^2(-\infty,\infty)$, (25) 不能写成

$$y(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-its}x(s)ds, \tag{26}$$

因为 $x(s)$ 不一定是在 $(-\infty, +\infty)$ 上可积分的，但对于 $x \in L^2(-\infty, +\infty) \cap L^1(-\infty, +\infty) = M$，(25)可以写成(26)的形式。注意 M 在 $L^2(-\infty, +\infty)$ 中稠，对于 $x \in M$，$x' \in M\left(x'(s) = \frac{d}{ds}x(s)\right)$，如果 $x(t)$ 連續，$y = Ux$ 由(26)表示，那末

$$Ux' = isy(s).$$

事实上

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n} e^{-ist}x(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-ist}x(t)}{-is}\right]_{t=-n}^{n} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n} e^{-ist}\frac{1}{is}\frac{dx(t)}{dt}dt.$$

由于 $x(t) \in L(-\infty, +\infty)$ $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = 0$，从而依假定，当 $n\to\infty$ 时，得

$$y(s) = \frac{1}{-is}Ux'.$$

同理可証，当 $y(s)$，$sy(s)$ 都 $\in M$ 时，如果 $x = \overset{-1}{U}y$，那末

$$\overset{-1}{U}(+isy(s)) = \frac{dx(t)}{dt}.$$

習 題 一

1．設 $x_1, x_2, \in L^2(-\infty, \infty)$，而用 $y_i = Ux_i (i=1,2)$ 表示

$$y_i(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underset{n\to\infty}{l.i.m.} \int_{-n}^{n} e^{+ist}x_i(t)dt, \quad (i=1,2).$$

求証:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_1(s)\overline{y(s)}ds = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\overline{x_2(t)}xt;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_1(s)y_2(-s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)dt;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_1(s-\sigma)y_2(\sigma)d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)e^{ist}dt;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_1(s)y_2(s)e^{-i\sigma s}ds = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\sigma-t)x_2(t)dt.$$

2. 为了有界綫性算子T是正規的，必須且只須T可以表示成如下形狀:

$$T=A+iB,$$

这里A, B是对称有界綫性算子，并且$AB=BA$。

3. 有界正規綫性算子T滿足下列关系: $\|T^2\|=\|T\|^2$。

4. 对每个正自伴綫性算子A，恰存在一个正自伴綫性算子B，使$A=B^2$。

5. 設$\mathfrak{H}=L^2(-\infty,+\infty)$。如果对称閉綫性算子$A$把实值函数映成实值函数，并且$x\in\mathfrak{D}(A)\Longrightarrow\overline{x(t)}\in\mathfrak{D}(A)$，那末它必有自伴延拓。

6. 設$\mathfrak{H}=(l^2)$，如果对称算子A把实数列$(\xi_n)\in(l^2)$映成实数列，并且$(\xi_n)\in\mathfrak{D}(A)\Longrightarrow(\bar{\xi}_n)\in\mathfrak{D}(A)$，那末$A$必有自伴延拓。

7. 設$A_2(G)$表示定义在复数平面的区域G上并滿足条件:

$$\iint_G |x(\zeta)|^2 d\xi d\eta < +\infty \quad (\zeta\equiv\xi+i\eta)$$

的單值正則函数$x(\zeta)$的全体定义

$$(x+y)(\zeta)=x(\zeta)+y(\zeta),\ (\alpha x)(\zeta)=\alpha x(\zeta),$$

$$(x,y)=\iint_G x(\zeta)\overline{y(\zeta)}d\xi d\eta.$$

求証$A_2(G)$是 Hilbert 空間。特别設G表示复数平面中的單位圓$|\zeta|<1$，求証

$$Tx=y: x(\zeta)\in A_2(G),\ y(\zeta)\equiv\zeta x(\zeta)\in A_2(G)$$

决定一个对称綫性算子。求証

$$T_1x=y: y(\zeta)=x'(\zeta)$$

决定一个綫性算子。試求T_1的伴隨算子。

参 考 文 献

[1] Bochner, S.: Inversion formulae and unitary transformations, Ann. Math. 35 (1934), 111—115.

[2] Friedrichs, K.: Spektral theorie halbbeschränkter Operatoren, Math. Ann. 109 (1934), 465—487, 687—713, 110 (1935), 777—779.

[3] Михлин, С. Г.: Проблема минимума квадратичного функционала, 1952.

[4] Наймарк, М. А.: Линейные дифференциальные операторы, 1954.

[5] Riesz, F. et Szökefalvi-Nagy, B.: Leçons d'analyse fonctionnelle.

§2. 自伴綫性算子的譜分解

本节証明自伴綫性算子的譜分解，由于这个定理的重要性，它的証明有很多，不下十余种，这里介紹的乃是 J. von Neumann 的証法，即先作出保范算子的譜分解，然后利用 Cayley 变式求出自伴綫性算子的譜分解来。关于其他种的証明，可以参看 F. Riesz–Sz Nagy [4]，Cooke[1]以及原来論文。

在第三章 §4 中曾引入 Hilbert 空間中（直交）投影的概念。每个投影有一相应的(閉綫性)子空間，如果与投影 P_1, P_2 相应的子空間有下列关系:

$$M_1=\{x\,|\,x=P_1x,\ x\in\mathfrak{H}\}\subset\{x\,|\,x=P_2x,\ x\in\mathfrak{H}\}=M_2,$$

我們表示成 $P_1\leqslant P_2$，为了 $P_1\leqslant P_2$，必須且只須 $P_1P_2=P_2P_1=P_1$。事实上，設 $P_1\leqslant P_2$，那末对于每个 $x\in\mathfrak{H}$，$P_1x\in M_1\subset M_2$，从而 $P_2P_1x=P_1x$，于是 $P_2P_1=P_1$。由于 $M_1\subset M_2$，可知 $M_1^\perp\supset M_2^\perp$，而既然 $x=P_2x+(x-P_2x)$，$x-P_2x\in M_2^\perp\subset M_1^\perp$，所以 $P_1x=P_1P_2x$，卽 $P_1=P_1P_2$。反之，設 $P_1P_2=P_2P_1=P_1$，那末如果 $x=P_1x$，必然 $P_2x=P_2P_1x=P_1x=x$，卽 $M_1\subset M_2$。

注意如果 $P_1\leqslant P_2$，那末 $P_2x=P_1x+(P_2-P_1)x$，而 $P_1(P_2-P_1)=0$，从而 $(P_2x,x)=(P_1x,x)+((P_2-P_1)x,x)\geqslant(P_1x,x)$。反之，設 $(P_2x,x)\geqslant(P_1x,x)$ 对每个 $x\in\mathfrak{H}$ 成立，那末 $\|P_1x\|^2\leqslant\|P_2x\|^2$，从而 $P_2x=\Theta\Longrightarrow P_1x=\Theta$，这就是說 $M_2^\perp\subset M_1^\perp$，卽 $M_1\subset M_2$。这証明了 $P_1\leqslant P_2$。由此可知这里規定的投影算子的序次，与对一般有界对称綫性算子所定义的一致。

定理 1. 設有一族投影 $\{E(\lambda)\}(-\infty<\lambda<+\infty)$，使

$$\lambda\geqslant\mu\Longrightarrow E(\lambda)\geqslant E(\mu),$$

那末对于任意一單調实数列 $\{\lambda_n\}$ ($\lambda_n\uparrow$ 或 $\lambda_n\downarrow$)，强極限

$$\lim_{n\to\infty}E(\lambda_n).$$

存在，換句話說，对于每个 $x\in\mathfrak{H}$,

$$\lim_{n\to\infty} E(\lambda_n)x$$

按 $\mathfrak{H}$ 的范数收斂于一極限，表示成 Ex, E 也是 $\mathfrak{H}$ 中投影算子。这極限算子按照 $\lambda_n\uparrow+\infty$, $\lambda_n\uparrow\lambda$, $\lambda_n\downarrow\lambda$, $\lambda_n\downarrow-\infty$ 的四种情形各表示成 $E(+\infty)$, $E(\lambda-0)$, $E(\lambda+0)$, $E(-\infty)$。

証 令 $E(\alpha,\beta]=E(\beta)-E(\alpha)(\alpha<\beta)$. 那末 $E(\alpha,\beta]$ 仍是自伴有界綫性算子，并且由于 $E(\beta)\geqslant E(\alpha)$, $E(\beta)E(\alpha)=E(\alpha)E(\beta)=E(\alpha)$, 所以

$$E(\alpha,\beta]^2=E(\alpha,\beta],$$

从而 $E(\alpha,\beta]$是投影。考察 $\lambda_n\uparrow$ 的情形，当 $m>n$ 时，

$$E(\lambda_m)-E(\lambda_n)=\sum_{i=n}^{m-1}E(\lambda_i,\lambda_{i+1}].$$

不难驗明，右边和中諸項每兩不同項相乘$=0$, 从而当 $i\neq j$ 时

$$(E(\lambda_i,\lambda_{i+1}]x, E(\lambda_j,\lambda_{j+1}]x)=0.$$

于是由投影的性質及"勾股定理"，对于任意 $x\in\mathfrak{H}$,

$$\|x\|^2\geqslant\|E(\lambda_n,\lambda_m]x\|^2=\sum_{i=n}^{m-1}\|E(\lambda_i,\lambda_{i+1}]x\|^2.$$

由此正項級数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\|E(\lambda_i,\lambda_{i+1}]x\|^2$ 收斂。于是当 $n, m\to\infty$ 时，

$$\|E(\lambda_n)x-E(\lambda_m)x\|\to 0$$

这意味着强極限 $\lim\limits_{n\to\infty}E(\lambda_n)x$ 存在，今表示成 Ex。E 是綫性算子。今証明，当 $\lambda_n\uparrow\lambda$ 时，E 只依賴于 λ, 而与收斂于 λ 的上升列 $\{\lambda_n\}$ 的选擇無关。事实上，設 τ_n 也 $\uparrow\lambda$, 而令 $\lim\limits_{n\to\infty}E(\tau_n)=E'$, 那末把$\{\lambda_n\}$与$\{\tau_n\}$合并成一个上升列 $\{\sigma_n\}$, 使 $\sigma_n\uparrow\lambda$, 而令 $E''=\lim\limits_{n\to\infty}E(\sigma_n)$。$\{E(\sigma_n)\}$ 的子列 $\{E(\lambda_n)\}$, $\{E(\tau_n)\}$ 也必强斂于 E'', 从而 $E=E'=E''$。于是用 $E(\lambda-0)$ 表示。由于 $E(\lambda_n)^2=E(\lambda_n)=E(\lambda_n)^*$, 不難看出 $E(\lambda-0)$也滿足这些条

件，因为例如 $\|E(\lambda_n)^2x-E(\lambda-0)^2x\| \leqslant \|E(\lambda_n)E(\lambda_n)x-E(\lambda-0)E(\lambda_n)x\|+\|E(\lambda-0)[E(\lambda_n)x-E(\lambda-0)x]\|\to 0$（对每个 $x, n\to\infty$），从而 $E(\lambda_n)^2$ 的强極限是 $E(\lambda-0)^2$ 等等。这説明 $E(\lambda-0)$是投影，其他三种情形也可以一样处理，証完。

系 任意單調的投影算子列必强斂于一个投影算子。

証 已在定理的証明中叙述了。

定义 1. Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 中的投影族 $\{E(\lambda)\}$ $(-\infty<\lambda+\infty)$ 叫做單位分解或譜族，是指

1) $\lambda\leqslant\mu\Longrightarrow E(\lambda)\leqslant E(\mu)$;

2) $E(\lambda+0)=E(\lambda)$（右連續性）;

3) $E(-\infty)=0, E(+\infty)=I$.

定理 2. 設$\{E(\lambda)\}$是單位分解，那末对于任意元 $x, y\in\mathfrak{H}$，实变量 λ 的复数值函数 $\varphi(\lambda)\equiv(E(\lambda)x, y)$是囿变函数。

証 設 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n$，那末

$$\sum_{j=1}^{n-1}|\varphi(\lambda_{j+1})-\varphi(\lambda_j)|=\sum_{j=1}^{n-1}|(E(\lambda_{j+1})x, y)-(E(\lambda_j)x, y)|=$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}|(E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]x, y)|=$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}|(E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]x, E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]y)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}\|E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]x\|\cdot\|E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]\|y\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{j=1}^{n-1}\|E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]x\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\|E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]y\|^2\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=(\|E(\lambda_1, \lambda_n]x\|^2)^{\frac{1}{2}}(\|E(\lambda_1, \lambda_n]y\|^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant\|x\|\cdot\|y\|.$$

証完。

我們首先定义有界函数按一个單位分解成譜族的"积分"。对于任意有穷或無穷区間 Δ, 我們定义 $E(\Delta)$如下:

$$\Delta=[\alpha,\beta]:\quad E(\Delta)=E(\beta)-E(\alpha-0);$$
$$\Delta=(\alpha,\beta):\quad E(\Delta)=E(\beta-0)-E(\alpha);$$
$$\Delta=(\alpha,\beta]:\quad E(\Delta)=E(\beta)-E(\alpha);$$
$$\Delta=[\alpha,\beta):\quad E(\Delta)=E(\beta-0)-E(\alpha-0).$$

由于当 $\alpha<\beta$ 时:

$$(E(\beta)-E(\alpha-0))^2=E(\beta)-E(\alpha-0)-E(\alpha-0)+$$
$$+E(\alpha-0)=E(\beta)-E(\alpha-0)$$
以及其他相似等式，可知 $E(\Delta)$ 是投影算子。不难看出，$E(\Delta)E(\Delta')=E(\Delta\cap\Delta')$。如果 $\Delta\cap\Delta'=\phi$, 不难看出 $E(\Delta)$ 与 $E(\Delta')$相互直交。即

$$E(\Delta)E(\Delta')=0.$$

由此可知，当Δ可以分解成至多可数多个互不相交的子区間 Δ_1, Δ_2, $\cdots$ 时，$E(\Delta)=\sum\limits_k E(\Delta_k)$, 这里無穷和了解成有穷和所組成的單調列的强極限。如果 $\Delta=(-\infty,+\infty)$, 那末 $E(\Delta)=I$。

設 $f(\lambda)$ 是有界的阶狀函数，即指存在把数直綫$(-\infty,\ +\infty)$分成至多可数多个互不相交的区間$\{\Delta_k\}$的分割 $\mathscr{P}$, 使在每个区間 Δ_k 上，$f(\lambda)$取常数值 r_k, 并且$\{r_k\}$是有界数列: $|r_k|\leqslant\alpha$。这用(考可数無穷的情形)

$$\sum_{k=1}^{\infty}r_kE(\Delta_k)\tag{1}$$

强斂于一个有界綫性算子，因为由諸 $E(\Delta_k)$的兩兩直交，及 $\Sigma E(\Delta_k)=$ $=I$ 可知

$$\|\sum_{k=m+1}^{n} r_k E(\Delta_k)x\|^2=$$

$$=\sum_{k=m+1}^{n}|r_k|^2\|E(\Delta_k)x|^2\leqslant\alpha^2\sum_{k=m+1}^{n}\|E(\Delta_k)x\|^2=$$

$$=\alpha^2\left[\|\sum_{k=1}^{n}E(\Delta_k)x\|^2-\|\sum_{k=1}^{m}E(\Delta_k)x\|^2\right]\to 0(n,\ m\to\infty),$$

从而(1)确是强斂的，强斂的有界綫性算子列的極限(1)仍是有界綫性算子，我們把它表示成

$$f(E)\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)dE(\lambda)\equiv\sum_k r_k E(\Delta_k),\qquad(2)$$

$$f(\lambda)\equiv\sum_k r_k x_{\Delta k}(\lambda),$$

这里 $x_{\Delta k}$ 表示区間 Δk 的特征函数。由于

$$\|\sum_{k=1}^{\infty}r_k E(\Delta_k)x\|^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|r_k|^2\|E(\Delta_k)\|^2\leqslant$$

$$\leqslant\alpha^2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\|E(\Delta_k)x\|^2=\alpha^2\|x\|^2,$$

可知算子(2)的范数 $\leqslant\alpha$, 算子 $f(E)$ 只依賴于譜族 $(E(\lambda))$ 及函数 f, 而与函数 f 的表示形式的选擇無关，因为如果每个 Δ_k 又分解成至多可数多可区間 Δ_{kl} 之幷,那末

$$f(\lambda)=\sum_{k,l}r_k x_{\Delta kl}(\lambda)$$

从而

$$f(E)=\sum_{k,l}r_k E(\Delta_{kl})=\sum_k r_k\sum_l E(\Delta_{kl})=\sum_k r_k E(\Delta_k).$$

这样定义的、与阶狀有界函数 $f(\lambda)$ 相应的算子 $f(E)$ 具有下列性質:（这里先假定下面每个函数都是有界复值阶狀函数）

$1^\circ f(\lambda)\equiv 0 \Longrightarrow f(E)=0,\ f(\lambda)\equiv 1 \Longrightarrow f(E)=I$;

$2^\circ f(\lambda)=\alpha_1 f_1(\lambda)+\alpha_2 f_2(\lambda) \Longrightarrow f(E)=\alpha_1 f_1(E)+\alpha_2 f_2(E)$;

$3^\circ f(\lambda)=f_2(\lambda)\cdot f_2(\lambda) \Longrightarrow f(E)=f_1(E)\cdot f_2(E)$;

$4^\circ (f(E))^*=\bar{f}(E)$, $\bar{f}(\lambda)$表示 $f(\lambda)$的共軛复数。

5°特別由 $4^\circ 3^\circ$ 可知 $f(E)$是正規綫性算子，幷且

$$\|f(E)\| \leqslant \sup_{-\infty<\lambda<+\infty} |f(\lambda)|$$

如果 f 是实值的，$f(E)$是对称算子。如果 $f(\lambda)\geqslant 0$，那末 $f(E)$是正算子。

6° $f(E) vv E$，即对于与每个 $E(\lambda)$交換的有界綫性算子 B，必然 $f(E) v B$ 即 $f(E)$与 B 交換。

7° 对于每个 $x, y \in \mathfrak{H}$

$$(f(E)x, y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d(E(\lambda)x, y),$$

$$\|f(E)x\|^2=\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2,$$

上兩式右边都表示平常的 Stieltjes 积分。

8° 如果 f_n 是一串一致有界的，收斂于 $f(\lambda)$ 的函数列，那末 $f_n(E)$ 强斂于 $f(E)$。

1° 不待証。設

$$f_1(\lambda)=\sum r_k x_{\Delta_k}(\lambda),\quad f_2(\lambda)=\sum r'_k x_{\Delta'_k}(\lambda), \tag{3}$$

那末

$$\alpha_1 f_1(E)+\alpha_2 f_2(E)=\alpha_1 \sum r_k E(\Delta_k)+\alpha_2 \sum r'_k E(\Delta'_k)=$$

$$=\alpha_1 \sum_{k,l} r_k E(\Delta_k \cap \Delta'_l)+\alpha_2 \sum_{k,l} r'_l E(\Delta_k \cap \Delta'_l)=$$

$$=\sum (\alpha_1 r_k+\alpha_2 r'_l) E(\Delta_k \cap \Delta'_l)=f(E).$$

如果 $f_l(\lambda)=f_1(\lambda)\cdot f_2(\lambda)$, f_1, f_2 如(3), 那末

$$f_1(E)f_2(E)=\Sigma r_k E(\Delta_k)\cdot\Sigma r_l' E(\Delta_l')=$$
$$=\Sigma r_k r_l' E(\Delta_k\cap\Delta_l')=f(E).$$

4°5°6° 都不待証。7° 只是把下列級数表示成 Stieltjes 积形狀:

$$(f(E)x, y)=\left(\sum r_k E(\Delta_k)x, y\right)=\sum_k r_k(E(\Delta_k)x, y),$$

$$\|f(E)x\|^2=(f(E)x, f(E)x)=\left(\sum_k r_k E(\Delta_k)x, \sum_l r_l E(\Delta_l)x\right)=$$
$$=\sum_{k,l} r_k\bar{r}_l(E(\Delta_k)x, E(\Delta_l)x)=$$
$$=\sum_k |r_k|^2(E(\Delta_k)x, x).$$

8° 乃是 Lebesgue–Stieltjes 积分的在积分号下求極限定理的后果,因为这里設 $\{f_n\}$ 是一致有界的,而常数函数在$(-\infty, +\infty)$上按圍变函数$\|E(\lambda)x\|^2$可积分。

現在考察$(-\infty, +\infty)$上一致連續且有界的复値函数 $f(\lambda)$。对于任意正数 $\delta>0$, 可取$(-\infty, +\infty)$的一个可数分割。

$$\mathscr{P}:\ (-\infty, +\infty)=\bigcup_k \Delta_k,\ k\neq j\Longrightarrow\Delta_k\cap\Delta_j=\phi,$$

使在每个区間 Δ_k 中, $f(\lambda)$的摆动不超过 δ:

$$\sup_{\lambda',\lambda''\in\Delta_k}|\rho(\lambda')-f(\lambda'')|\leqslant\delta.$$

对于这个分割,取 $\lambda_k\in\Delta_k$, 作算子

$$\sigma_{\mathscr{P}}=\sum_k f(\lambda_k)E(\Delta_k).$$

这正是按上述与阶狀函数

$$f(\lambda)=\sum_k f(\lambda_k)x_{\Delta_k}(\lambda)$$

相应的算子。取任意兩可数分割 $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2 \succ \mathscr{P}$，并随意取相应的 λ_k，那末令 $\mathscr{P}_3=\mathscr{P}_1\cup\mathscr{P}_2$ 表示由 $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2$ 的分点形成的分割，不难看出

$$\|\sigma_{\mathscr{P}_1}-\sigma_{\mathscr{P}_2}\|^2\leqslant\delta^2\sum_k\|E(\Delta_k^{(3)})\|^2=\delta^2,$$

从而随意取兩串如上的分割$(\mathscr{P}_n)$, $(\mathscr{P}_n')$, 只要令

$$\mu(\mathscr{P})\equiv\sup_k \operatorname{mes}\Delta_k^{(n)}\to 0,$$

$$\mu(\mathscr{P}_n')\equiv\sup_k \operatorname{mes}\Delta_k^{(n)'}\to 0,$$

并且随意取相应的 $\lambda_k^{(n)}\in\Delta_k^{(n)}$, $\lambda_k^{(n)}\in\Delta_k^{(n)'}$, 相应的$(\sigma_{\mathscr{P}_n})$, $(\sigma_{\mathscr{P}_n'})$在 $\mathfrak{S}(\mathfrak{H})$中收斂于同一極限。我們把这一極限表示成

$$f(E)=\lim_n\sigma_{\mathscr{P}_n}.$$

它可以看做 $=\lim f_n(E)$, f_n 是任意一串一致收斂于一致連續且有界的复値函数 $f(\lambda)$ 的有界阶狀函数列。由于上述性質 1°—6° 在取極限的运算下仍保持，它們对于一致連續且有界的复函数 $f(\lambda)$ 仍成立。由于

$$(f(E)x,y)=(\lim_n f_n(E)x,y)=\lim_n(f_n(E)x,y)=$$

$$=\lim_n\int_{-\infty}^{\infty}f_n(\lambda)d(E(\lambda)x,y)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d(E(\lambda)x,y),$$

$$\|f(E)x\|^2=\|\lim_{n\to\infty}f_n(E)x\|^2=\lim_{n\to\infty}\|f_n(E)x\|^2=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x\|^2=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x\|^2.$$

这里只用到平常 Stieltjes 积分号下按一致收斂取極限的定理，从而性質 7° 也是一般一致連續且有界的函数 $f(\lambda)$所具有的。8° 的証明也不难。

設 $f(\lambda)$ 是 Baire 第一类有界函数：$|f(\lambda)|\leqslant a\ (-\infty<\lambda<+\infty)$，取一列一致連續的函数 $f_n(\lambda)$，使$|f_n(\lambda)|\leqslant a(-\infty, +\infty)$，而 $f_n(\lambda)\to f(\lambda)$(每个 λ)。由于

$$\lim_{m,n\to\infty}(f_n(\lambda)-f_m(\lambda))=0,$$

利用 8° 可知 $\lim\limits_{n,m\to\infty}(f_n(E)-f_m(E))=0$。于是$(f_n(E))$强斂，并且極限算子的范数$\leqslant a$。用同样方法可以証明極限算子，只依賴于原来的函数 f，而不依賴于收斂于 f 的連續函数列 (f_n) 的选擇。这个極限算子表示成

$$f(E)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)dE(\lambda),$$

并且不难驗証 $f(E)$仍满足上述的条件 1°—8°，只是在 1° 中这时必須考察 Lebesgue-Stieltjes 积分而已。

用同样推理，由 Baire 第一类函数可轉向 Barie 第二类……，从而对于任意 Baire 类函数 f, $f(E)$有定义，并且是满足 1°—8° 的綫性算子。

由于 Barie 类的函数与 Borel 可測函数是同义的，① $f(E)$ 对一切

① 見，例如 Ch. de la Vallee Poussin: Integrates de Lebesgue fonctions d'ensemble, classes de Baire, 1934, p, 39。这里把証明的大意略述如下。Borel 可測集的特征函数是 Baire 类函数。为此，只須証閉集 F 的特征函数 χ_F 是 Baire 类函数。設 $r==\mathrm{dist}(\lambda,F)$，那末 $r(\lambda)=0\Longleftrightarrow\lambda\in F$，而 $\chi_F(\lambda)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+nr(\lambda)}$，从而 $\chi_F=$是 Baire 第一类的。Borel 可測函数 $\varphi(\lambda)$是 Baire 类的。只須考有界函数的情形，因無界函数 $\varphi(\lambda)$乃是有界函数 $\varphi^{(n)}(\lambda)=\min(\max(\varphi(\lambda),-n),n)$的極限$(n\to\infty)$，而 $\varphi^{(n)}$是 Borel 可測的。今設 φ 有界，从而存在正数 M，使$|\varphi(\lambda)|\leqslant M$。把$[-M,M]$分成 $-M<a_1<a_2<\cdots<a_{n+1}=M$，使 $a_{i+1}-a_i<\varepsilon$。設 χ_i 表示集 $E(a_i\leqslant\varphi_i<a_{i+1})$的特征函数。如果 $\varepsilon\to0$，φ 是 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\chi_i$ 的極限，从而 φ 是 Baire 类的。

有界 Borel 可测函数 f 有定义。由于 Borel 可测函数对于一切 Lebesgue-Stieltjes 测度可测，我們也可以用另一方式引出算子 $f(E)$ 来。設 $f(\lambda)$ 是有界的 Borel 可测函数，那末它对于每个由囿变函数 $(E(\lambda)x, y)$ $(x, y\in\mathfrak{H})$ 所定义的 Lebesgue-Stieltjes 测度 $\mu(x, y)$ 是可测的，从而按每个 $\mu(x, y)$ 可积分。积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)d(E(\lambda)x, y)\equiv\varphi_x(y)$$

对于固定的 $x\in\mathfrak{H}$ 是 y 的加法泛函数。令 $\sup\limits_{-\infty<\lambda<+\infty}|f(\lambda)|=\alpha$，那末由 Lebesgue-Stieltjes 积分的性質及定理 2,

$$|\varphi_x(y)|\leqslant\alpha\|x\|\|y\|,$$

因为囿变函数 $(E(\lambda)x, y)$ 的全变分 $\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$。这說明 φ_x 是 $\mathfrak{H}$ 上的有界綫性泛函数，依 Riesz 定理，存在一元 x^*，使

$$\varphi_x(y)=(y, x^*).$$

由关系 $x^*=Tx$ 决定一个 $\mathfrak{H}$ 中的算子，而由于

$$(Tx, y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)d(E(\lambda)x, y), \tag{4}$$

T 是綫性算子。由

$$\|Tx\|^2=(Tx, Tx)=\varphi_x(Tx)\leqslant\alpha\|x\|\|Tx\|,$$

可知 $\|Tx\|\leqslant\alpha\|x\|$，即 T 是有界的，我們用符号

$$T\equiv\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)dE(\lambda)$$

表示这样定义出来的有界綫性算子 T。由(4)与前面的性質 7° 相比較可知这个 T 即以前所定义的 $f(E)$(f 是任意有界 Borel 可测函数)。

定理 3. 为了 $f(E)$ 是投影算子，必須且只須 $f(\lambda)$ 对每个测度 $\mu(x, y)$ 殆遍只取 0 与 1 兩个值，換句話說，必須且只須对每个 $\mu(x, y)$

殆遍滿足 $f(\lambda)=[f(\lambda)]^2$。特别 $f(E)=0$ 必須且只須 f 对每个 $\mu(x,y)$ 殆遍等于 0，而为了 $f(E)$ 是保范的，必須且只須对每个 $\mu(x,y)$ 殆遍（"对每个 $\mu(x,y)$ 殆遍"以下簡称按 $(E(\lambda))$ 殆遍）$|f(\lambda)|=1$。

証 由于 $f(\lambda)=[f(\lambda)]^2$，故可知按 $(E(\lambda))$ 殆遍 $f(\lambda)\geqslant 0$，从而依性質 4°，$f(E)$ 是自伴的，依 3° 可知 $f(E)^2=f(E)$，从而 $f(E)$ 是投影算子。反之，設 $f(E)$ 是投影算子，那末对于每个 x，依 7°，

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)-[f(\lambda)]^2|^2 d(E(\lambda)x,x)=$$

$$=\|[f(E)-f(E)^2]x\|^2=0,$$

从而 $f(\lambda)=[f(\lambda)]^2$ 按 $(E(\lambda))$ 殆遍成立。

依 4° 及 3° 可知为了 $f(E)$ 是保范算子，即为了 $f(E)^*=f(E)^{-1}$。必須且只須按 $(E(\lambda))$ 殆遍 $\bar{f}(\lambda)=1/f(\lambda)$，即 $|f(\lambda)|=1$。証完。

現在考察 $f(\lambda)$ 是一般（不假定有界）的 Borel 可測函数的情形。

定义
$$p_k(\lambda)=\begin{cases}1 & \text{如果 } k-1\leqslant|f(\lambda)|<k,\\ 0 & \text{在其他情形。}\end{cases}$$

令 $p^{(n)}(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}p_k(\lambda)$，$p_k$ 都是有界的 Borel 可測函数，从而 $p_k(E)$ 有定义。依 3° 与定理 3 可知 $p_k(E)$ 是一組兩直交的投影算子；$p_k(E)p_j(E)=0(k\neq j)$ 由于 $\lim_{n\to\infty}p^{(n)}(\lambda)=1$（按 $(E(\lambda))$ 殆遍成立）可知强極限 $\lim_{n}p^{(n)}(E)=I$。設 M_k 是与 $P_k(E)$ 相应的閉綫性子空間、$M_k=P_k(E)\mathfrak{H}$，不难看出 $\mathfrak{H}$ 是諸 M_k 的直交和：$\mathfrak{H}=\sum_{k=1}^{\infty}\oplus M_k$，即 $\mathfrak{H}$ 中每个元可以表示成 $x=\sum_{k=1}^{\infty}x_k$，$x_k\in M_k$。

既然 $f_k(\lambda)=p_k(\lambda)f(\lambda)$ 是有界 Borel 可測函数，$f_k(E)$ 有意义。依

6° 可知 $p_k(E)$ 与 $f_k(E)$交换，从而

$$f_k(E)M_k=f_k(E)p_k(E)\mathfrak{H}=$$
$$=p_k(E)f_k(E)\mathfrak{H}\subset p_k(E)\mathfrak{H}=M_k.$$

把 $f_k(E)$限制在 M_k 上，設所得的有界綫性算子表示成 T_k。那末由 4° 知 T_k 是正規的。設 $T=\sum\oplus T_k$ 是按 § 1 定理 19，定义在 $\mathfrak{H}$ 中的綫性算子。我們定义 T 作为 $f(\lambda)$按譜族$(E(\lambda))$的积分：

$$T=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)dE(\lambda).$$

依 § 1，$\mathfrak{D}(T)$由滿足下列条件的元 $x=\sum_{k=1}^{\infty}x_k(x_k\in M_k)$組成：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|T_kx_k\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k(E)p_k(E)x\|^2=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f_k(\lambda)p_k(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x\|^2=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2p_k(\lambda)d\|E(\lambda)x\|^2=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2p^{(n)}(\lambda)d\|E(\lambda)x\|^2<+\infty.$$

即[1]

$$\mathfrak{D}(T)=\left\{x\,\middle|\,x\in\mathfrak{H}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x\|^2<+\infty\right\}.$$

如果 $x\in\mathfrak{D}(T)$，那末

① 見 Натансон 实变函数論，第 6 章 § 2 定理 5。

$$\|Tx\|^2=\|f(E)x\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x\|^2,$$

并且
$$Tx=f(E)x=\sum_{k=1}^{\infty}T_kx_k=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(E)p_k(E)x,$$

$$T^*x=f(E)^*x=\sum_{k=1}^{\infty}T_k^*x_k=\sum_{k=1}^{\infty}(f_k(E)p_k(E))^*x=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\bar{f}_k(E)p_k(E)x=\bar{f}(E)x.$$

于是由§1定理19，T 是正規的，并且是唯一的限制在 M_k 上等于 T_k 的正規綫性算子。显然 $\mathfrak{D}(T^*)=\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{D}(\bar{f}(E))$，即

$$f(E)^*=T^*=\bar{f}(E).$$

对 $x\in\mathfrak{D}(T)$，$y\in\mathfrak{H}$，

$$(f(E)x,y)=\sum_{1}^{\infty}(f_k(E)p_k(E)x,y)=$$

$$=\sum_{1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_k(\lambda)p_k(\lambda)d(E(\lambda)x,y)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)p^{(n)}(\lambda)d(E(\lambda)x,y),$$

从而，在积分号下取極限，

$$(f(E)x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d(E(\lambda)x,y).$$

上述在积分号下取極限是合法的，因为 $|f(\lambda)\,p^{(n)}(\lambda)|\leqslant|f(\lambda)|$，而 $|f(\lambda)|$ 按照 $(E(\lambda)x,y)$ 的全变分是有和的。事实上，如果把这个变分表

示成 $\rho(\lambda)\equiv\rho_{(x,y)}(\lambda)$，前面已經(定理 2)証明 $\rho(\beta)-\rho(\alpha)\leqslant\|E(\Delta)x\|\cdot\|E(\Delta)y\|$，这里 $\Delta=(\alpha,\beta]$。令 μ_ρ,μ_x,μ_y 各表示由囿变函数 $\rho(x,y)$，$\|E(\lambda)x\|^2$，$\|E(\lambda)y\|^2$ 决定的 Lebesgue-Stieltjes 測度。对于簡單阶狀函数 $\varphi(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}r_i x_{\Delta_i}(\lambda)$，$x_{\Delta_i}(\lambda)$表示区間$(\alpha_i,\beta_i]$的特征函数，

$$\sum_i|r_i|[\rho(\beta_i)-\rho(\alpha_i)]\leqslant\sum_i|r_i|\,\|E(\Delta_i)x\|\,\|E(\Delta_i)y\|\leqslant$$

$$\leqslant\Big\{\sum_i|r_i|^2\|E(\Delta_i)x\|^2\sum_i\|E(\Delta_i)y\|^2\Big\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$\leqslant\Big\{\sum_i|r_i|^2[\|E(\beta_i)x\|^2-\|E(\alpha_i)x\|^2]\Big\}^{\frac{1}{2}}\|y\|$$

从而 $$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\lambda)|d\rho(\lambda)\leqslant\Big[\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x\|^2\Big]^{\frac{1}{2}}\|y\|.$$

对于一般的按 $\|E(\lambda)x\|^2$(一切 x)平方可积分的函数 $f(\lambda)$，它可以看作可积分阶狀函数的極限，从而由上述不等式取極限，便得 $(x\in\mathfrak{D}(T))$：

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|d\rho(\lambda)\leqslant\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\|y\|. \tag{5}$$

定理 4. 設$(E(\lambda))$是一个譜族，对于复值 Borel 可測函数 f 定义綫性算子 T_f 为

$$T_f=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)dE(\lambda) \tag{6}$$

如上述，这里 T_f 的定义域为

$$\mathfrak{D}(T_f)=\Big\{x\,|\,x\in\mathfrak{H},\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x\|^2<+\infty\Big\}. \tag{7}$$

这时

$$(T_f x, y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)d(E(\lambda)x, y), \quad x\in\mathfrak{D}(T_f), \quad y\in\mathfrak{H}; \tag{8}$$

$$\|T_f x\|^2=\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2. \tag{9}$$

对于这样定义的綫性算子 T_f, 有下列关系成立（下面 f, g 都表示复値 Borel 可测函数）:

$$T_{\bar f}=(T_f)^* \quad (\bar f(\lambda)\equiv\overline{f(\lambda)}), \tag{10}$$

$$x\in\mathfrak{D}(T_f),\quad y\in\mathfrak{D}(T_g)\Longrightarrow(T_f x, Tgv)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)g\overline{(\lambda)}d(E(\lambda)x, y); \tag{11}$$

对于任意实数 μ,

$$E(\mu)\mathfrak{D}(T_f)\subset\mathfrak{D}(T_f), \tag{12}$$

并且

$$x\in\mathfrak{D}(T_f)\Longrightarrow T_f E(\mu)x=E(\mu)T_f x;\ \text{即} \tag{13}$$

$$T_f E(\mu)\supset E(\mu)T_f;$$

对于任意复数 α,

$$\mathfrak{D}(T_f)\subset\mathfrak{D}(T_{\alpha f}),\ \text{并且}\ x\in\mathfrak{D}(T_f)\Longrightarrow T_{\alpha f}x=\alpha T_f x; \tag{14}$$

$$\mathfrak{D}(T_f)\cap\mathfrak{D}(T_g)\subset(T_{f+g}),\ \text{并且对于} \tag{15}$$

$$x\in\mathfrak{D}(T_f)\cap\mathfrak{D}(T_g),$$

$$T_{f+g}x=T_f x+T_g x(\text{即}\ T_f+T_g\subset T_{f+g}),$$

如 $\mathfrak{D}(T_g)\supset\mathfrak{D}(T_{f+g})$时 $T_{f+g}=T_f+T_g$;

$T_f vv(E(\lambda))$(即对于每个有界綫性算子 B, $BE_\lambda=$

$$=E_\lambda B(\text{每个}\ \lambda)\Longrightarrow T_f B\supset BT_f, \tag{16}$$

$T_{fg}\supset T_f T_g$; $T_f T_g$ 是 T_{fg} 在 $\mathfrak{D}(T_{fg})\cap\mathfrak{D}(T_g)$上的限制; (17)

而当 $\mathfrak{D}(T_g)\supset\mathfrak{D}(T_{fg})$ 时，有

$$T_{fg}=T_fT_g;$$

証　(7)(8)(9)(10)已在前面証明了。

关于(12)(13)；如果 $x\in\mathfrak{D}(T_f)$，那末

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2d\|E(\lambda)E(\mu)x\|^2\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x\|^2$$

从而 $E(\mu)x\in\mathfrak{D}(T_f)$，而

$$(T_fE(\mu)x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d(E(\lambda)E(\mu)x,y)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d(E(\lambda)x,E(\mu)y)=(T_fx,E(\mu)y)=(E(\mu)T_fx,y).$$

上面等式既然对任意 $y\in\mathfrak{H}$ 成立，从而(13)得証。

关于(11)：对于 $x\in\mathfrak{D}(T_f)$，$y\in\mathfrak{D}(T_g)$，利用(13)：

$$(T_fx,T_gy)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d(E(\lambda)x,T_gy)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d(x,E(\lambda)T_gy)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d\overline{(T_gE(\lambda)y,x)}=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d\lambda\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\overline{g(\mu)d(E(\mu)E(\lambda)y,x)}\right\}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d\lambda\int_{-\infty}^{\lambda}\overline{g(\mu)}d\overline{(y,E(\mu)x)}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\overline{g(\lambda)}d(E(\lambda)x,y),$$

最后右边积分的存在，可仿証明(5)时的步驟来証。

关于(16)：对于 T_f，先作以前的有界綫性算子 T_t；

$T=\sum_{k=1}^{\infty}\oplus T_k$. 設 B 是任意有界綫性算子并且 $BE(\lambda)=E(\lambda)B$(一切 λ)。

为了証明 $BT_k=T_kB$, 由于任意有界綫性算子可以表示成兩个对称有界綫性算子

$$B=\frac{B+B^*}{2}+i\frac{B-B^*}{2i} \tag{18}$$

的綫性組合，故只須考察 B 是对称的情形就够了。这时

$$(T_kBx,y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_k(\lambda)d(E(\lambda)Bx,y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_k(\lambda)d(E(\lambda)x,By)=$$
$$=(T_kx,By)=(BT_kx,y),$$

而因上式对任意 $y\in\mathfrak{H}$ 与任意 x 成立，可知

$T_kB=BT_k$。这說明 $T_k vv(E_\lambda)$。于是当 $x\in\mathfrak{D}(T_f)$ 时，

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2d\|E(\lambda)Bx\|^2=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2d\|BE(\lambda)x\|^2\leqslant\|B\|\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x\|^2,$$

从而 $Bx\in\mathfrak{D}(T_f)$ 而且

$$T_fBx=\sum_k T_kBx=\sum_k BT_kx=BT_fx,$$

这就是說 $T_fB\supset BT_f$。因此 $T_f vv(E(\lambda))$.

关于(14)，不待証。关于(15)；如果 f,g 都按 $\|E(\lambda)x\|^2$ 平方可积分，那末 $f+g$ 也平方可积分，而

$$\int_{-\infty}^{\infty}(f(\lambda)+g(\lambda))d(E(\lambda)x,y)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d(E(\lambda)x,y)+\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)d(E(\lambda)x,y).$$

这正是說，$T_{f+g}\supset T_f+T_g$，即(15)。同理可証 $T_f\supset T_{f+g}-T_g$，从而当 $\mathfrak{D}(T_g)\supset\mathfrak{D}(T_{f+g})$时，得

$$\mathfrak{D}(T_f)\supset\mathfrak{D}(T_{f+g})\text{并且 } T_f+T_g\supset T_{f+g}.$$

与上面的結果合并，得 $T_{f+g}=T_f+T_g$.

关于(17)：設 $x\in\mathfrak{D}(T_g)$，那末

$$\|E(\lambda)T_gx\|^2=\|T_gE(\lambda)x\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|g(\mu)|^2d\|E(\mu)E(\lambda)x\|^2=$$

$$=\int_{-\infty}^{\lambda}|g(\mu)|^2d\|E(\mu)x\|^2,$$

从而
$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2d\|E(\lambda)T_gx\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)g(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x\|^2$$

这里意味着两边有一边为 $+\infty$ 时，另一边也是 $+\infty$。因此，对于 $x\in$ $\in\mathfrak{D}(T_g)$，为了 $T_{fg}x$ 有意义，必須且只須 T_fT_gx 有意义。于是

$$\mathfrak{D}(T_fT_g)=\mathfrak{D}(T_g)\cap\mathfrak{D}(T_{fg}).$$

对于 $x\in\mathfrak{D}(T_{fg})\cap\mathfrak{D}(T_g)$,

$$(T_fT_gx,y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d(E(\lambda)T_gx,y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d(T_gE(\lambda)x,y)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d\lambda\int_{-\infty}^{\lambda}g(\mu)d(E(\mu)x,y)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)g(\lambda)d(E(\lambda)x,y)=(T_{fg}x,y),$$

这里 $y\in\mathfrak{H}$ 是任意的。因此，$T_fT_gx=T_{fg}x$。整个定理証完。

系：如果 $f(\lambda)$ 是遍处有穷的实值 Borel 可測函数，那末 T_f 是自伴綫性算子。

証 依定理 4 的(10)，$T_f=T_f^*$，証完。

定义 2. 如果 $f(\lambda)=\lambda$，对于由

$$T=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda),\quad \mathfrak{D}(T)=$$

$$=\left\{x\,\middle|\,x\in\mathfrak{H},\ \int_{-\infty}^{\infty}|\lambda|^2 d\|E(\lambda)x\|^2<+\infty\right\} \tag{19}$$

决定的自伴綫性算子 T，(19)中的积分表示叫做算子 T 的譜分解。依前所述，这时有：

$$\|Tx\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|\lambda|^2 d\|E(\lambda)x\|^2,\ x\in\mathfrak{D}(T).$$

又对于有界 Borel 可测函数 $\varphi(\lambda)$，$\mathfrak{D}(T\varphi)=\mathfrak{H}$，并且由定理 4 的(17)，

$$T_\varphi^n=\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(\lambda)]^n dE(\lambda).$$

下面轉到討論譜分解的問題，即要証明一个有趣結果：任意自伴綫性算子必具有譜分解。为此，先从保范算子开始。为此，我們要引用 Helly 定理①：

設有定义在閉区間[0, 1]上的單調遞增右連續（即滿足 $v_n(\vartheta)=v_n(\vartheta+0)=\lim\limits_{\substack{\lambda\to0\\ \lambda>0}}v_n(\vartheta+\lambda)$的）函数的序列 $(v_n(\vartheta))$，并設存在常数 α，使

$$\sup_{0\leqslant\vartheta\leqslant1}|v_n(\vartheta)|<\alpha\quad(n=1,2,\cdots),$$

那末，从 $(v_n(\vartheta))$ 必可选擇出一个子列 $(v_{n_i}(\vartheta))$ 来，使对于每个 $\vartheta\in[0,1]$，

① 參看 Натансон 实变数函数論，第 8 章 §4。关于利用泛函分析的証明，請參看 Люстерник–Соболев，泛函数分析概要，209－211 頁。

$$\lim_{n\to\infty} v_n(\vartheta) \equiv v_\infty(\vartheta)$$

存在。并且極限函数 $v_\infty(\vartheta)$ 也是右連續遞增函数。

定义 3. 复数列(u_k) $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$叫做正定列，是指对于任意整数 n 及任意复数 $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n$, 必有

$$\sum_{j,k=0}^{n} u_{j-k}\xi_j\bar{\xi}_k \geqslant 0. \tag{20}$$

同样，定义在$(-\infty, +\infty)$中并在 $t=0$ 处連續的复数值函数 $\varphi(t)$ 叫做正定函数，是指对于任意实数列(t_i)与复数列(ξ_k)，必有

$$\sum_{j,k=0}^{n} \varphi(t_j - t_k)\xi_j\bar{\xi}_k \geqslant 0. \tag{21}$$

例 1 $u_k = e^{ik2\pi}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$, 那末

$$\sum_{j,k=0}^{n} u_{j-k}\xi_j\bar{\xi}_k = \sum_{k=0}^{n} |e^{2\pi ik}\xi_k|^2 \geqslant 0,$$

从而$(e^{2\pi ik})$是正定列。

例 2 設 $x(t)$ 是$(-\infty, +\infty)$中連續有界复值函数，并設对于任意有窮区間中的 t, 下列極限收斂是一致的：

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} x(t+s)\overline{x(s)}ds$$

不难驗明 $\varphi(t)$ 是連續的。我們把上式右边的極限写成

$$M_s(x(t+s)\overline{x(s)}),$$

那末对于任意实数 u,

$$M_s(x(t+s)\overline{x(s)}) = M_s(x(t+u+s)\overline{x(u+s)}),$$

而
$$\sum_{k,j} \varphi(t_k - t_j)\xi_k\bar{\xi}_j = M_s(|\Sigma x(t_i+s)\xi_i|^2) \geqslant 0.$$

例 3 設 $x(t)\in L^2(-\infty, +\infty)$, 作

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t+s)\overline{x(s)}ds.$$

由 §1 中的結果知 $\varphi(t)$ 是 $L^1(-\infty, +\infty)$ 中函数 $g(w)$ 的 Fourier 变式:

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itw}g(w)dw.$$

于是
$$\varphi(t)-\varphi(0)=\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itw}-1)g(w)dw,$$

而因
$$\sup_t |e^{itw}-1||g(w)|\leqslant 2|g(w)|,$$

并且对于殆一切 w,

$$\lim_{t\to 0}(e^{itw}-1)g(w)=0,$$

根据在积分号下取極限的定理得知

$$\lim_{t\to 0}\varphi(t)=\varphi(0).$$

又
$$\sum_{j,k}\varphi(t_j-t_k)\xi_j\bar{\xi}_k=\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\sum_j (t_j+s)\xi_j\Big|^2 ds\geqslant 0,$$

φ 是正定函数。

定理 5. 如果(u_n)是正定列,那末

$$u_n=\bar{u}_{-n}\quad(n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)\tag{22}$$

并且
$$\sup_n |u_n|\leqslant u_0.\tag{23}$$

如果 $\varphi(t)$是正定函数,那末

$$|\varphi(t)|\leqslant\varphi(0)\quad(-\infty<t<+\infty),\tag{24}$$

并且 $\varphi(t)$在$(-\infty, +\infty)$上一致連續,而对于每个除有穷个点外連續的函数 $h(t)$,下列积分存在并且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s-t)h(s)\overline{h(t)}\,ds\,dt\geqslant 0, \tag{25}$$

証　由(20)取 $n=0$, 得

$$u_0\xi\bar{\xi}\geqslant 0$$

对任意复数 ξ 成立，从而 $u_0\geqslant 0$。又依(20)，取

$$\xi_0=\xi,\ \xi_n=\eta,\quad \xi_1=\cdots=\xi_{n-1}=0,$$

那末

$$u_0\xi\bar{\xi}+(u_n\eta\bar{\xi}+u_{-n}\xi\bar{\eta})+u_0\eta\bar{\eta}\geqslant 0, \tag{26}$$

而因 $u_0\geqslant 0$, $u_n\eta\bar{\xi}+u_{-n}\xi\bar{\eta}$ 必是实数。分别令 $\eta\bar{\xi}=1, i$, 得知

$$(u_n+u_{-n})\text{与 } i(u_n-u_{-n})$$

都是实数，即 $u_n=\overline{u_{-n}}$, 再由(26)令 $\xi=\eta e^{i\vartheta}$, 得

$$\Re(u_ne^{i\vartheta})+u_0\geqslant 0.$$

如取 ϑ 使 $\Re(u_ne^{i\vartheta})=-|u_n|$, 就得出 $|u_n|\leqslant u_0$ 来。

(24)的証明与上面(22)(23)的証明相仿，并且不难証明

$$\varphi(t)=\overline{\varphi(-t)}.$$

由正定性的定义，对于任意 ξ。

$$\varphi(0)+\varphi(-t)\bar{\xi}-\varphi(-s)\bar{\xi}+\varphi(t)\xi+\varphi(0)\xi\bar{\xi}-$$
$$-\varphi(t-s))\xi\bar{\xi}-\varphi(s)\xi-\varphi(s-t)\xi\bar{\xi}+\varphi(0)\xi\bar{\xi}\geqslant 0$$

由此

$$\varphi(0)+2\Re[(\varphi(t)-\varphi(s))\xi]+2[\varphi(0)-\Re\varphi(t-s)]\xi\bar{\xi}\geqslant 0.$$

取 ξ 的偏角，使

$$\Re[\varphi(t)-\varphi)s)\xi]=|\varphi(t)-\varphi(s)|\,|\xi|,$$

那末

$$\varphi(0)+2|\varphi(t)-\varphi(s)|\,|\xi\ +2[\varphi(0)-\Re\varphi(t-s)]\ \xi|^2\geqslant 0.$$

于是　　$|\varphi(t)-\varphi(s)|^2\leqslant 2\varphi(0)[\varphi(0)-\Re\varphi(t-s)]$.

由于 $\varphi(t)$ 在 $t=0$ 处連續，可知 $\varphi(t)$ 一致連續。設 $h(t)$ 在有旁区間 $[-a,a]$ 之外等于 0, 并考察积分(25)的 Riemann 近似和

$$k^2\sum_{\mu=-n}^{n-1}\sum_{\nu=-n}^{n-1}\varphi(\mu k-\nu k)h(\mu k)\overline{h(\nu k)}\left(k=\frac{\alpha}{n}\right).$$

依定义，上式确 $\geqslant 0$，令 $n\to\infty$，于是得

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi(s-t)h(s)\overline{h(t)}dsdt\geqslant 0.$$

令 $\alpha\to+\infty$，得証。

定理 6(Herglotz) 对于任意正定列(u_n)，必存在一个定义在$[0,1]$上的遞增右連續函数 $v(\vartheta)$使

$$u_n=\int_0^1 e^{2\pi in\vartheta}dv(\vartheta)\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

如果限制 $v(0)=0$，那末 $v(\vartheta)$一意决定。

証 在(20)中，取 $n=m-1$，$\xi_0=1$，$\xi_k=e^{-2\pi ik\vartheta}(1<k\leqslant-1)$，那末

$$0\leqslant\frac{1}{m}\sum_{j,k=0}^{m-1}u_{j-k}e^{-2\pi i(j-k)\vartheta}=\sum_{k=-m+1}^{m-1}\left(j-\frac{|k|}{m}\right)u_ke^{-2\pi ik\vartheta},$$

因为对于任意 $e(|e|\leqslant m-1)$，不定方程 $j-k=l$ 有 $m-|l|$組満足 $0\leqslant j,k\leqslant m-1$ 的解 (j,k)。注意令 $p_m(\vartheta)$表示上式的右边。由于

$$\int_0^1 e^{2\pi ik\vartheta}d\vartheta=\begin{cases}1, & k=0,\\ 0, & k\neq 0,\end{cases}$$

可知

$$u_k=\frac{m}{m-|k|}\int_0^1 p_m(\vartheta)e^{2\pi ik\vartheta}d\vartheta=\frac{m}{m-|k|}\int_0^1 e^{2\pi ik\vartheta}dv_m(\vartheta),$$

这里
$$v_m(\vartheta)=\int_0^{\vartheta}p_m(\vartheta)d\vartheta.$$

由于 $p_m(\vartheta)\geqslant 0$, 所以 $v_m(\vartheta)$是遞增函数，並且 $v_m(0)=0$, $v_m(1)=u_0$。

依 Helly 定理，由$\{v_m\}$可以选出一个子例 $v_{m'}$, 使 $v_{m'}(\vartheta)$收歛于一个右連續遞增函数 $v_\infty(\vartheta)$:

$$\lim_{m'\to\infty} v_{m'}(\vartheta)=v_\infty(\vartheta) \quad (0\leqslant\vartheta\leqslant 1). \tag{27}$$

既然 $e^{2\pi ik\vartheta}$ 在 $0\leqslant\vartheta\leqslant 1$ 上連續，所以一致連續，从而对于任意 $\varepsilon>0$, 可取$[0, 1]$的一个分割 $0=\vartheta_0<\vartheta_1<\cdots<\vartheta_s=1$, 使 ϑ, ϑ' 在这分割的同一个小区間中时，

$$|e^{2\pi ik\vartheta}-e^{2\pi ik\vartheta'}|<\varepsilon.$$

令
$$g_\varepsilon(\vartheta)=e^{2\pi i\vartheta_j k}, \quad \vartheta_j\leqslant\vartheta<\vartheta_{j+1} \quad (0\leqslant j\leqslant s-1).$$

那末

$$\left|\int_0^1 g_\varepsilon(\vartheta)dv_{m'}(\vartheta)-\int_0^1 e^{2\pi ik\vartheta}dv_{m'}(\vartheta)\right|\leqslant\varepsilon \sup_\vartheta v_{m'}(\vartheta)=\varepsilon u_0.$$

同样
$$\left|\int_0^1 g_\varepsilon(\vartheta)dv_\infty(\vartheta)-\int_0^1 e^{2\pi ik\vartheta}dv_\infty(\vartheta)\right|\leqslant\varepsilon u_0.$$

由(27)

$$\lim_{m'\to\infty}\int_0^1 g_\varepsilon(\vartheta)dv_{m'}(\vartheta)=\lim_{m'\to\infty}\left\{\sum_{j=0}^{s-1} e^{2\pi ik\vartheta_j}[v_{m'}(\vartheta_{j+1})-v_{m'}(\vartheta_j)]\right\}=$$

$$=\int_0^1 g_\varepsilon(\vartheta)dv_\infty(\vartheta).$$

既然 $\varepsilon>0$ 是任意的，所以

$$\lim_{m'\to\infty}\int_0^1 e^{2\pi ik\vartheta}dv_{m'}(\vartheta)=\int_0^1 e^{2\pi ik\vartheta}dv_\infty(\vartheta).$$

于是

$$u_k=\lim_{m'\to\infty}\frac{m'}{m'-|k|}\int_0^1 e^{2\pi ik\vartheta}dv_{m'}(\vartheta)=\int_0^1 e^{2\pi ik\vartheta}dv_\infty(\vartheta),$$

从而 $v_\infty(\vartheta)$卽是所求的 $v(\vartheta)$。

設 $v(0)=0$ 并且 v 是在右連續遞增函数，并滿足定理的要求。令 $w(\vartheta)-v(\vartheta)=v_\infty(\vartheta)$，那末 $w(\vartheta)$是右連續的囿变函数，并且 $w(0)=0$，而

$$\int_0^1 e^{2\pi in\vartheta}dw(\vartheta)=0 \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{28}$$

为了証明一意性，只須由(28)推出 $w(\vartheta)=0$。实际上，由(28)可知对于任意含 $e^{2\pi i\vartheta}$, $e^{-2\pi i\vartheta}$ 的三角多項式 $p(\vartheta)$,

$$\int_0^1 p(\vartheta)dw(\vartheta)=0.$$

依 Weiershass 定理，对于任意以 1 为周期的連續函数 $f(\vartheta)$及任意正数 $\varepsilon>0$，可以取一含 $e^{2\pi i\vartheta}$ 的三角多項式 $p(\vartheta)$，使

$$\sup_\vartheta |f(\vartheta)-p(\vartheta)|<\frac{\varepsilon}{\underset{0\leqslant\vartheta\leqslant 1}{\operatorname{var}}\ w(\vartheta)}$$

于是对于任意 $\varepsilon>0$,

$$\left|\int_0^1 f(\vartheta)dw(\vartheta)\right|<\varepsilon.$$

卽 $\int_0^1 f(\vartheta)dw(\vartheta)=0$，令 ϑ_0, ϑ_1 表示 $w(\vartheta)$的連續点，且 $0<\vartheta_0<\vartheta_1<1$。定义連續函数 $f_n(\vartheta)$如下：

$$f_n(\vartheta)=\begin{cases}0 & 如\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\vartheta_0,\ 或\ \vartheta_1\leqslant\vartheta\leqslant 1,\\ 1 & 如\ \vartheta_0+\dfrac{1}{n}\leqslant\vartheta\leqslant\vartheta_1-\dfrac{1}{n}.\end{cases}$$

而在其他处 $f_n(\vartheta)$为直綫形的。那末由于

$$\int_0^1 f_n(\vartheta)dw(\vartheta)=0,$$

可知，引用 Lebesgue-Stieltjes 积分的在积分号下取極限的定理可得

$$w(\vartheta_1)-w(\vartheta_0)=\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(\vartheta)dw(\vartheta)=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(\vartheta)dw(\vartheta)=0.$$

$w(\vartheta)$的不連續点至多有可数多个，从而 $w(\theta)$的連續点的全体在[0, 1]中稠。既然 $w(0)=0$, $w(\vartheta+0)=w(\vartheta)$, 可知 $w(\vartheta)=0$。

証完。

与 Herglotz 定理相似的，对于連續情形的 Bochner 定理，乃是：对于正定函数 $\varphi(t)$，可以决定一个有界遞增右連續函数 $v(t)$，使

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{its}dv(s). \tag{29}$$

这时，如果設 $v(-\infty)=0$, 那末 $v(t)$由 φ 一意决定。反之，凡能表示成(29)(v 滿足定理中諸条件)的函数 φ 必是正定的。这定理的証明，請參看，例如 Б. В. Гнеденко, 概率論教程，第二版(1954)，§ 38。

定理 7（**保范算子的譜分解**） 对于任意保范算子 U 必存在一个滿足条件

$$F(0)=0, \quad F(1)=I$$

的譜族$\{F(\vartheta)\}$，使

$$(U^n x, y)=\int_0^1 e^{2\pi i k\vartheta}d(F(\vartheta)x, y) \quad (x, y\in\mathfrak{H}) \quad (n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

或

$$U=\int_0^1 e^{2\pi i\vartheta}dF(\vartheta).$$

这里譜族$\{F(\vartheta)\}$由 U 一意决定。

証 既然 U 是保范的，对于任意 n, U^n 也是保范的。令

$$u_n\equiv(U^n x, x) \quad (n=0, \pm1, \pm2, \cdots),$$

那末$\{u_n\}$是正定数列，因为

$$\sum_{j,k} U_{j-k}\xi_j\bar{\xi}_k=\sum_{j,k}(U^{j-k}x, x)\xi_j\bar{\xi}_k=\sum_{j,k}(U^j x, U^k x)\xi_j\bar{\xi}_k=$$
$$=\left(\sum_j \xi_j U^j x, \sum_k \xi_k U^k x\right)\geqslant 0.$$

依定理 6, 存在一个唯一确定的遞增右連續函数 $v(\theta)\equiv v(\vartheta; x, x)$, 満足 $v(0)=0$, 并且

$$(U^n x, x)=\int_0^1 e^{2\pi i n\vartheta}dv(\vartheta) \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

令 $$v(\vartheta; x, z)\equiv\frac{1}{4}\{v(\vartheta; x+y, x+y)-v(\vartheta; x-y, x-y)+$$
$$+iv(\vartheta; x+iy, x+iy)-iv(\vartheta; x-iy, x-iy)\},$$

那末 $$(U^n x, y)=\int_0^1 e^{2\pi i n\vartheta}dv(\vartheta; x, y) \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

依定理 6 的証明的最后部分,可以証明 $v(\vartheta; x, y)$也由附加条件 $v(0; x, y)=0$ 一意决定。因$(U^n x, y)$关于 x 是加法齐性的,所以由一意性可知 $v(\vartheta; x, y)$关于 x 也是加法齐性的,又因

$$(U^n x, y)=\overline{(U^{-n}y, x)},$$

再利用一意性可知

$$v(\vartheta; x, y)=\overline{v(\vartheta; y, x)}. \tag{30}$$

又 $$0=v(0; x, x)\leqslant v(\vartheta; x, x)\leqslant v(1; x, x).$$

于是仿 Schwarz–Буняковский 不等式的証明,可以推知

$$|v(\vartheta; x, y)|^2\leqslant v(\vartheta; x, x)v(\vartheta; y, y)\leqslant v(1; x, x)v(\vartheta; y, y). \tag{31}$$

又 $$v(1; x, x)=\int_0^1 dv(\vartheta; x, x)=(U^0 x, x)=\|x\|^2.$$

由此得知 $\overline{v(\vartheta; x, y)}$ 是 y 的有界綫性泛函数。于是由 Riesz 定理,存

在一个依賴于 ϑ 与 x 的元，表为 $F(\vartheta)x$，使

$$v(\vartheta;x,y)=(F(\vartheta)x,y).$$

不难看出 $F(0)=0$，而由(30)(31)得知 $F(\vartheta)$ 是有界綫性算子，并且 $F(1)=I$ 是不变算子，利用 $v(\vartheta;x,y)$关于 ϑ 的右連續性可知

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} F(\vartheta+\varepsilon)x=F(\vartheta)x \qquad (弱斂) \qquad (32)$$

由(30)可知 $F(\vartheta)$是对称的：

$$(F(\vartheta)x,y)=v(\vartheta;x,y)=\overline{v(\vartheta;y,x)}=\overline{(F(\vartheta)y,x)}=(x,F(\vartheta)y).$$

于是
$$(U^n x,y)=\int_0^1 e^{2\pi in\vartheta}f(F(\vartheta)x,y).$$

为了完成証明，还要証 $F(\vartheta)^2=F(\vartheta)$ 即 $F(\vartheta)$ 是投影。事实上，若 $F(\vartheta)$ 是投影，則依定理 1，强極限

$$F(\vartheta+0)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}F(\vartheta+\varepsilon)$$

存在，而与(32)比較可得

$$F(\vartheta+0)=F(\vartheta),$$

从而$(F(\vartheta))$确是譜族。

为了証明 $F(\vartheta)$的幂等性，注意

$$\int_0^1 e^{2\pi in\vartheta}d(F(\vartheta)U^m x,y)=(U^nU^m x,y)=(U^{n+m}x,y)=$$

$$=\int_0^1 e^{2\pi i(n+m)\vartheta}dF((\vartheta)x,y)=$$

$$=\int_0^1 e^{2\pi in\vartheta}\,d\vartheta\int_0^{\vartheta} e^{2\pi in\psi}d(F(\psi)x,y).$$

由定理 6 的一意性，可知

$$(F(\vartheta)U^m x, y)=\int_0^{\vartheta} e^{2\pi i m\psi} d(F(\psi)x, y)=$$

$$=\int_0^1 e^{2\pi i m\psi} d_\psi(F(\min(\vartheta,\psi))x, y).$$

既然 $F(\vartheta)$是对称的，上式左边等于

$$(U^m x, F(\vartheta)y=\int_0^1 e^{2\pi i m\psi} d_\psi(F(\psi)x, F(\vartheta)y)=$$

$$=\int_0^1 e^{2\pi i m\psi} d_\psi(F(\vartheta)F(\psi)x, y).$$

再引用一意性，得

$$(F)\vartheta)F(\psi)x, y)=(F(\min(\vartheta, \psi))x, y).$$

特別令 $\vartheta=\psi$, 即得$(F(\vartheta))^2=F(\vartheta)$, 証完。

定理 8. 对于任意滿足 $F(0)=0$, $F(1)=I$ 的單位分解$(F(\theta))$,

$$U=\int_0^1 e^{2\pi i\vartheta} dF(\vartheta)$$

是保范算子。显然，这定理可以看做是定理 7 的逆。

証 首先，定理中的算子是定义在整个空間 $\mathfrak{H}$ 上的有界綫性算子(見本节定理 3 前的考虑)依定理 4 的(10),

$$U^*=\int_0^1 e^{-2\pi i\theta}\, dF(\theta),$$

而利用定理 4 的(17)$UU^*=U^*U=I$, 从而 U 是保范算子。

例 設 $y(s)\in L^2(-\infty, +\infty)$, $(T_y)(s)=e^{is}y(s)$ 决定一个綫性算子 T, T 定义在全空間上，并且以全空間为值域。不难看出，它是保范算子。对于任意整数 n, 如果 $2n\pi<s\leqslant 2(n+1)\pi$, 規定

$$F(\vartheta)y(s)=y(s) \quad \text{如果 } s\leqslant\vartheta+2n\pi, \qquad 0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi,$$
$$F(\vartheta)y(s)=0, \quad \text{如果 } \vartheta+2n\pi<s,$$

不难看出 $\{F(\vartheta)|0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi\}$ 是滿足定理 7, 8 的条件的單位分解，对于 $[0, 2\pi]$ 的某一分割 $0=\vartheta_0<\vartheta_1<\cdots<\vartheta_n=2\pi$, 令

$$\vartheta_j'\in[\vartheta_{i-1}, \vartheta_j], \; F(\vartheta_j)-F(\vartheta_{j-1})=F(\vartheta_{j-1}, \vartheta_j],$$

于是

$$e^{is}y(s)-\sum_{j=0}^{n-1}e^{i\vartheta_j'}F(\vartheta_{j-1}, \vartheta_j]y(s)=\sum_{j=0}^{n-1}(e^{is}-e^{i\vartheta_j'})F(\vartheta_{j-1}, \vartheta_j]y(s),$$

所以 $$\|T_y-\sum_{j=0}^{n-1}e^{i\vartheta_j'}F(\vartheta_{j\pm1}, \vartheta_j]y\|\leqslant\max_{\substack{0\leqslant j\leqslant n-1\\ s\in[\vartheta_{j-1}, \vartheta_j]}}|e^{is}e^{i\vartheta_j'}|\,\|y\|.$$

由此不难看出 $$T_y=\int_0^{2\pi}e^{i\vartheta}\,dF(\vartheta)y.$$

現在来証明本节的主要定理。前面在定义 2 中已經提到，对于任意一个單位分解 $(E(\lambda))$,

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dE(\lambda) \tag{33}$$

是一个自伴綫性算子。現在証明，对于任意自伴綫性算子 A, 必存在一个譜族 $(E(\lambda))$, 使(33)成立。

定理 9.（自伴綫性算子的譜分解） 如果 A 是自伴綫性算子，必存在譜族 $(E(\lambda))$, 使(33)成立。这里譜族 $(E(\lambda))$ 是由 A 一意决定的。

証 A 旣是自伴的，它的 Cayley 变式 $U=U_A$ 是保范算子，从而，必存在滿足 $F(0)=0$, $F(1)=I$ 的單位分解 $(F(\vartheta))$, 使

$$U=\int_0^1 e^{2\pi i\vartheta}\,dF(\vartheta).$$

因 $G(A)=\{(y-U_y, \; i(y+U_y)\,|\,y\in\mathfrak{D}(U)\}$, 故 $y=Uy\Longrightarrow y=\Theta$。由此

可以証明$F(1-0)=F(1)=I$。事实上，如果投影$F(1)-F(1-0)\neq 0$，那末必存在$y\neq\Theta$，使

$$(F(1)-F(1-0))y=y,$$

从而

$$U_y=\int_0^1 e^{2\pi i\vartheta}\,dF(\vartheta)(F(1)-F(1-0))y=(F(1)-F(1-0))y=y,$$

与上面所証的矛盾。

令
$$\lambda=-\operatorname{ctg}\pi\vartheta,\quad E(\lambda)=F(\vartheta).$$

那末这一λ与ϑ之間的映象是$0<\vartheta<1$与$-\infty<\lambda<+\infty$之間的一对一对应，并且是双方連續的。由此知$\{E(\lambda)\}$也是譜族。我們只須証明自伴算子

$$A'=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dE(\lambda)$$

的 Cayley 变式就是U，因为由此，利用 Cayley 变式的一意性就得知$A=A'$，从而定理証完。

为此，只須証对于一切$x\in\mathfrak{D}(A')$，

$$(A'(y-Uy),x)=(i(y+Uy),x)\qquad (y\in\mathfrak{H})\qquad (34)$$

成立，因为$\mathfrak{D}(A')$在$\mathfrak{H}$中稠，从此就可知道$A'(y-Uy)=i(y+Uy)$，即：$U_A=U$。为了証(34)，注意

$$(y-Uy,F(\vartheta)x)=\int_0^1(1-e^{2\pi i\psi})d_\psi(F(\psi)y,F(\vartheta)x)=$$

$$=\int_0^1(1-e^{2\pi i\psi})d_\psi(F(\psi)F(\vartheta)y,x)=$$

$$=\int_0^\vartheta(1-e^{2\pi i\psi})d(F(\psi)y,x),$$

从而

$$(y-Uy, A'x)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, d(y-Uy, E(\lambda)x)=$$

$$=\int_0^1 -\operatorname{ctg}\pi\vartheta\, d_\vartheta\int_0^\vartheta(1-e^{2\pi i\psi})d(F(\psi)y, x)=$$

$$=-\int_0^1\operatorname{ctg}\pi\vartheta(1-e^{2\pi i\vartheta})d(F(\vartheta)y, x)=$$

$$=\int_0^1 i(1+e^{2\pi i\vartheta})d(F(\vartheta)y, x)=(i(y+Uy), x).$$

由于 A' 的自伴性，这正是所要証的(34)。

剩下的是要証明譜分解的一意性。設

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, dE'(\lambda)$$

是另一譜分解，并設存在 λ_0, 使 $E(\lambda_0)\neq E'(\lambda_0)$。令

$$\lambda=\operatorname{ctg}\pi\vartheta,\ E'(\lambda)=F'(\vartheta).$$

就得出譜分解$(F'(\vartheta)$, 使

$$F'(\vartheta_0)\neq F(\vartheta_0),\quad \lambda_0=-\operatorname{ctg}\pi\vartheta_0.$$

由保范算子的譜分解的一意性，可知

$$U'=\int_0^1 e^{2\pi i\vartheta}\, dF'(\vartheta)\neq\int_0^1 e^{2\pi i\vartheta}\, dF(\vartheta)=U。$$

U' 的 Cayley 变式是 $A_1=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, dE'(\lambda)$, 这可以仿証明的前半部分推出。由于 Cayley 变式的一意性，$A\neq A_1$ 得出矛盾！ 証完。

例 設 $Ax(t)=tx(t)$,

$$\mathfrak{D}(A)=\left\{x\left|\int_{-\infty}^{\infty}t^2|x(t)|^2\,dt<+\infty,\ x\in L^2(-\infty,+\infty)\right.\right\}.$$

定义

$$E(\lambda)x(t)=x(t)\qquad 如果\ t\leqslant\lambda,$$
$$E(\lambda)x(t)=0\qquad 如果\ t>\lambda,$$

那末$(E(\lambda))$是譜族。这时

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2\,d\|E(\lambda)x\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2\,d\left\{\int_{-\infty}^{\lambda}|x(t)|^2\,dt\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2|x(\lambda)|^2\,d\lambda,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(E(\lambda)x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d\left(\int_{-\infty}^{\lambda}x(t)\overline{y(t)}\,dt\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda x(\lambda)\overline{y(\lambda)}d\lambda,$$

从而得出譜分解

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dE(\lambda).$$

在第二章中我們曾考慮过 Banach 空間中有界綫性算子的譜。在实用上，例如在微分算子的理論中，我們要考慮更一般的算子的譜。

定义 3. 設 T 是 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 中稠定綫性算子，于是 $T_\lambda=T-\lambda I$ 对于任意复数 λ 也是稠定算子。今把复数 λ 分类如下：

(1)所謂 λ 屬于 T 的譜 $\sigma(T)$ 是指 T_λ 沒有有界逆算子；

(2)所謂 λ 屬于 T 的点譜 $p(T)$ 是指 T_λ 沒有逆算子(即 T_λ 不是一对一的)；

(3)所謂 λ 屬于 T 的連續譜 $C(T)$，是指 T_λ 有逆算子 $\overset{-1}{T}_\lambda$，并且这逆算子是稠定的，但不是連續的；

(4)所謂 λ 屬于 T 的剩余譜 $R(T)$，是指 T_λ 有非稠定逆算子。

对于綫性算子来說，若非一对一，則它一定將某些非零点变成零点，因此为了 $\lambda_0\in P(T)$，必須且只須存在 $x\neq\Theta$，使 $Tx=\lambda_0x$，即必須且只須 λ_0 是 T 的固有值(x 是与固有值 λ_0 相应的固有元)。

定理 10. 設 A 是自伴算子，而

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE(\lambda)$$

是它的譜分解。那末

1) $\sigma(A)$ 是实数軸上的点集;

2) $\lambda \in p(A) \Longleftrightarrow E(\lambda) \neq E(\lambda-0)$; 并且当 $\lambda \in p(A)$ 时，与 x 相应的固有空間等于 $\mathfrak{M}(E(\lambda)-E(\lambda-0))$;

3) 为了 $\lambda \notin \sigma(A)$, 必須且只須有一个含 λ 的开区間 (λ_1, λ_2), 使 $E(\lambda_1) = E(\lambda_2)$;

4) 为了 $\lambda \in C(A)$, 必須且只須 $E(\lambda) = E(\lambda-0)$, 并且对于含 λ 的任意开区間 (λ_1, λ_2), $E(\lambda_2) \neq E(\lambda_1)$;

5) $R(A) = \phi$。

証 1) 設 $\mathfrak{I}\mu$ (即复数 μ 的虛数部分) $\neq 0$, 那末考察

$$R(\mu) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda-\mu} dE(\lambda).$$

由于 $$|\lambda-\mu| = \sqrt{|\lambda - \mathfrak{R}\mu|^2 + |\mathfrak{I}\mu|^2} \geqslant |\mathfrak{I}\mu| > 0,$$

从而对于任意 $x \in \mathfrak{H}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{\lambda-\mu}\right|^2 d\|E(\lambda)x\|^2 \leqslant \frac{1}{|\mathfrak{I}\mu|^2}\|x\|^2 < +\infty,$$

即 $R(\mu)$ 是定义在全空間 $\mathfrak{H}$ 上的有界綫性算子，并且

$$\|R(\mu)\| \leqslant \frac{1}{|\mathfrak{I}\mu|}.$$

利用定理 4 的(17),

$$(A-\mu I)R(\mu) = I,$$
$$R(\mu)(A-\mu I) \subset I,$$

这就是說 $R(\mu)$ 乃是 $A_\mu \equiv A - \mu I$ 的有界逆算子(叫做 A 的豫解算子)。于是 $\mu \notin \sigma(A)$。由此 $\sigma(A) \subset (-\infty, +\infty)$。

5)的証 如果 $\lambda\in R(A)$，那末 $\overline{\mathfrak{W}(A_\lambda)}\neq\mathfrak{H}$，从而存在 $y\neq\Theta$，使对于一切 $x\in\mathfrak{D}(A)$，$(A_\lambda x, y)=0$，这就是說，

$$(Ax, y)=(\lambda x, y)=(x, \bar{\lambda}y),$$

卽 $y\in\mathfrak{D}(A^*)=\mathfrak{D}(A)$，并且 $Ay=A^*y=\bar{\lambda}y$。这正說明 $\bar{\lambda}\in P(A)$，从而依 1)，λ 是实数。于是 $\lambda\in P(A)$ 与 $\lambda\in R(A)$ 的假定矛盾。

2)的証 設 $x\in\mathfrak{D}(A)$，于是

$$\|(A-\lambda I)x\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\mu)^2\, d\|E(\mu)x\|^2,$$

从而为了 $Ax=\lambda x$，必須且只須当 $\lambda>\mu$ 或当 $\lambda<\mu$ 时，$\|E(\mu)x\|^2$ 是常数，但 $\|E(\mu)x\|^2$ 是 μ 的遞增右連續函数，从而 $Ax=\lambda x$ 的必須且充分的条件乃是

$$\mu\geqslant\lambda\Longrightarrow E(\mu)x=E(\lambda)x;$$

$$\mu<\lambda\Longrightarrow E(\mu)x=E(\lambda-0)x=\Theta.$$

因此 $E(\lambda)\neq E(\lambda-0)$。如果 $Ax=\lambda x$，那末

$$(E(\lambda)-E(\lambda-0))x=x,\ \text{卽}\ x\in\overline{\mathfrak{W}(E(\lambda)-E(\lambda-0))}.$$

3)的証 依 5)的証，如实数 $\lambda\notin P(A)$，那末 $\overline{\mathfrak{W}(A_\lambda)}=\mathfrak{H}$，为了实数 $\lambda\notin\sigma(A)$。必須且只須存在正数 α，使

$$\|(A-\lambda I)x\|\geqslant\alpha\|x\|,\ x\in\mathfrak{D}(A).$$

但
$$\|(A-\lambda I)x\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}(\mu-\lambda)^2\, d\|E(\mu)x\|^2,$$

从而为了 $\lambda\notin\sigma(A)$，必須且只須

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\mu-\lambda)^2 d\|E(\mu)x\|^2\geqslant\alpha^2\|x\|^2\quad (x\in\mathfrak{D}(A))\tag{35}$$

取 $\lambda_1<\lambda<\lambda_2$，使 $\lambda-\lambda_1=\lambda_2-\lambda<\alpha$。如果

$$\|(E(\lambda_2)-E(\lambda_1)x\|^2>0,$$

那末

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\mu-\lambda)^2 d\|E(\mu)(E(\lambda_2)-E(\lambda_1))x\|^2<\alpha^2\|(E(\lambda_2)-E(\lambda_1))x\|^2,$$

从而比較(35)，得 $\|(E(\lambda_2)-E(\lambda_1))x\|=0(x\in\mathfrak{D}(A))$，即

$$E(\lambda_2)=E(\lambda_1).$$

反之，由 $E(\lambda_2)=(E(\lambda_1)(\lambda_2>\lambda_1)$ 可推出(35)来。于是 3)証完。

由 2) 3)立刻推出 4)来。

例 1. 連續譜的簡單例。前面已經考察过在 $L^2(-\infty,\infty)$ 中由 $x(t)\to tx(t)$ 决定的自伴綫性算子及其單位分解

$$E(\lambda)x(t)=\begin{cases} x(t) & \text{如果 } t\leqslant\lambda, \\ 0 & \text{如果 } t>\lambda. \end{cases}$$

由定理 10 的 4)，每个 λ 屬于連續譜 $C(T)$。

例 2. 前面又曾考察过自伴綫性算子 $A=\frac{h}{2\pi i}\frac{d}{dt}$，为了 $\lambda\in P(A)$，必須且只須存在 $x\in L^2(-\infty,+\infty)$，使

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{d}{dt}x(t)=\lambda x(t),$$

而对于固定的 λ，这方程的解是 $x(t)=\gamma e^{\frac{2\pi}{h}i\lambda t}$，但这样的 $x(t)$ 不屬于 $L^2(-\infty,+\infty)$，从而 $P(A)=\phi$，于是依定理 10，A 只有連續譜。

依 §1 所述，对于 $y\in L^2(-\infty,+\infty)$，令

$$x(t)=\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-n}^{n}e^{\frac{2\pi i}{h}ts}y(s)ds,$$

那末 $x=U_1y$ 决定一个保范算子 U_1，并且 $(\overset{-1}{U_1}x)(t)=(U_1^*x)(t)==(U_1x)(-t)$。如果$(E(\lambda))$是一个譜族，那末 $E'(\lambda)=U_1E(\lambda)\overset{-1}{U_1}$ 也决定一个譜族。如果$y(s)$与$sy(s)$都屬于$L^2(-\infty,+\infty)\cap L'(-\infty,+\infty)$中，

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{d}{dt}x(t)=\frac{h}{2\pi i}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{h}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{2\pi i}{h}ts}y(s)\,ds=$$

$$=\frac{\sqrt{h}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}y(s)\frac{d}{dt}e^{\frac{2\pi i}{h}ts}\,ds=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{h}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{2\pi i}{h}ts}sy(s)\,ds=U_1(sy(s))=U_1TU_1^{-1}x(t),$$

这里 T 表示由 $y(s)\to sy(s)$ 决定的算子(見例 1), 这就是說,

$$Ax=U_1T\overset{-1}{U}_1x.$$

考察自伴綫性算子

$$A_1=U_1T\overset{-1}{U}_1\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dE'(\lambda).$$

設 $y(s)$ 与 $sy(s)$ 都屬于 $L^2(-\infty,+\infty)\bigcap L'(-\infty,+\infty)$, 令

$$x=U_1y,$$

这样的 $y(s)$ 在 $L^2(-\infty,+\infty)$ 中稠(因为凡在有穷区間外为 0 的連續函数都满足上述条件。U_1 既是保范的, 当 y 遍經一稠集时, $x=u_1y$ 也遍經一稠集。如果 A_0 表示 A 在这些 x 組成的集上的限制,那末 A_0 是对称算子,而 A_1 是它的自伴延拓。

定理 11. 对于对称有界綫性算子 A,

$$\sup_{\lambda\in\sigma(A)}\lambda=\sup_{\|x\|\leqslant1}(Ax,x),\qquad \inf_{\lambda\in\sigma(A)}\lambda=\inf_{\|x\|\leqslant1}(Ax,x).$$

其实本定理是 §1 中定理 4 的精密化。

証 由于 A 的对称性,对于一切 $x\in\mathfrak{H}$,

$$(Ax,x)=(x,Ax)=\overline{(Ax,x)}=\text{实数}.$$

如果实数 $\lambda_0\in\sigma(A)$, 对于任意滿足 $\lambda_1<\lambda_0<\lambda_2$ 的 λ_1 与 λ_2 必存在 $x\equiv\equiv x_{\lambda_1,\lambda_2}\in\mathfrak{H}$, 使 $E(\lambda_2)-E(\lambda_1))x\neq\Theta$ (定理 10 的 3))。無妨取 $\|x\|=1$, 并且使

$$(E(\lambda_2)-E(\lambda_1))x=x,$$

因为上式左边的算子是投影。于是对于这样的 x,

$$(Ax, x)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, d\|E(\lambda)(E(\lambda_2)-E(\lambda_1))x\|^2=$$

$$=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\lambda\, d\|(E(\lambda)-E(\lambda_1))x\|^2.$$

令 $\lambda_1\uparrow\lambda_0$, $\lambda_2\downarrow\lambda_0$, 右边斂于 λ_0, 从而

$$\sup_{\lambda\in\sigma(A)}\leqslant\sup_{\|x\|\leqslant 1}(Ax, x).$$

反之,設

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1}(Ax, x)=\lambda\notin\sigma(A),$$

必存在 λ', λ'', 使 $\lambda'<\lambda<\lambda''$ 幷且 $E(\lambda')=E(\lambda'')$。如果存在元 x, 使 $\|x\|=1$, 而 $(I-E(\lambda''))x=x$, 那末

$$(Ax, x)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, d\|E(\lambda)x\|^2\geqslant\lambda''>\lambda,$$

得出矛盾。由此, $E(\lambda'')=I$。这就是說,对于一切 $x\in\mathfrak{H}$,

$$E(\lambda')x=E(\lambda'')x=x.$$

特别对于一切滿足 $\|x\|=1$ 与 $E(\lambda')x=x$ 的元 x,

$$(Ax, x)=\int_{-\infty}^{\lambda'}\lambda\, d\|E(\lambda)x\|^2\leqslant\lambda'<\lambda,$$

又得出矛盾,定理的第一式証完。同理可証第二式,

系　如果

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, dE(\lambda)$$

是有界对称綫性算子,那末,当

$$\lambda_1 < \inf_{\|x\|=1}(Ax, x) \leqslant \sup_{\|x\|=1}(Ax, x) < \lambda_2$$

时 $E(\lambda_1)=0, E(\lambda_2)=I$, 从而

$$A = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda\, dE(\lambda).$$

上面曾考慮了兩个具"純連續譜"的算子的例。为了举出"純点譜"的例，我們按照第三章§8所述自然想到全連續綫性算子；那里在 Banach 空間的一般性情况予以考察，从 Hilbert 空間綫性算子譜理論的一般討論也可以导出这些結果。

定理 12. Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 中全連續性算子 A 只有"純"点譜，卽它的連續譜不含任意不等于 0 的点。它的不等于 0 的固有值沒有不等于零的积集点，从而可以排列成

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \cdots$$

的形式。与 λ_j 相应的固有空間 M_j 是有穷維的。如果在 M_j 上的投影表示成 E_j, 那末

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j E_j,$$

这里的極限是按算子范数的收斂而取的。

証明留給讀者。

習 題 二

1. 完成定理 12 的証明。

2. 設 $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE(\lambda)$ 是自伴綫性算子, $x \in \mathfrak{D}(A)$, $\|x\|=1$, $\alpha_x = (Ax, x)$, $\beta_x = \|Ax\|$, 那末 $\beta_x^2 \geqslant \alpha_x^2$, 并且对于任意 $\varepsilon > 0$, 必存在 $\lambda_0 \in \sigma(A)$, 使

$$\alpha_x - \sqrt{\beta_x^2 - \alpha_x^2} - \varepsilon \leqslant \lambda_0 \leqslant \alpha_x + \sqrt{\beta_x^2 - \alpha_x^2} + \varepsilon.$$

3. 在(l^2)中由陣

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

决定的綫性算子 A 的譜是如下的:

$$R(A)=\{\lambda \mid |\lambda|<1\},\quad C(A)=\{\lambda \mid |\lambda|=1\},\quad |\lambda|>1 \Longleftrightarrow \lambda \notin \sigma(A).$$

4. 在(l^2)中由

$$y=(\eta_n),\quad x=(\xi_n),\quad \eta_n=\alpha_n\xi_n \qquad (n=1,2,\cdots)$$

决定的綫性算子 T 的譜是如下的:

$\sigma(T)$由数集$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\}$的閉包組成,

$C(T)$由数集$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\}$的不屬于它的一切积集点組成,

$P(T)$由$\{\alpha_1,\alpha_2\cdots\}$組成,

$R(T)=\phi$。

5. 設 T 是(l^2)中由关系

$$y=(\eta_n),\quad x=(\xi_n),\quad \eta_1=\xi_1,\ \eta_n=\xi_n-\xi_{n-1} \qquad (n>1)$$

决定的綫性算子,那末

$$R(T)=\{\lambda \mid |\lambda-1|<1\},$$

$$C(T)=\{\lambda \mid |\lambda-1|=1\},$$

$$P(T)=\phi。$$

6. 設 x 为具測度 μ 之空間,考査 $L^2(X,\mu)$。設 A 为如下的有界算子:

$$(Ax)(t)\equiv h(t)x(t) \qquad (x(t)\in L^2(x,\mu)),$$

其中 $h(t)$是 X 上按 μ 殆遍有界的可測复值函数,求証:

$$\sigma(A)=\{\lambda \mid (\alpha,\beta)\ni\lambda \Longrightarrow \mu(h^{-1}((\alpha,\beta)))\}.$$

7. 設 $\{\lambda_n\}(n=1,2,\cdots)$是 $|\lambda|\leqslant 1$ 中的所有有理复数序列,$\{\varphi_n\}(n=1,2,\cdots)$是可分的 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 中的完全直交系,綫性算子 T 表为 $T\varphi_n=\lambda_n\varphi_n(n=1,2,\cdots)$。則所有 λ_n 的集是 T 的点譜,所有滿足 $|\lambda|>1$ 的 λ 組成的集是豫解集,在 $|\lambda|\leqslant 1$ 的所有無理的 λ 形成連續譜。

8. 考察 Hilbeit 空間 $L^2(R^m)$中的綫性算子

$$(Tx)(t)=|t|^2x(t),\quad t=(t_1,\cdots,t_m)\in R^m,$$

$$|t|=\sqrt{t_1^2+\cdots+t_m^2}.$$

求 T 的譜分解。

9. 考察 $L^2(R^m)$中的綫性算子

$$T=-\Delta,\qquad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial t_m^2},$$

求 T 的譜分解。

参 考 文 献

[1] Cooke, Richard G.: Linear operators, spectral theory and some other applications, 1953.

[2] Neumann, J. von: Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, Math. Ann. 102 (1929—30), 49—131.

[3] Neumann, J. von: Zur Algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren, Math. Ann. 102 (1929—30), 370—427.

[4] Riesz, F. et Szökefalvi-Nagy, B. Léçons d'analyse fonctionnelle.

§3. 算子的函數

在§2中已証明每个自伴綫性算子可以表示成

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda),$$

这里$(E(\lambda))$是一个單位分解(或譜族)。設$f(\lambda)$是$(-\infty, +\infty)$上的Borel可測复値函数,依§2的考虑,可以定义一个正規算子

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)dE(\lambda), \tag{1}$$

这个綫性算子的定义域是

$$\mathfrak{D}=\mathfrak{D}_f=\left\{x\,\middle|\,\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x\|^2<+\infty,\ x\in\mathfrak{H}\right\}.$$

这里的譜族$(E(\lambda))$旣是由算子A决定的,因此算子(1)也可以看作是由A决定的,并且依賴于函数f,从而可以表示成$f(A)$:

$$f(A)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\,dE(\lambda). \tag{2}$$

由 §2 中的推理,可以看出。

$$(f(A)x, y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)d(E(\lambda)x, y),\ x\in\mathfrak{D}(f(A)),\ y\in\mathfrak{H},$$

这里等式右边的积分是平常的 Lebesgue-Stieltjes 积分。$f(A)$ 叫做自伴綫性算子 A 的"函数"。

本节討論的中心是对于已給的自伴綫性算子 A, 求出一个綫性算子 T 可以表示成如(2)形式的"A的函数"的条件, 这个充分必要条件由 von Neumauu-Riesz-三村征雄定理給出(見文献[1]、[2]、[3])。

下面首先举出算子函数的几个例。

例 1. 設 A 是有界对称綫性算子,而 $f(\lambda)$ 是一个多項式函数:

$$f(\lambda)=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\lambda^j,$$

那末依§2 定理 4 的(15),(16),(17)不难看出

$$f(A)=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j A^j.$$

例 2. 如果

$$f(\lambda)=\frac{\lambda-i}{\lambda+i},\quad(-\infty<\lambda<+\infty),$$

那末 $|f(\lambda)|=1$, 从而 $\mathfrak{D}(f(A))=\mathfrak{H}$, 依 §2 定理 4 的(17), 注意 $\mathfrak{D}(f(A))=\mathfrak{H}\supset\mathfrak{D}(f(A)(A+iI))$, 可知

$$f(A)(A+iI)=(A-iI),$$

从而

$$f(A)=(A-iI)(A+iI)^{-1}$$

恰是 A 的 Cayley 变式(这是保范算子)。

定理 1. 設 A 是自伴綫性算子, 并設 $TvvA$, 那末对于每个 $x_0\in\mathfrak{D}(T)$, 必存在 Borel 可測函数 $\varphi(\lambda)$, 使 $Tx_0=\varphi(A)x_0$。

証: 1) 無妨只就 A 有界的情形証明,否則,令

$$A'=\operatorname{arc\,tg} A,\ \left(\text{这里 } A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, dE(\lambda)\right).$$

那末由于 $|\operatorname{arc\,tg}\lambda|\leqslant\frac{\pi}{2}$,依 §2 定理 4 的(9), $\|A'\|\leqslant\frac{\pi}{2}$,卽 A' 是有界綫性算子。A' 也是自伴的,令 $\mu=\operatorname{arc\,tg}\lambda$,

$$F(\mu)=E(\operatorname{tg}\mu),$$

不难看出 $F(\mu)$ 也是譜族。于是

$$A'=\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\lambda\, dE(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\mu\, dF(\mu)$$

(用 $\mu=\operatorname{arc\,tg}\lambda$ 代入);

$$\operatorname{tg} A'=\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{tg}\mu\, dF(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, dE(\lambda)=A$$

由此, $AvvA'$, 而既然依假定 $TvvA$, 所以对于任意有界綫性算子 B,

$$BvA'\Longrightarrow BvA, \text{ 从而 } BvT, \text{ 卽 } TvvA',$$

如果本定理对有界的情形得証,那末必存在 Borel 可测函数 $\psi(\lambda)$, 使

$$Tx_0=\psi(A')x_0.$$

令 $\varphi(\lambda)=\psi(\operatorname{arc\,tg}\lambda)$, 便得

$$Tx_0=\varphi(A)x_0.$$

2) 現在設 A 是有界对称綫性算子。設 $M(x_0)$ 表示由 $x_0, Ax_0, A^2x_0, \cdots, A^nx_0, \cdots$ 張成的閉綫性子空間, 令 P 表示在 $M(x_0)$ 上的投影。今証 PvA, 卽 $PA=AP$, 事实上, 由于 $AM(x_0)\subset M(x_0)$ 可知 $APx\in M(x_0)$ 对任意 $x\in\mathfrak{H}$ 成立,卽 $PAPx=APx$, $PAP=AP$。由此,$(APy-PAy, z)=(PAPy-PAy, z)=(APy-Ay, Pz)=(Py-y, APz)$. 既然 $Py-y\in M(x_0)^{\perp}$, 且 $APz\in M(x_0)$, 可知上式右边$=0$。 z 既是任意的,可

知 $AP=PA$。

既然 PvA, 依定理的假定，TvP, 从而

$$Tx_0=TPx_0=PTx_0\in M(x_0).$$

依 $M(x_0)$ 的定义，存在一列多項式$(P_n(\lambda))$, 使

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A)x_0=Tx_0 \ (\text{强}) \tag{3}$$

但 $$\|(P_n(A)-P_m(A))x_0\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|P_n(\lambda)-P_m(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x_0\|^2,$$

而依(3), 上式左边当 $n, m\to\infty$ 时收斂于 0。令 μ_{x_0} 表示由有界遞增函数 $\|E(\lambda)x_0\|^2$ 决定的測度，依空間 $L^2(\mu_{x_0})$ 的完备性，存在一个屬于 $L^2(\mu_{x_0})$ 的函数 $f(\lambda)$, 使

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|P_m(\lambda)-f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x_0\|^2=0.$$

但 $f(\lambda)$ 是按測度 μ_{x_0} 殆遍等于一个有穷值 Borel 可測[①]函数 $\varphi(\lambda)$ 于是

$$\lim_{n\to\infty}\|(P_n(A)-\varphi(A))x_0\|^2=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|P_n(\lambda)-\varphi(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x_0\|^2=0,$$

于是得出 $Tx_0=\varphi(A)x_0$, 証完。

定理 2. (von Neumann-Riesz-三村征雄): 設 $\mathfrak{H}$ 是可分 Hilbert 空間，T 是稠定閉綫性算子，A 是自伴綫性算子，那末为了存在一个遍处有穷 Borel 可測函数 $f(\lambda)$, 使 $T=f(A)$, 必須且只須 $TvvA$。

証　必要性: 由 §2 定理 4 的(16)可知，如果 $T=f(A)$, 必然

① 实际上可取 Barie 第二类的函数，参看 Натансон, 实变数函数論，第 15 章，§2，定理。

$$TvvE(\lambda)), \quad Avv(E(\lambda)),$$

从而对于任意有界綫性算子 B,

$$BvT \Longrightarrow Bv(E(\lambda)) \Longrightarrow BvA, \quad \text{即} \quad TvvA.$$

充分性: 仿定理1的証明的第1)部分，可知無妨只就 A 有界的情形考察就够了。

既然 $\mathfrak{H}$ 是可分的，它的子集 $\mathfrak{D}(T)$ 必也是可分的，即 $\mathfrak{D}(T)$ 中有一稠可数子集 $\{g_1, g_2, \cdots, g_n, \cdots\}$。由于 $\overline{\mathfrak{D}(T)}=\mathfrak{H}$, $\{g_1, g_2, \cdots\}$ 也是 $\mathfrak{H}$ 中的稠集。令 $M(x)$ 表示 $\mathfrak{H}$ 中由 $x, Ax, \cdots, A^n x, \cdots$ 張成的閉綫性子空間，并令

$$x_1=g_1, \quad x_2=g_2-P_1 g_2, \quad \cdots,$$

$$x_n=g_n-\sum_{k=1}^{n-1} P_k g_n, \cdots, \tag{4}$$

这里 P_k 表示在 $M(x_k)$ 上的投影。依定理1的証明，P_k 与 A 交换，从而依假定，P_k 与 T 交换。于是

$$P_k g_n \in \mathfrak{D}(T), \quad \text{从而} \quad x_n \in \mathfrak{D}(T).$$

現在証明 $P_i P_k=0\ (i \neq k)$。事实上，設对于 $i, k<n$, 这等式已經証明。那末对于 $i<n$,

$$P_i x_n = P_i g_n - P_i\left(\sum_{k=1}^{n-1} P_k g_n\right) = P_i g_n - P_i g_n = \Theta$$

$$P_i A^k x_n = A^k P_i x_n = \Theta$$

从而凡形如 $A^k x_n$ 的元与 $M(x_i)$ 直交，所以 $M(x_n) \perp M(x_i)$, 于是得知 $P_i P_n = P_n P_i = 0$, 依归納法，可知 $P_i P_k = 0 (i \neq k)$ 一般地成立。

再証
$$P=\sum_{k=1}^{\infty} P_k = I.$$

事实上，既然 $\{g_1, g_2, \cdots, g_n, \cdots\}$ 在 $\mathfrak{H}$ 中稠，只須証

$$P g_n = g_n \quad (n=1, 2, \cdots),$$

依(4)，
$$Pg_n=Px_n+\sum_{k=1}^{n-1}PP_kg_n,$$
而因 $Px_n=x_n$(因$x_n\in M(x_n)$，故$P_kx_n=x_n$ 式 Θ，由 $k=n$ 或$\neq n$ 决定)，$PP_k=P_k$，所以 $Pg_n=g_n$。

今选擇正数列(γ_n)，使
$$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_nx_n \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_nTx_n$$
都强斂；例如取
$$\gamma_n=2^{-n}(\|x_n\|+\|Tx_n\|+1)^{-1}.$$
令
$$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_nx_n=x_0,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_nTx_n=y_0.$$
T 既是閉算子，必然
$$x_0\in\mathfrak{D}(T) \text{ 并且 } Tx_0=y_0.$$
依定理 1，存在 Borel 可測有窮值函数 $\varphi(\lambda)$，使
$$Tx_0=\varphi(A)x_0.$$
設 B 是有界自伴綫性算子并且 B 与 A 交換。依假定，B 与 T 交換，而依本証明的必要性部分，B 与 $\varphi(A)$ 交換。因此
$$\varphi(A)Bx_0=B\varphi(A)x_0=BTx_0=TBx_0.$$
令 χ_n 表示集 $\{\lambda\,|\,|\varphi(\lambda)|\leqslant n\}$ 的特征函数，而令 $\varphi_n=\chi_n(A)$。取
$$B=\frac{1}{\gamma_m}\varphi_nA^kP_m,$$
那末 B 有界并且 B 与 A 交換。因$P_mx_0=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_nP_mx_n=\gamma_mx_m$，所以
$$\varphi(A)Q_nA^kx_m=\varphi(A)\frac{1}{\gamma_m}Q_nA^kP_mx_0=\varphi(A)Bx_0=TBx_0=$$
$$=T\frac{1}{\gamma_m}Q_nA^kP_mx_0=TQ_nA^kx_m.$$

固定 m, 令 k 变动，对于 $A^k x_m$ 的任意綫性組合 h,

$$\varphi(A)Q_n h = TQ_n h. \tag{5}$$

这样的元 h 全体在 $M(x_m)$ 中稠。令 m 也变动时，由于 $\sum_{k=1}^{\infty} P_k = I$, 可知这样的 h 全体在 $\mathfrak{H}$ 中稠。既然 Q_n 是有界的。$\varphi(A)Q_n$ 也是有界的，事实上，令

$$\varphi_n(\lambda) = \begin{cases} \varphi(\lambda) & \text{如果 } |\varphi(\lambda)| \leqslant n, \\ 0 & \text{如果 } |\varphi(\lambda)| > n. \end{cases}$$

那末算子 $\varphi_n(A)$ 是有界的，并且 $\varphi(A)Q_n = \varphi_n(A)$, 因为

$$\varphi(\lambda)\chi_n(\lambda) = \varphi_n(\lambda),$$

只須引用 §2 定理 4 的(17)就够了。

对于任意 $h^* \in \mathfrak{H}$, 可取一列元 (h_i)，使每个 h_i 是形如 $A^k x_m$ 的元的綫性組合，而

$$\lim_{i\to\infty} h_i = h^* \text{ (强)。}$$

由于刚才証得的 $\varphi(A)Q_n$ 的連續性可知

$$\lim_{i\to\infty} \varphi(A)Q_n \cdot h_i = \varphi(A)Q_n \cdot h^* \text{ (强)。}$$

由(5)可知
$$\lim_{i\to\infty} TQ_n h_i = \varphi(A)Q_n h^* \text{ (强)。}$$

因
$$\lim_{i\to\infty} Q_n h_i = Q_n h^* \text{ (强)。}$$

而 T 是閉算子，所以

$$Q_n h^* \in \mathfrak{D}(T), \quad \text{并且 } TQ_n h^* = \varphi(A)Q_n h^*.$$

这正是說，因 h^* 是 $\mathfrak{H}$ 中任意元，

$$TQ_n = \varphi(A)Q_n. \tag{6}$$

令 $y = \mathfrak{D}(\varphi(A))$, 而 $y_n = Q_n y$, 因 $\lim_{n\to\infty} Q_n = I$ (强)(这是由于 $|\varphi(\lambda)|$ 遍处有穷)，所以

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} Q_n y = y \text{ (强)。}$$

所以在(6)中令 $n\to\infty$，得

$$Ty_n=TQ_ny=\varphi(A)Q_ny=Q_n\varphi(A)y\to\varphi(A)y. \tag{7}$$

这里使用了 $Q_n=\chi_n(A)\upsilon A$ 这一事实；而由此得

$$\varphi(A)Q_ny=Q_n\varphi(A)y.$$

依(7)并注意 T 是閉綫性算子，可知 $y\in\mathfrak{D}(T)$ 并且

$$Ty=\varphi(A)y,$$

于是 $\varphi(A)\subset T$。反之設 $y\in\mathfrak{D}(T)$，令 $Q_ny=y_n$，那末，

$$Ty_n=TQ_ny=\varphi(A)Q_ny,\ (\text{因}Q_n\upsilon A),$$

如能証 $\varphi(A)$ 是閉算子，那末与以前一样，可知 $y\in\mathfrak{D}(\varphi(A))$，并且 $\varphi(A)y=Ty$，即 $\varphi(A)\supset T$。于是 $\varphi(A)=T$，而証明就完了，現在我們来証 $\varphi(A)$ 是閉算子。依§2 定理 4，(10)，$\varphi(A)^*=\bar{\varphi}(A)$。从而

$$\varphi(A)^{**}=\bar{\bar{\varphi}}(A)=\varphi(A),$$

而 $\varphi(A)$ 确是閉的，于是証明完結。

值得注意的是本定理中特别提出 $\mathfrak{H}$ 是可分空間，今举一例，說明对于非可分空間，定理不真。

例：設 $\mathfrak{H}_1$ 表示一切滿足

$$\sum_{0<t<1}|f(t)|^2<+\infty$$

的函数 $f(t)(0<t<1)$ 的全体，$\mathfrak{H}_2=L^2[0,1]$。令

$$e_\lambda(t)=\begin{cases}1 & \text{如果 } t\leqslant\lambda;\\ 0 & \text{如果 } t>\lambda.\end{cases}$$

$$\varepsilon_\lambda(t)=\begin{cases}1 & \text{如果 } t=\lambda;\\ 0 & \text{如果 } t\neq\lambda.\end{cases}$$

考察积空間 $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_1\times\mathfrak{H}_2$，其中的元乃是元偶 $\{x(t),y(t)\}$，$x\in\mathfrak{H}_1$，$y\in\mathfrak{H}_2$。規定

$$E(\lambda)\{x(t),y(t)\}=\{e_\lambda(t)x(t),e_\lambda(t)y(t)\},$$

那末不难驗明 $\{E(\lambda)\}$ 是單位分解。令

$$A = \int_0^1 \lambda\, dE(\lambda),$$

我們証明由 $$P\{x, y\} = \{x, \Theta\}$$
决定的，由 $\mathfrak{H}$ 到 $\mathfrak{H}_1$ 上的投影满足 $PvvA$，但 P 不是 A 的函数。

实际上，令 $E(\lambda) - E(\lambda - 0) \equiv E_\lambda$。于是

$$E_\lambda\{x(t), y(t)\} = \{\varepsilon_\lambda(t) x(t), \Theta\},$$

$\varepsilon_\lambda(t) y(t)$ 看做 $L^2[0, 1]$ 中的元 $= \Theta$，而

$$\sum_\lambda \varepsilon_\lambda(t) x(t) = x(t),$$

可知 $\sum_\lambda E_\lambda = P$，而諸 E_λ 相互直交。故由 $E_\lambda vvA$ 可知 $PvvA$。

設有一等式

$$P = \int_0^1 p(\lambda) dE(\lambda)$$

成立，那末 $p(\lambda) \neq 1$。設有一 ξ 使 $p(\xi) \neq 1$。因

$$\|E(\lambda)\{\varepsilon_\xi(t), 0\}\|^2 = \|\{e_\lambda(t)\varepsilon_\xi(t), \Theta\}\|^2 =$$

$$= \sum_t |e_\lambda(t)\varepsilon_\xi(t)|^2 = \begin{cases} 0 & \text{如 } \lambda < \xi, \\ 1 & \text{如 } \lambda \geqslant \xi. \end{cases}$$

由此 $(P\{\varepsilon_\xi, \Theta\}, \{\varepsilon_\xi, \Theta\}) = \int_0^1 p(\lambda) d\|E(\lambda)\{\varepsilon_\xi, \Theta\}\|^2 = p(\xi) \neq 1$。但由直接計算可得 $(P\{\varepsilon_\xi, \Theta\}, \{\varepsilon_\xi, \Theta\}) = 1$，得出矛盾。

参考文献

[1] 三村征雄 (Mimura, Y.): Über Funktionen von Funktionaloperatoren in einem Hilbertschen Raum, Jap. J. Math. 13 (1936), 119—128.

[2] Neumann, J. von: Zur Algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren, math. Ann. 102 (1929), 49—131.
[3] Riesz, F.: Sur les fonctions des transformations hermitiennes dans l'espace de Hilbert, Acta Sci. Math. Szeged 7 (1935), 147—159.

§4. 正規綫性算子的譜分解

我們首先証明閉稠定綫性算子的标准分解:

$$A = WH,$$

A 是閉稠定綫性算子，W 是部分等距算子，H 是自伴算子，这相当于平常复数的"極坐标"表示 $z=\rho e^{i\theta}$, ρ 是正数，$|e^{i\theta}|=1$。对于正規綫性算子，这个表示还可以精密化。

定理 1. 对于任意稠定閉綫性算子 A, 存在一个正自伴綫性算子 B 与部分等距算子 W, 使

$$A = WB, \quad A^* = BW^*, \quad B^2 = A^*A,$$

并且

$$\overline{\mathfrak{W}(B)} = \mathfrak{N}(B)^{\perp} = \mathfrak{N}(A)^{\perp} = \overline{\mathfrak{W}(A^*)},$$

$$\overline{\mathfrak{W}(A)} = \mathfrak{N}(A^*)^{\perp}.$$

証 依 §1 定理 13, A^*A 是正自伴綫性算子，从而存在譜分解

$$A^*A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda).$$

由于对一切 $x \in \mathfrak{D}(A^*A)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E(\lambda)x, x) = (A^*Ax, x) = \|Ax\|^2 \geqslant 0,$$

取任意 $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, 注意利用 §2 定理 4 的(12), 得 $(E(\lambda_2)-E(\lambda_1))x \in \mathfrak{D}(A^*A)$, 从而

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\lambda\|d(E(\lambda)-E(\lambda_1))x\|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda d\|E(\lambda)(E(\lambda_2)-E(\lambda_1)x\|^2\geqslant 0,$$

而因左边 $\leqslant\lambda_2\|(E(\lambda_2)-E(\lambda_1))x\|^2$, 必然 $E(\lambda_2)x=E(\lambda_1)x$ 对每个 $x\in\mathfrak{D}(A^*A)$ 成立。既然 $\overline{\mathfrak{D}(A^*A)}=\mathfrak{H}$, 得 $E(\lambda_2)=E(\lambda_1)$。于是知 $\lambda<0\Longrightarrow E(\lambda)=0$。因此可以写成

$$A^*A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)=\int_{0}^{\infty}\lambda dE(\lambda).$$

介

$$B=\int_{0}^{\infty}\sqrt{\lambda}\,dE(\lambda).$$

那末 B 的定义域由一切满足

$$\int_{0}^{\infty}\lambda d\|E(\lambda)x\|^2=\int_{0}^{\infty}\lambda d(E(\lambda)x,x)<+\infty$$

的元 x 組成，并且 B 是自伴綫性算子，滿足

$$B^2=A^*A. \tag{1}$$

依 §1 定理 16, 存在部分等距算子 W, 使 $A=WB$。依 §1 定理 18 的証。

$$A^*=(WB)^*=B^*W^*=BW^*.$$

又依 (1) 及 §1 定理 16, $\mathfrak{D}(B)=\mathfrak{D}(A)$, 从而 $\mathfrak{N}(A)=\mathfrak{N}(B)$。定理的其他結論已是 §1 定理 17 的后果。

定理 2. 設 A 是稠定閉綫性算子，那末标准分解 $A=WB$ 由下列兩性質唯一决定:

1) B 是正自伴綫性算子并且 $B^2=A^*A$;

2) W 是有界綫性算子, $A=WB$, 并且 $\mathfrak{N}(B)\subset\mathfrak{N}(W)$。

証 首先証明在标准分解中, W 滿足 $\mathfrak{N}(B)\subset\mathfrak{N}(W)$。事实上,

$$\mathfrak{N}(B)=\mathfrak{W}(B^*)^{\perp}=\mathfrak{W}(B)^{\perp},$$

而W是以$\mathfrak{W}(B)$为始域的，从而W在$\mathfrak{W}(B)^{\perp}$上等于0，即$\mathfrak{N}(B)\subset\mathfrak{N}(W)$。

滿足1)的A^*A的函数B是一意决定的。事实上，設自伴綫性算子C滿足$C^2=A^*A$，而令C的譜分解为

$$C=\int_0^{\infty}\lambda dG(\lambda).$$

令
$$E'(\lambda)=\begin{cases}G(\sqrt{\lambda}) & \text{如果 } \lambda\geqslant 0,\\ 0 & \text{如果 } \lambda<0.\end{cases}$$

不难驗明$E'(\lambda)$是單位分解，而

$$C=\int_0^{\infty}\sqrt{\lambda}\,dE'(\lambda).$$

于是
$$\int_0^{\infty}\lambda dE'(\lambda)=C^2=A^*A=\int_0^{\infty}\lambda dE(\lambda),$$

其中右边表示A^*A的譜分解。由于譜分解的一意性，$E'(\lambda)=E(\lambda)$，从而

$$C=\int_0^{\infty}\sqrt{\lambda}\,dE(\lambda),$$

即C与定理1中的B相同。

由于$A=WB$，由定理1的証可知

$$\overline{\mathfrak{W}(B)}=\mathfrak{N}(B)^{\perp},$$

从而
$$\mathfrak{H}=\overline{\mathfrak{W}(B)}\oplus\mathfrak{N}(B).\tag{2}$$

但B既一意确定，W在$\mathfrak{W}(B)$上的值由$A=WB$一意决定，而因$\mathfrak{N}(B)\subset\mathfrak{N}(W)$，它在全$\mathfrak{H}$上的值也一意决定。証完。

对于正規綫性算子，上述的标准分解的性質还可以进一步攔明。事实上，$AA^*=WBBW^*$，$B^2=A^*A$。依§1定理15，W^*W是$\mathfrak{W}(B)$

上的不变算子。不难看出，WBW^* 也是正的。由于 A 的正規性，$AA^*=A^*A$，而依自伴算子 A^*A 的"平方根"的一意性(定理 2 的証明)，$WBW^*=B$(因$WBBW^*=WBW^*WBW^*$)。这就是說 $BW=WBW^*W$，但

$$x\in\mathfrak{W}(B)\Longrightarrow W^*Wx=x,$$

而 $x\in\mathfrak{N}(B)\Longrightarrow Wx=\Theta$，且利用(2)，得

$$BW=WB. \tag{3}$$

这个結果还可以进一步精确化。

定理 3. 設 A 是正規綫性算子，那末必存在正自伴綫性算子 $B=(A^*A)^{\frac{1}{2}}=(AA^*)^{\frac{1}{2}}$。及保范算子 $U\equiv I-W^*W+W$，使

$$A=UB=BU,$$

这里 $A=WB$ 是上述的标准分解。

証 依上述 $P\equiv W^*W$ 是在閉綫性子空間 $\overline{\mathfrak{W}(B)}=\mathfrak{N}(B)^{\perp}$ 上的投影。W 是以 $\overline{\mathfrak{W}(B)}$ 为始域，以 $\overline{\mathfrak{W}(A)}$ 为終域的部分等距算子，从而 W^* 是以 $\overline{\mathfrak{W}(A)}$ 为始域 $\overline{\mathfrak{W}(B)}$ 为終域的部分等距算子，并且 $WW^*=W^{**}W^*$ 是在 $\overline{\mathfrak{W}(A)}$ 上的投影。依定理 1

$$\overline{\mathfrak{W}((A^*A)^{\frac{1}{2}})}=\overline{\mathfrak{W}(A^*)},$$

从而由 A 的正規性，即 A 与 A^* 之間的对称关系，得

$$\overline{\mathfrak{W}((AA^*)^{\frac{1}{2}})}=\overline{\mathfrak{W}(A)}.$$

所以 $\overline{\mathfrak{W}(B)}=\overline{\mathfrak{W}(A)}$，即 WW^* 是 $\overline{\mathfrak{W}(B)}$ 上的投影，从而

$$W^*W=WW^*=P.$$

因此，

$$(I-P)W=0=W(I-P),\ 从而\ W^*(I-P)=0=(I-P)W^*.$$

P 既是 $\overline{\mathfrak{W}(B)}=\mathfrak{N}(B)^{\perp}$ 上的投影，所以

$$(I-P)B=0=B(I-P),$$

从而

$$UU^*=(I-P+W)(I-P+W^*)=(I-P)+WW^*=I.$$

同理 $U^*U=I$, 卽 U 是保范的，于是

$$UB=(W+I-P)B=WB=BW=B(W+I-P)=BU,$$

証完。

正規綫性算子 A 旣可以表示成

$$A=UB=BU,$$

而保范算子 U 与正自伴綫性算子 B 各有譜分解

$$U=\int_0^{2\pi} e^{i\vartheta}dF(\vartheta),\quad B=\int_0^{\infty}\lambda dE(\lambda),$$

我們可借以求得 A 的"譜分解"。事实上，由于 $UB=BU$, 所以 $U\,\mathrm{v}\,E(\lambda)$ (§2 定理 4 之(16))。于是 $E(\lambda)$ 与 U 的函数交換，这里保范算子的函数与自伴算子的函数一样可借它的譜分解来定义。特别 $E(\lambda)\,\mathrm{v}\,F(\vartheta)$。

如果 $A=UB$, 对于 $x\in\mathfrak{D}(A)=\mathfrak{D}(B)$, $y\in\mathfrak{H}$,

$$(Ax,y)=(Bx,U^*y)=\int_0^{\infty}\lambda d(E(\lambda)x,U^*y)=$$

$$=\int_0^{\infty}\lambda d\lambda\left\{\int_0^{2\pi}e^{i\vartheta}d_{\vartheta}(E(\lambda)x,\ F(\vartheta)y)\right\}=$$

$$=\int_0^{\infty}\lambda d_{\lambda}\left\{\int_0^{2\pi}e^{i\vartheta}d_{\vartheta}(F(\vartheta)E(\lambda)x,\ y)\right\}. \tag{4}$$

今考查复数平面上的極坐标，而对平面上扇形区域

$$0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0,\quad 0\leqslant\vartheta\leqslant\vartheta_0\leqslant 2\pi,$$

定义投影 $E(\lambda_0)F(\vartheta_0)$; 由于 $E(\lambda)$ 与 $F(\vartheta)$ 可交換，可知它确是投影。当扇形区域变成圓 $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0$ 时，对应的投影就变成 $E(\lambda_0)$。由于$\{E(\lambda)\}$, $\{F(\vartheta)\}$ 是單位分解，投影族 $\{E(\lambda)F(\vartheta)\}$ 滿足下列条件:

$$E(\lambda)F(\vartheta)E(\lambda_1)F(\vartheta_1)=E(\min(\lambda,\lambda_1))F(\min(\vartheta,\vartheta_1));$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{\lambda\downarrow\lambda_0\vartheta\downarrow\vartheta_0} E(\lambda)F(\vartheta)=E(\lambda_0)F(\vartheta_0)\ (\text{强})\\ \lim\limits_{\lambda\downarrow-\infty} E(\lambda)F(\vartheta)=0,\ \lim\limits_{\theta\to 0} E(\lambda)F(\vartheta)=0,\ \lim\limits_{\lambda\uparrow\infty} E(\lambda)F(2\pi)=I\ (\text{强})\end{cases} \tag{5}$$

这样的投影族 $\{E(\lambda)F(\vartheta)\}$ 叫做“極坐标”形式的單位复分解(或复譜族)。由(4),与这个單位分解对应的式

$$x\in\mathfrak{D}(A),\ y\in\mathfrak{H}:(Ax,y)=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\lambda e^{i\vartheta}d_{\lambda\vartheta}(F(\vartheta)E(\lambda)x,y) \tag{6}$$

叫做复譜分解。这里，为了由(4)中的叠代积分化成(5)中的二重积分是合法的,还須作如下說明。

仿以前关于單位分解的一个定理，可以証明，对于复値連續函数 $\varphi(\lambda,\vartheta)$,下列三个条件是等价的:

1° 积分
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\varphi(\lambda,\vartheta)d(E(\lambda)F(\vartheta)x)$$

存在;

2°
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}|\varphi(\lambda)\vartheta)|^2d\|E(\lambda)F(\vartheta)\lambda\|^2<+\infty;$$

3° $G(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\varphi(\lambda,\vartheta)d(E(\lambda)F(\vartheta)y,x)$ 是有界綫性泛函数。

因 $\mathfrak{D}(A)=\mathfrak{D}(B)$,而为了 $x\in\mathfrak{D}(B)$,必須且只須

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2d\|E(\lambda)x\|^2<+\infty,$$

又对于一切 $z\in\mathfrak{H}$,

$$\int_0^{2\pi}d\|F(\vartheta)z\|^2=\|z\|^2,$$

可知为了 $x\in\mathfrak{D}(A)$, 必須且只須下列积分收斂:

$$\int_0^\infty \lambda^2 d\|E(\lambda)x\|^2=\int_0^\infty \lambda^2 d_\lambda\left\{\int_0^{2\pi} d_\theta\|F(\theta)E(\lambda)x\|^2\right\}=$$

$$=\int_0^\infty \lambda^2 d_\lambda\left\{\int_0^{2\pi} d_\vartheta\|E(\lambda)F(\vartheta)x\|^2\right\}=$$

$$=\int_0^\infty |\lambda e^{i\vartheta}|^2 d_\lambda\left\{\int_0^{2\pi} d_\vartheta\|E(\lambda)F(\vartheta)x\|^2\right\},$$

由于这里被积分函数 $|\lambda e^{i\vartheta}|^2$ 是連續的，这里的(Lebesgue-Stieltjes 积分化成 Riemann-Stieltjes 积分。利用平常的逼近积分的 Riemann-Darboux 和 (先考慮有穷区間然后取極限轉到 $\int_0^\infty$ 的情形), 不难看出上式右边的叠代积分等于下列二重积分

$$\int_0^\infty\int_0^{2\pi} |\lambda e^{i\vartheta}|^2 d_{\lambda,\vartheta}\|E(\lambda)F(\vartheta)x\|^2.$$

由上述条件 1°, 2° 的等价性可知(6)中的二重积分存在，并且与(4)中的叠代积分相等。于是下列定理的前半得証。而我們还要进而考慮其后半。

定理 4. 对于正規綫性算子 A, 有等式(6)成立,(6)中右边的二重积分对于任意 $y\in\mathfrak{H}$ 有定义并且是 y 的有界綫性泛函数的共軛复数, $x\in\mathfrak{D}(A)$。反之，凡具有滿足条件(5)的复譜分解(6)的綫性算子 A 必是正規的。

証　現在只証逆命題。設有滿足(5),(6)的譜分解，令

$$B=\int_0^\infty \lambda dE(\lambda),\quad U=\int_0^{2\pi} e^{i\vartheta}dF(\vartheta). \tag{7}$$

把二重积分化成叠代积分，可得 $A=UB=BU$。于是依定理 1 的証，

$$A^*=BU^*=B\overset{-1}{U}=\overset{-1}{U}B,$$

从而 $\mathfrak{D}(A)=\mathfrak{D}(A^*)=\mathfrak{D}(B)$，并且

$$AA^*=BU\overset{-1}{U}B=B^2=B\overset{-1}{U}UB=A^*A,$$

卽 A 是正規的。

假如我們考慮 A 是稠定閉綫性算子，那末 A 具有复譜分解的必要充分条件乃是 A 是正規綫性算子。事实上，如 A 具有复譜分解，仿定理中的証明，可知 $A=BU=UB$, B, U 由(7)定义。由定理 2, $E(\lambda)F(\vartheta)$ 由 A 一意决定，証完。

仿效自伴算子的理論，我們可以考察正規綫性算子的函数。設

$$A=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\lambda e^{i\vartheta}dE(\lambda)F(\vartheta)$$

是正規綫性算子。設

$$f(\lambda,\vartheta)$$

是定义在区域

$$0\leqslant\lambda<+\infty,\quad 0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi$$

中的 Borel 可測复値函数，并且設 $f(\lambda,\vartheta+2\pi)=f(\lambda,\vartheta)$。設使 Lebesgue–Stieltjes 积分

$$\int_0^\infty\int_0^{2\pi}|f(\lambda,\vartheta)|^2d\|E(\lambda)F(\vartheta)x\|^2$$

存在且 $<+\infty$ 的元 $x\in\mathfrak{H}$ 的全体表示成 $\mathfrak{D}$，那末对于 $x\in\mathfrak{D}$, $y\in\mathfrak{H}$, Lebesgue–Stieltjes 积分

$$\int_0^\infty\int_0^{2\pi}f(\lambda,\vartheta)d(E(\lambda)F(\vartheta)x,y)\tag{8}$$

存在且有穷(証明仿关于自伴綫性算子的部分，从略)。式(8)看作 y 的函数是一个有界綫性泛函数的共軛复数，从而依 Riesz 定理，存在一

元，表示成 $f(A)y$，使(8)中积分等于 $(f(A)x, y)$。这个 $f(A)$ 是綫性算子，叫做 A 的函数，它的定义域是 $\mathfrak{D}$。我們写成

$$f(A)=\int_0^\infty\int_0^{2\pi} f(\lambda, \vartheta) d(E(\lambda) F(\vartheta)).$$

仿前 §2 可以証明，如果 $f(\lambda, \vartheta)$ 是有界 Borel 可測复值函数，那末 $\mathfrak{D}=\mathfrak{H}$，并且

$$\|f(A)x\|^2=\int_0^\infty\int_0^{2\pi} |f(\lambda, \vartheta)| d\|E(\lambda) F(\vartheta) x\|^2,$$

特别

$$\|x\|^2=\int_0^\infty\int_0^{2\pi} d\|E(\lambda) F(\vartheta)\|^2.$$

对于复数 $z_0=\lambda_0 e^{i\vartheta_0}$，有由 z_0 一个点組成的集的特征函数

$$f_{z_0}(\lambda, \theta)=\begin{cases}1 \text{ 如果 } \lambda e^{i\vartheta}=\lambda_0 e^{i\vartheta_0},\\ 0 \text{ 如果 } \lambda e^{i\vartheta}\neq\lambda_0 e^{i\vartheta_0}.\end{cases}$$

令

$$f_{z_0}(A)=\int_0^\infty\int_0^{2\pi} f_{z_0}(\lambda, \vartheta) d(E(\lambda) F(\vartheta)).$$

定理 5. 引用上述符号，有

$$Ax=z_0 x \Longleftrightarrow x=f_{z_0}(A) x,$$

并且

$$z_0\neq z_0' \Longrightarrow f_{z_0}(A) f_{z_0'}(A)=0.$$

証 依上述，

$$\left\{\begin{aligned}\|(A-z_0 I)x\|^2&=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}|\lambda e^{i\vartheta}-\lambda_0 e^{i\vartheta_0}|^2 d\|E(\lambda)F(\vartheta)x\|^2,\\ \|(I-f_{z_0}(A))x\|^2&=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}|1-f_{z_0}(\lambda, \vartheta)|^2 d\|E(\lambda)F(\vartheta)x\|^2.\end{aligned}\right. \tag{9}$$

但函数 $|\lambda e^{i\vartheta}-\lambda_0 e^{i\vartheta_0}|^2$ 与 $|1-f_{z_0}(\lambda,\vartheta)|^2$ 看作 (λ,ϑ) 的函数只当 $\lambda e^{i\vartheta}=\lambda_0 e^{i\vartheta_0}$ 时为 0, 从而(9)中两积分同时为 0, 同时 $\neq 0$. 于是得出定理的前半。如果 $z_0\neq z_0'$, 那末

$$f_{z_0}(\lambda,\theta)\cdot f_{z_0'}(\lambda,\vartheta)=0.$$

利用 §2 中的推論，得

$$(f_{z_0}(A)f_{z_0'}(A)x,y)=\int_0^\infty\int_0^{2\pi} f_{z_0}(\lambda,\vartheta)d(E(\lambda)F(\vartheta)f_{z_0'}(A)x,y)=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^{2\pi} f_{z_0}(\lambda,\vartheta)d\left\{\int_0^\infty\int_0^{2\pi} f_{z_0'}(\lambda',\vartheta')d(E(\lambda')F(\vartheta')x,E(\lambda)F(\vartheta)y)\right\}=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^{2\pi} f_{z_0}(\lambda,\theta)d\left\{\int_0^\lambda\int_0^\vartheta f_{z_0'}(\lambda',\vartheta')d(E(\lambda)F(\vartheta)x,y)\right\}=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^{2\pi} f_{z_0}(\lambda,\vartheta)f_{z_0'}(\lambda,\vartheta)d(E(\lambda)F(\vartheta)x,y)=0, \tag{10}$$

証完。

系　如果 $f_{z_0}(A)\neq 0$, 那末 $f_{z_0}(A)$ 是与 A 的固有值 z_0 相应的固有空間上的投影算子。与 A 的不同固有值相应的固有空間互相直交。

定理 6. 如果 $z_0=\lambda_0 e^{i\theta_0}$ 不是 A 的固有值，那末逆算子

$$(A-z_0I)^{-1}$$

存在并且是稠定的。也就是說，正規綫性算子沒有剩余譜。

証　設 z_0 不是 A 的固有值，那末依定理 5, $f_{z_0}(A)=0$, 因为否則作为投影算子，恒有 $x\neq\Theta$, 使 $f_{z_0}(A)x=x$, 这就是說，对于任意点 $x\in\mathfrak{H}$, 由一个点 z_0 所成的复数集 $\{z_0\}$ 按 Lebesgue-Stieltjes 測度 $\|E(\lambda)F(\vartheta)x\|^2$ 具有測度 0。設 $f_\varepsilon(\lambda,\vartheta)$ 是在以 z_0 为中心以 ε 为半徑的圓的特征函数，那末

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} f_\varepsilon(\lambda,\vartheta)^2 d\|E(\lambda)F(\vartheta)x\|^2=0.$$

因此，元

$$x_\varepsilon=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}(1-f_\varepsilon(\lambda,\vartheta))d(E(\lambda)F(\vartheta)x)=x-f_\varepsilon(A)x$$

使
$$\|x-x_\varepsilon\|^2=\int_0^\infty\int_0^{2\pi} f_\varepsilon(\lambda,\vartheta)^2 d\|E(\lambda)F(\vartheta)x\|^2$$

随 $\varepsilon\to 0$ 而斂于 0。仿前定理的証明中的式(10)，可知

$$(A-z_0I)\int_0^\infty\int_0^{2\pi}(\lambda e^{i\vartheta}-\lambda_0 e^{i\vartheta_0})^{-1}(1-f_\varepsilon(\lambda,\vartheta))d(E(\lambda)F(\vartheta)x)=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}(\lambda^{i\vartheta}-\lambda_0 e^{i\vartheta_0})(\lambda e^{i\vartheta}-\lambda_0 e^{i\vartheta_0})^{-1}(1-f_\varepsilon(\lambda,\vartheta))d(E(\lambda)F(\vartheta)x)=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}(1-f_\varepsilon(\lambda,\vartheta))d(E(\lambda)F(\vartheta)x)=x_\varepsilon.$$

x 既是任意的，可知

$$\mathfrak{W}(\overline{A-z_0I})=\mathfrak{H}.$$

所以如果 z_0 不是 A 的固有値，逆算子 $(A-z_0I)^{-1}$ 存在而且稠定。

定理 7. 如果正規綫性算子 A 是有界的，那末在它的譜分解

$$A=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\lambda e^{i\vartheta}d(E(\lambda)F(\vartheta)x)$$

中，必存在有穷数 λ_0，使 $E(\lambda_0)=I$，即

$$A=\int_0^{\lambda_0}\int_0^{2\pi}\lambda e^{i\vartheta}d\,(E(\lambda)F(\vartheta)).$$

証 如果A有界，A^*也是，从而

$$B=\sqrt{AA^*}=\int_0^\infty \lambda dE(\lambda)$$

也是有界的。仿自伴綫性算子的相应定理，容易完成証明。完。

習 題 三

如果A是有界正規綫性算子，那末A之譜$\sigma(A)$由凡満足下列条件的复数λ組成：对于每个$\varepsilon>0$，有x，使$\|x\|=1$且$\|Ax-\lambda x\|<\varepsilon$。

参 考 文 献

[1] 藤原松三郎：無限多変数の函数論，岩波講座。

[2] 吉田耕作：スペクトル 解析。

[3] 吉田耕作：ヒルベルト 空間論，1953。

[4] Ахиезер, Н. И. и Глазман, И. М.: Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 1950.

[5] Cooke, R. G.: Linear operators, spectral theory and some other applications, 1953.

[6] Halmos, P. R.: Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity, 1951.

[7] Neumann, J. von: Charakterisierung des Spektrum, lines Integraloperators, 1935.

[8] Neumann, J. von: mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik, 1935.

[9] Riesz, F. et Szökefalvi-Nagy, B.: Leçons d'analyse fonctionnelle, 2e éd.

[10] Stone, M. H.: Linear ltransformations in Hilbert space and their applications to analysis, 1932.

[11] Szökefalvi-Nagy, B.: Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, 1942.

[12] Tulcea, C. T. Ionescu: spaţii Hilbert, 1956.

[13] Ахиезер, Н. И.: Интегральные операторы с ядрами Карлемана, Успехи Матем. Наук, 2:5 (1947), 92—132.

第四章　綫性算子的半群

J. Hadamard 在論分析光学中所謂 Huyghens 原理时[4]指出这原理的主要意思是說明由一点 0 在时刻 t_0 發出光信号，要决定这一初始現象在一点 A 在后来的时刻 t' 所产生的后果，先取在間隔 (t_0, t') 中的一个任意时刻 t_1 时的狀态作为中間情況，这一原理实际上意义很广。一般說来，这原理表达了宏观現象的决定論：由物理現象在时刻 t_0 的狀态，可以导出后来时刻 t' 时的狀态，这样的导出可以通过間隔 (t_0, t') 中任一时刻 t_1 的中間狀态，卽由 t_0 的狀态計算出 t_1 时的狀态，再由 t_1 时的狀态求出 t' 时的狀态。Hadamard 指出这样表达的 Huyghens 原理用数学表达，意思是指存在一个相应的算子群。这最早曾由 Picard 在 1895 年指出；他所考虑的是狀态由一时間函数决定，这函数滿足一个常微分方程。我們知道，一个高阶常微分方程

$$y^{(m)} = p_1 y^{(m-1)} + \cdots + p_{m-1} y' + p_m y.$$

可以化成一阶微分方程組

$$y_1' = y_2,\ y_2' = y_3,\ \cdots,\ y_{m-1}' = y_m,\ y_m' = p_m y_1 + \cdots + p_1 y_m,$$

而一般，如果方程組

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i(x_1, \cdots, x_n)(1 \leqslant i \leqslant n). \tag{1}$$

的右边不明显包含 t，那末它的解可以由初始条件

$$x_i(t_0) = x_i^{(0)}\ (1 \leqslant i \leqslant n)$$

表示成

$$x_i = x_i(t; t_0; x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})(1 \leqslant i \leqslant n) \tag{2}$$

設一意性成立(条件見[8])，那么不难看出

$$x_i(t; t_0; x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}) = x_i(t - t_0; 0; x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}),\ (1 \leqslant i \leqslant n).$$

这正是說，方程組(1)的解决定一个空間的变换群，这群依賴于参数 t_0。

事实上，如果令 $p=(x_1, \cdots, x_n)$ 表 n 維空間中的点，而令

$$T_t p_0 = p_t,$$

这里 $\quad p_0=(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}),\ x_i(t)=x_i(t; t_0, x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}),$

$$1\leqslant i\leqslant n,$$

$$p(t)\equiv(x_1(t), \cdots, x_n(t)),$$

那末由(2)看出
$$T_{t'}T_t p_0 = T_{t+t'} p_0, \tag{3}$$
从而 (T_t) 構成一个單参数变换群。

Le Roux(1903)指出在偏微分方程的情形也是一样的。例如設某一物理系統的狀态由一个函数 $u(p;t)$ 决定。p 表示 n 維空間的点，t 表示时間。这 $u(p;t)$ 滿足一个二阶綫性齐次偏微分方程

$$L(u)=0. \tag{4}$$

这微分算子 L 中的系数是 p 的函数。但不显含 t。設 $u(p, t)$ 是对 $t>0$ 的一个 Cauchy 問題的唯一解：

$$L(u)=0,\ u(p;0)=f_1(p),\ u_t(p;0)=f_2(p), \tag{5}$$

这里 f_1, f_2 是已知的函数。

$$u_t(p;0)=\frac{\partial u(p;t)}{\partial t}\Big|_{t=0}.$$

在所謂 Huyghens 原理的原来情形，即波在各向同性的均匀介質中傳播的情形，(4)就是熟知的波动方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

令 $\quad F(p)=(f_1(p), f_2(p)),\ F(p;t)\equiv(u(p;t), u_t(p;t)).$

那末
$$F(p;t)=T_t(F(p))$$
是一个把某一包含 $F(p)$ 的适当綫性空間映入自己的綫性算子。Huyghens 原理依照 Hadamard 的提法，即指对于 $0<t_1<t$。

$$F(p;t)=T_{t-t_1}T_{t_1}(F(p)),$$

換句話說

$$T_{t_1+t_2}(F(p))=T_{t_2}T_{t_1}(F(p)),\quad t_1, t_2>0. \tag{6}$$

一般对于物理中不可逆現象，我們不能由某时刻的狀态决定前一时刻的狀态，从而(T_t)一般只是"半群"。不是群(即具有締合的乘法，但不必含主單位元，也不必含其中每个元的逆元)。

在数学物理中，兴趣在于用一种"符号"的方法求出解的显式来。半群的理論也恰好可以提供这种方法。

为了說明这种方法的大意，我們先作一个簡單的类比，上述的算子是作用在某函数空間E之上的，我們下面將設E是 Banach 空間，而設$T_t\in\mathfrak{B}(E)$特别如E是一維的$E=K$ (K是实或复数域)，那末T_t可以表示成

$$y=T_tx,\quad y=f(t)x,\quad y,x\in K,$$

$f(t)$是依賴于实参数t的复数值函数。于是(6)变成函数方程

$$f(t_1+t_2)=f(t_1)\cdot f(t_2),\ t_1,t_2>0. \tag{7}$$

設$f(t)$是 Lebesgue 可測的函数。如果它是有界的，我們可以証明它或者殆遍等于 0，或者

$$f(t)=e^{\alpha t},\ \alpha\text{ 是某一复数。}$$

事实上，令

$$\psi_\varepsilon(a)=\int_a^{a+\varepsilon}f(t)dt,\quad a,\varepsilon>0.$$

如果$\psi_\varepsilon(a)$对于一切如上的a,ε值等于 0，必然$f(\xi)$殆遍等于 0。排除这一不足道情形，必存在ε_0，使对某一a，$\psi_{\varepsilon_0}(a)\neq 0$。但

$$\psi_{\varepsilon_0}(a)f(t)=\int_a^{a+\varepsilon_0}f(\tau)f(t)d\tau=\int_a^{a+\varepsilon_0}f(\tau+t)d\tau=\psi_{\varepsilon_0}(a+t),$$

从而

$$f(t)=\frac{\psi_{\varepsilon_0}(a+t)}{\psi_{\varepsilon_0}(a)}.$$

既然設$f(t)$是有界可測函数，它的不定积分是上、下积分限的連續函数，从而$f(t)$是連續函数。令$\eta(t)=\log f(t)$，(7)变成

$$\eta(t_1+t_2)=\eta(t_1)+\eta(t_2). \tag{8}$$

令 $\eta(1)=\alpha$, 于是由(8)可知

$$\eta(1)=\eta\underbrace{\left(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{項}}=n\eta\left(\frac{1}{n}\right),$$

从而 $$\eta\left(\frac{m}{n}\right)=m\eta\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{m}{n}\alpha(m,\ n\ \text{是正整数})。$$

由于 η 的連續性不难看出，对于任意实数 t,

$$\eta(t)=\alpha t,$$

从而 $$f(t)=e^{\alpha t}. \tag{9}$$

这就是說，除非不可測的情形，作用在一維空間上的一致有限的綫性算子半群可以完全用(9)决定出来。現在回到一般情形，即作用在一个 Banach 空間 E 中的有界綫性算子的半群 $(T_t)_{t>0}$。由(9)可以設想，是否也存在一个綫性算子 A, 使

$$T_t=e^{\alpha A} \tag{10}$$

呢？这里当然要解釋 $e^{\alpha A}$ 的意义。这里也应仿一維情形的特例 T_t 是“可測”，但 T_t 是实变量 t 的抽象函数，在 Banach 代数 $\mathfrak{B}(E)$ 中取值。从而“可測”一詞有种种意义。我們略去“一致可測”的情形，因为这方面的应用不如下面考虑的情形多（参看[6]），但如果設空間 E 是可分的，弱可測与强可測是相同的。于是与上面一样，我們將在下面証明，当 T_t 弱可測时必然强連續，即对每个 $x\in E$, T_tx 是 t 的連續函数。又我們設 $\|T_t\|\leqslant 1$(叫做压縮映象)。問題在于如何找到表現式(10)来。

先就 Hilbert 空間来考察，因为对于这种空間，算子函数已經有定义了(第三章)。为簡單起見，先考虑保范算子 U。設它的譜分解是

$$U=\int_0^1 e^{2\pi i\varphi}dF(\varphi),\ F(0)=0.$$

对于任意实数 t, 令

$$U_t=\int_0^1 e^{2\pi it\varphi}dF(\varphi).$$

不难看出，这一族保范算子(U_t)满足下列条件：

$$U_0=I,\ U_tU_s=U_{t+s}. \tag{11}$$

$$s\longrightarrow t\Longrightarrow U_s\longrightarrow U_t(\text{强})。 \tag{12}$$

这由第三章的結果不难推出。設 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 中有一族保范算子 $\{U_t|-\infty<t<+\infty\}$，構成强連續單参数群：即設（11）（12）成立。M. H. Stone 于 1930 証明，存在一意决定的自伴綫性算子 A：

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda),$$

使

$$U_t=e^{itA}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}dE(\lambda). \tag{13}$$

这时，对于 $x\in\mathfrak{D}(A)$，有

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{U_{t+\delta}-U_t}{\delta}\cdot x=iAU_tx(\text{强}), \tag{14}$$

或“符号地”写成

$$\frac{dU_t}{dt}\cdot x=iAU_tx,\ x\in\mathfrak{D}(A). \tag{15}$$

反之，已知自伴算子 A，那末(13)决定一个保范算子的單参数群，并且使(14)成立。(15) 使我們联想到量子力学中的 Schrödinger 方程。在量子力学中，考察 n 个自由度的系統，設广义坐标为 $q_1,\cdots,q_n$，那末系統的态由一函数

$$\psi(q_1,\cdots,q_n,t)$$

决定，这叫做波函数。系統被發現在無穷小区域

$$(q_1,q_1+dq_1)\times(q_2,q_2+dq_2)\times\cdots\times(q_n,q_n+dq_n)$$

中的概率等于

$$|\psi(q_1,q_2,\cdots,q_n;t)|^2dq_1dq_2\cdots dq_n,$$

从而函数 ψ 滿足規格化条件

$$\int|\psi(q_1,\cdots,q_n;t)|^2dq_1dq_2,\cdots,dq_n=1,$$

于是我們可以把 ψ 看作 Hilbert 空間 L^2 中的一元。系統的态是理論上的抽象化，在物理中并不能直接量測它。我們实际上量测的乃是一些物理量，例如能量、动量等。按照 Dirac, 这种量叫做可观測量。在量子力学中，可观測量并不是用一个普通变量表示，而是由上述的 Hilbert 空間中的綫性算子 A 表示，并且我們設 A 是自伴綫性算子，因为 $(\psi, A\psi)$ 表示可观測量 A 在系統处于态 ψ 时的期望値，从而应当設它是实的。对每个系統，存在一个自伴綫性算子 A，即 Hamilton 算子（对应能量这一可观測量），这个算子 A 通过 Schrödinger 方程

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=A\psi \tag{16}$$

决定系統的时間变化，如果設系統不受扰动。这个 Schrödinger 方程乃是量子力学中的运动方程。設 ψ_0 是在开始 $t_0=0$ 时的波函数即初始态，那末由(15)可知存在保范算子的單参数群 (U_t)，使

$$\psi(x_1, \cdots, x_n; t)=U_t\psi_0$$

是 Schrödinger 方程(16)的解，这里

$$U_t=e^{-itA/\hbar}.$$

上面已經談到由保范算子的單参数半群决定出一个算子 A 来，使(13)成立。这时 A 叫做半群 (U_t) 的無穷小母元；这名称是由古典的連續群論得来的。对于一般 Banach 空間 E 的情形，也有类似的結果，將在下面証明，这里不詳述了。还有一个逆間題，即一个綫性算子 A 应当滿足什么条件，使它成为某一單参数半群的無穷小母元？这一問題也將在下面解答。

前面已經提到 Stone 在 1930 的結果，这是單参数群方面的最早的工作，J. v. Neumann 在 1932 提出簡化的証明。И. М. Гельфанд (1939) 与深宮政范最先考虑了 Banach 空間的一般情形，B. Sz. Nagy 于 1936 考虑 Hilbert 空間中自伴綫性有界算子的單参数群的表現。N. Dunford(1938)考虑了單参数半群，并且証明强可測性与在$(0, +\infty)$

上有界蘊涵强右連續性。半群理論与应用的系統工作很多是屬于 E. Hille 的(見[6])。下面的处理主要是依据吉田耕作的。吉田耕作用半群方法討論馬尔科夫过程，特別用来积分所謂 Fokker—Planck 方程，获得有趣的結果(見[17])。这里不准备牽涉到过多的概率論知識，只好从略了。

§1. 半群的無穷小母元

定义 1. 由 Banach 空間 E 到 E 中的綫性有界算子 $(T_s)(0\leqslant s<<\infty)$所組成的算子族叫做單参数半群，是指$(T_s)$滿足下列条件:

$$T_0=I,\quad T_t\cdot T_s=T_{t+s}. \tag{1}$$

半群(T_s)叫做强連續的，是指对于每个 $x\in E$ 及每个非負数 t_0,

$$\lim_{t\to t_0} T_t\cdot x=T_{t_0}x.$$

半群(T_s)叫做弱可測的，是指对每个 $x\in E$, $t\to T_t x$ 是在 E 中取值的弱可測抽象函数。如果$\|T_s\|\leqslant 1$ 对于每个 s 成立，T_s 叫做压縮算子，而(T_s)叫做压縮算子的單参数半群。半群(T_t)叫做标准型的，是指存在$\beta\geqslant 0$, 使

$$\|T_t\|\leqslant e^{\beta t}(t\geqslant 0).$$

例 1. 設$(0, +\infty)$ 上一切一致連續有界函数的全体表示作 $C(0, \infty)$。不难看出，按平常函数的运算与范数

$$\|x\|=\sup_{0\leqslant t<\infty}|x(t)|,$$

$C(0, \infty)$是 Banach 空間。由公式

$$(U_t x)(s)=x(t+s) \tag{2}$$

决定的，由 $C(0, \infty)$到它自己之中的算子 U_t 是有界綫性算子，并且

$$U_t U_s=U_{t+s}(t, s\geqslant 0),\ U_0=I,$$

$$\lim_{t\to t_0} U_t x=U_{t_0}x(\text{按 } C(0, \infty)\text{中的范数，即强斂})$$

$$(\text{每个 } x\in C(0, \infty)),$$

$$\|U_t x\| \leqslant \|x\| \ (t \geqslant 0).$$

从而(U_t)是$C(0,\infty)$中压縮綫性算子的强連續單参数半群。

例 2. 由(2)决定的算子U_t也組成$L^p_{\sim}(0,\infty)$或$L^p(-\infty,+\infty)$ $(p \geqslant 1)$中的压縮綫性算子的强連續單参数半群。

例 3. 在$C(0,\infty)$, $L^p(0,\infty)$, $L^p(-\infty,\infty)$中，由

$$(T_t x)(s) = e^{\alpha t} \cdot x(s), \ (R_\alpha < 0)$$

(α是复数，R_α表示它的实数部分)决定一个压縮綫性算子的强連續單参数半群。

例 4. 在$L^1(-\infty,\infty)$中，考察

$$(U_t x)(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(s-\sigma)^2}{t}} x(\sigma) d\sigma \quad (t > 0),$$

注意 $$(U_t \cdot U_\tau \cdot x)(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(s-\sigma)^2}{t}} d\sigma \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{\pi \tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\sigma-\lambda)^2}{\tau}} x(\lambda) d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi \sqrt{\tau t}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\sigma-\lambda)^2}{\tau}} e^{-\frac{(s-\sigma)^2}{t}} d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\pi \sqrt{\tau t}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma_1^2}{\tau}} e^{-\frac{(s-\lambda-\sigma_1)^2}{t}} d\sigma_1 (\text{令 } \sigma-\lambda=\sigma_1) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(t+\tau)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(s-\lambda)^2}{t+\tau}} x(\lambda) d\lambda = (U_{t+\tau} x)(s),$$

因为

$$\frac{1}{\sqrt{\tau t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{t}} e^{-\frac{(\sigma-s)^2}{\tau}} d\sigma =$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{\tau t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left(\sqrt{\tau+t}\,\sigma-\frac{\tau s}{\sqrt{t+\tau}}\right)^2}{\tau t}-\frac{s^2}{t+\tau}} d\sigma =$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{\tau t}} e^{-\frac{s^2}{t+\tau}}\cdot\frac{\sqrt{\tau t}}{\sqrt{t+\tau}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda=\frac{1}{\sqrt{\pi(t+\tau)}} e^{-\frac{s^2}{t+\tau}}.$$

仿此也不难証明 $\|U_t\|\leqslant 1.$

为了証明 $\lim\limits_{t\to 0} U_t x = x$(强),

注意

$$(U_t x)(s)-x(s)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2}[x(s-\sigma\sqrt{t})-x(s)]d\sigma,$$

从而利用 Fubini 定理不难看出

$$\|U_t x - x\|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma\int_{-\infty}^{\infty}|x(s-\sigma\sqrt{t})-x(s)|ds.$$

但
$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(s-\sigma\sqrt{t})-x(s)|ds\leqslant 2\|x\|,$$

并且当固定 σ 时，上面不等式左边随 $t\to 0$ 而 $\to 0$, 从而依 Lebesgue 在积分号下取極限的定理

$$\lim_{t\to 0}\|U_t x - x\| = 0.$$

由于 $\|U_t x - U_{t_0} x\|\leqslant\|U_{t-t_0} x - x\|\ (t>t_0),$

从而 (U_t) 是强連續的。

例 5. 在 $L'(-\infty,\infty)$ 中，令

$$(U_t x)(s)=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}x(s-ku),\ \lambda>0,\ u>0.$$

由于
$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\tau^l t^{m-l}}{l!(m-l)!}=\frac{(\tau+t)^m}{m!},$$

可知

$$(U_tU_\tau x)(s)=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda\tau}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^l}{l!}x(s-ku-lu)=$$

$$=e^{-\lambda(t+\tau)}\sum_{m=0}^{\infty}x(s-mu)\sum_{l=0}^{m}\frac{\lambda^m t^{m-l}\tau^l}{l!(m-l)!}=$$

$$=e^{-\lambda(t+\tau)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m(\tau+t)^m}{m}x(s-mu)=(U_{t+\tau}x)(s),$$

即
$$U_tU_\tau=U_{t+\tau}\ (t>0,\ \tau>0).$$

依 Fubini 定理，并注意

$$e^{\lambda t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!},$$

不难驗明
$$\|U_t\|\leqslant 1.$$

再依 Fubini 定理。

$$\|U_tx-x\|\leqslant e^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\sup\|x(s-ku)-x(s)\|\leqslant$$

$$\leqslant e^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k}2\|x\|=$$

$$=e^{-\lambda t}(e^{\lambda t}-1)2\|x\|\to 0\ (t\to 0),$$

从而(U_t)是强連續的。

定理 1. 設(T_t)是有界綫性算子的强連續半群，那末必存在一数$\gamma\geqslant-\infty$，使

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\log\|T_t\|}{t}=\inf_{t>0}\frac{\log\|T_t\|}{t}=\gamma<+\infty,$$

并且在t的任意有旁区間中，$\|T_t\|$有界。如果这半群(T_t)还是标准型的，那末必存在正数δ，使当$t\downarrow 0$时，

$$\|T_t\|\leqslant 1+\delta t;$$

而逆命題也成立。

証 如果在一有旁区間$[a,b]$中$\|T_t\|$無界，依 Bolzano-Weierstrass 定理必存在一数列(t_n)，使

$$\lim_{n\to\infty}t_n=t_0\in[a,b],\ \|T_{t_n}\|\geqslant n\ (n=1,2,\cdots).\qquad(*)$$

由强連續性得知对于一切$x\in E$，

$$\lim_{n\to\infty}T_{t_n}x=T_{t_0}x(\text{强})。$$

依共鳴定理，$(\|T_{t_n}\|)$有界，与$(*)$矛盾。

令

$$p(t)=\log\|T_t\|,$$

那末因

$$\|T_{t+s}\|=\|T_t\cdot T_s\|\leqslant\|T_t\|\|T_s\|,$$

可知

$$p(t+s)\leqslant p(t)+p(s),\ p(0)=0.$$

于是

$$p(n+m)\leqslant p(n)+p(m),\ m,n\text{ 是任意整数。}$$

我們考察

$$\inf_{n\in N}\frac{\log\|T_n\|}{n}=\gamma>-\infty$$

的情形。对于任意$\varepsilon>0$，可取m，使

$$\frac{p(m)}{m}<\gamma+\varepsilon.$$

任何整数n可以表示成$n=qm+r$，$0\leqslant r\leqslant m-1$。于是

$$p(n)=p(qm+r)\leqslant\underbrace{p(m)+\cdots+p(m)}_{q\text{ 項}}+p(r)=q\,p(m)+p(r),$$

$$\frac{p(n)}{n}=\frac{p(qm+r)}{qm+r}\leqslant\frac{q\,p(m)+p(r)}{qm+r}=\frac{p(m)}{m}\frac{qm}{qm+r}+\frac{p(r)}{n},$$

于是
$$\gamma\leqslant\frac{p(n)}{n}<(\gamma+\varepsilon)\frac{qm}{qm+r}+\frac{p(r)}{n}.$$

令 $n\to\infty$, m 既固定，必然 $q\to\infty$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{n}=\gamma.$$

現在考察任意一組实数 λ_n, 使 $\lambda_n\uparrow\infty$。令 $k_n=[\lambda_n]$ 是 λ_n 的整数部分。那末 $\lambda_n=k_n+\varepsilon_n$, $0\leqslant\varepsilon_n<1$, 而

$$\frac{p(\lambda_n)}{\lambda_n}\leqslant\frac{p(k_n)+p(\varepsilon_n)}{k_n}\cdot\frac{k_n}{k_n+\varepsilon_n}.$$

既然 $\|T_t\|$ 在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 中有界，所以 $p(t)$ 在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 中有界，从而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{p(\lambda_n)}{\lambda_n}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{p(k_n)}{k_n}=\gamma.$$

同理，
$$\frac{p(\lambda_n)}{\lambda_n}\geqslant\frac{p(k_n+1)-p(1-\varepsilon_n)}{k_n+1}\cdot\frac{k_n+1}{\lambda_n},$$

从而
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{p(\lambda_n)}{\lambda_n}\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{p(k_n+1)}{k_n+1}=\gamma.$$

合并上述，可知对于任意数列 $\lambda_n\uparrow\infty$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p(\lambda_n)}{\lambda_n}\text{存在并且}=\gamma.$$

最后一不等式与标准型条件等值，这是显然的。

定理 2. 設 (U_t) 是 Banach 空間 E 中的标准型綫性算子的强連續單参数半群，那末

$$\mathfrak{D}\equiv\left\{x\,\middle|\,x\in E,\ \exists\lim_{h\downarrow 0}\frac{U_h-I}{h}x\equiv Ax\ (\text{弱})\right\},$$

卽使花括号中的弱極限存在的那些元 $x\in E$ 的全体，是 E 中稠集，并且对于每个 $x\in\mathfrak{D}$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{U_{t+h}-U_t}{h}\cdot x=AU_tx=U_tAx\ (\text{强})。$$

証: 对于 $x\in E$, 取复値連續函数 $\varphi(s)$, $\varphi(s)U_sx$ 是由 $[0,\infty)$ 到 E 中的連續函数。作 Bochner 积分

$$C_\varphi x=\int_0^\infty \varphi(s)U_sx\,ds.$$

如果 $\varphi(s)e^{\beta s}\in L^1(0,\infty)$, 依第二章 § 6, 定义 7, 上面的 Bochner 积分确存在, 因为 $\|\varphi(s)U_sx\|\leqslant|\varphi(s)|e^{\beta s}$。我們的証明主要是証

$$\{C_\varphi x\,|\,x\in E\}$$

在 E 中稠, 而对于元 $C_\varphi x$,

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{U_h-I}{h}C_\varphi x\ (\text{弱})$$

存在. 为了証明 $\{C_\varphi x\}$ 在 E 中稠, 我們要取 $\varphi(s)$, 使它的値主要集中在 0 的附近(这种方法在 Fourier 积分或其他場合都常見), 于是由于对足够小的 s 値, $(U_s-I)x$ 按范数很小, 不难証明所要求的。如此, 必須取适合上述条件的 $\varphi(s)$. 卽取 $\varphi(s)e^{\beta s}\in L^1(0,\infty)$, 使 $\varphi(s)$ 是連續导函数 $\varphi'(s)$ 并滿足

$$\lim_{h\downarrow 0}\int_h^\infty e^{\beta s}\left|\frac{\varphi(s-h)-\varphi(s)}{h}+\varphi'(s)\right|ds=0. \tag{3}$$

实际上, 可取

$$\varphi_\delta(s)=\delta e^{-s\delta}\quad(\delta>0).$$

这时,

$$\varphi_\delta'(s)=-\delta^2e^{-s\delta},$$

注意

$$\int_0^\infty \delta e^{-s\delta}\,ds=-e^{-s\delta}\Big|_0^\infty=1$$

于是

$$\int_h^\infty e^{\beta s}\left|-\delta^2e^{-s\delta}+\frac{Se^{h\delta}e^{-s\delta}-\delta e^{-s\delta}}{h}\right|ds=$$

$$=\int_h^\infty e^{-(\delta-\beta)s}\left|\delta\left(\frac{e^{\delta h}-1}{h}-\delta\right)\right|ds\to 0\quad(h\downarrow 0)$$

因为 δ 固定时，可取 h 足够小，使上式右边积分号下絕对值中的那項与 $\frac{\delta^3 h}{2!}$ 是同阶小量。由于 $\|U_s x\| \leqslant e^{\beta s}\|x\|$ 对一切 s 成立，当 $\delta > \beta$ 时 $C_\varphi x$ 存在，并且

$$\frac{U_h - I}{h} \cdot C_\varphi x = \frac{1}{h}\int_0^\infty \varphi(s) U_h U_s x\, ds - \frac{1}{h}\int_0^\infty \varphi(s) U_s x \cdot ds =$$

$$= \int_h^\infty \frac{\varphi(s-h) - \varphi(s)}{h} U_s x\, ds - \frac{1}{h}\int_0^h \varphi(s) U_s x\, ds.$$

既然 $U_0 = I$ 并且 $\varphi(s) U_s x$ 是 s 的連續函数，而依(3)

$$\left\| \int_h^\infty \frac{\varphi(s-h) - \varphi(s)}{h} U_s ds + \int_0^\infty \varphi'(s) U_s x ds \right\| =$$

$$= \left\| \int_h^\infty \left[\frac{\varphi(s-h) - \varphi(s)}{h} + \varphi'(s) \right] U_s x\, ds + \int_0^h \varphi'(s) U_s x\, ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_h^\infty e^{\beta s} \left| \frac{\varphi(s-h) - \varphi(s)}{h} + \varphi'(s) \right| \|x\| ds +$$

$$+ \int_0^h e^{\beta s} \left| \varphi'(s) \right| \|x\| ds \to 0 \quad (h \to 0),$$

可知 $\lim\limits_{h \downarrow 0} \frac{U_h - I}{h} \cdot C_\varphi x$（强）存在，且 $= C_{-\varphi'} x - \varphi(0) x$.

特别令 $\varphi(s) = \varphi_\delta(s)$，由于 $\varphi'_\delta(s) = -\delta \varphi_\delta(s)$，可知

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{U_h - I}{h} C_{\varphi_\delta} x \text{ 存在（强）且} = \delta(C_{\varphi_\delta} x - x). \tag{4}$$

为了証明 $\{C_\varphi x \mid x \in E\}$ 在 E 中稠，只須証当取 δ 足够大时，$C_{\varphi_\delta} x$ 与 x 足够接近。事实上，因 $\int_0^\infty \delta e^{-\delta s} ds = 1$,

$$\|C_{\delta}x-x\|=\left\|\int_0^\infty \delta e^{-\delta s}(U_s x-x)ds\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\int_0^\varepsilon \delta e^{-\delta s}(U_s x-x)ds\right\|+\left\|\int_\varepsilon^\infty \delta e^{-\delta s}(U_s x-x)ds\right\|.$$

先取 ε 足够小，使 $0\leqslant s<\varepsilon$ 时，$\|U_s x-x\|<\frac{\eta}{2}$，从而上面不等式右边第一項

$$\leqslant\frac{\eta}{2}\int_0^\infty \delta e^{-\delta s}\,ds=\frac{\eta}{2},$$

而第二項

$$\leqslant 2\|x\|\int_\varepsilon^\infty \delta e^{-\delta s}(e^{\beta s}+1)ds=2\|x\|\left[e^{-\delta\varepsilon}+\frac{\delta}{\delta-\beta}e^{-(\delta-\beta)\varepsilon}\right].$$

从而 ε 既已定而 $\delta>\beta$，这项随 $\delta\to\infty$ 而$\to 0$。于是依(4)可知使

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{U_h-I}{h}x\ (\text{强})$$

存在的 x 在 E 中稠。因此 $\mathfrak{D}$ 更在 E 中稠。

現在来証定理的第二部分。对于 $x\in\mathfrak{D}$，注意連續綫性算子必弱連續，

$$U_t\cdot\lim_{h\downarrow 0}\frac{U_h-I}{h}\cdot x(\text{弱})=\lim_{h\downarrow 0}\frac{U_{h+t}-U_t}{h}\cdot x(\text{弱})=$$

$$=\lim_{h\downarrow 0}\frac{U_h-I}{h}U_t x(\text{弱}),\qquad (5)$$

从而 $x\in\mathfrak{D}\Longrightarrow U_t x\in\mathfrak{D}$，并且 $AU_t x=U_t Ax$。这就是說，$A\eta U_t$。[①]

由(5)，在 Banach 空間 E 中取値的抽象函数 $U_t x$ 的右弱微商 $D_+U_t x$

① 在第三章，这符号曾对 Hilbert 空間下过定义，这里按同样意义用于 Banach 空間。

存在，并且

$$D_+U_tx=AU_tx=U_tAx.$$

又抽象函数 U_tAx 对 t 是强連續的，从而对于任意 $f\in E^*$，右微商

$$D_+f(U_tx)=f(U_tAx)$$

是数值連續函数，而对于具連續右微商的数值函数，不难証明中値公式成立，[1] 于是由中値公式，可知 $f(U_tx)-f(x)=D_+f(U_\xi x)\cdot t\ (0\leqslant\leqslant\xi\leqslant t)$。

$$f(U_tx)-f(x)=\int_0^t D_+f(U_sx)ds=$$

$$=\int_0^t f(U_sAx)ds=f\left(\int_0^t U_sAx\,ds\right),$$

上式右边 f 里面的主目是 Bochner 积分。$f\in E^*$ 既是任意的，可知

$$U_tx-x=\int_0^t U_sAx\,ds.$$

U_sAx 既是 s 的强連續函数，所以

$$\lim_{h\to 0}\frac{U_{t+h}-U_t}{h}\cdot x(强)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}U_sAx\,ds=U_tAx\ 存在,$$

証完。

定义 2. 由單参数半群 $\{U_t\}$ 按定理 2 中的关系决定的算子 A 叫做半群的無穷小母元。

下面討論半群的無穷小母元的性質。

定理 3. 标准型半群的無穷小母元 A 必是閉綫性算子，而且

$$T_\lambda\equiv\left(I-\frac{1}{\lambda}A\right)^{-1}\ (\lambda>\beta)$$

[1] 証明与平常数学分析書中具連續微商的数值函数的場合相同。

作为由 E 到 E 中的有界綫性算子存在，并滿足

$$\|T_\lambda\| \leqslant \left(1-\frac{\beta}{\lambda}\right)^{-1}, \ (\lambda>\beta).$$

証： 設 $x_n \in \mathfrak{D}$ $(n=1, 2, \cdots)$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ (强)}, \quad \lim_{n\to\infty} Ax_n = z \text{ (强)},$$

由定理 2 的証明，可知

$$U_t x_n - x_n = \int_0^t U_s A x_n ds.$$

在兩边取 $n\to\infty$ 时的强極限，不難看出

$$U_t x - x = \int_0^t U_s Az\, ds.$$

由定理 2 的証明的最后部分可知 $x\in\mathfrak{D}$，并且 $Ax=z$，从而証明了 A 的閉性。

为了証 T_λ 存在，首先証明 $A-\lambda I$ 的值域 $\mathfrak{W}(A-\lambda I)$ 在 E 中稠。如果不然，那末必存在 $f\in E^*$，使

$$f\neq\Theta, f(Ax-\lambda x)=0 \text{ 对一切 } x\in\mathfrak{D} \text{ 成立。}$$

既然 $U_t\mathfrak{D}\subset\mathfrak{D}$，所以对于一切 $x\in\mathfrak{D}$,

$$f(AU_t x) = \lambda f(U_t x).$$

依定理 2,

$$\frac{d}{dt} f(U_t x) = \lambda f(U_t x).$$

数值函数 $f(U_t x)$ 滿足上述微分方程及初始条件

$$f(U_0 x) = f(x),$$

从而解出，得

$$f(U_t x) = f(x) e^{\lambda t}.$$

既然 $f\neq\Theta$，而 $\overline{\mathfrak{D}}=E$，必存在 $x\in\mathfrak{D}$，使 $f(x)\neq 0$，于是当 $t\to\infty$ 时，依上面等式 $f(U_t x)$ 是無界的。但另一方面，

$$|f(U_\tau x)| \leqslant \|f\|\|U_\tau\|\|x\| \leqslant \|f\|\|x\| e^{\beta\tau},$$

从而当 $\lambda>\beta$ 时，与上面結果冲突。

現在証明对于一切 $x\in\mathfrak{D}$,

$$\|(A-\lambda I)x\|\geqslant(\lambda-\beta)\|x\|. \tag{6}$$

这式一經証明，与前面已証部分結合便証明了 T^{λ} 的遍处存在且 $\|T^{\lambda}\|\leqslant\leqslant 1-\frac{\beta}{\lambda}$，而定理就完全得証了。事实上，由于

$$\overline{\mathfrak{W}(A-\lambda I)}=E,$$

对于任意 $y\in E$, $\exists x_m\in\mathfrak{D}$, 使

$$\lim_{m\to\infty}(A-\lambda I)x_m=y\ (\text{强})。$$

依(6),
$$\|(A-\lambda I)(x_p-x_q)\|\geqslant(\lambda-\beta)\|x_p-x_q\|,$$

从而(x_p)是强斂列。設它的極限是 x_0。由于 A 是閉算子，必然 $x_0\in\mathfrak{D}$，并且 $(A-\lambda I)x_0=y$，从而，$\mathfrak{W}(A-\lambda I)=E$，于是全部証畢。

为了証明(6)，姑設存在 $x\in\mathfrak{D}$, $\|x\|=1$, 使

$$\|(A-\lambda I)x\|=\alpha<(\lambda-\beta).$$

那末必存在 $f\in E^*$, 使 $f(x)=\|x\|=1$, $\|f\|=1$, 但

$$\frac{dU_tx}{dt}=U_tAx=\lambda U_tx+U_t(A-\lambda I)x.$$

令 $\varphi(t)=f(U_tx)$, $\psi(t)=f(U_t(A-\lambda I)x)$, 可得

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=\lambda\varphi(t)+\psi(t),\ \varphi(0)=1. \tag{7}$$

解出帶初始条件的微分方程(7)，便得

$$\varphi(t)=e^{\lambda t}\left\{\int_0^t e^{-\lambda t}\psi(t)dt+1\right\}.$$

但
$$|\psi(t)|\leqslant\|f\|\|U_t\|\|(A-\lambda I)x\|\leqslant\alpha e^{\beta t}$$

从而
$$|\varphi(t)|\geqslant e^{\lambda t}\left\{1-\alpha\cdot\frac{1}{\lambda-\beta}\left(1-e^{-(\lambda-\beta)t}\right)\right\}\to\infty\ (t\to\infty).$$

这与
$$|\varphi(t)|\leqslant\|f\|\|U_t\|\|x\|\leqslant\|f\|\|x\|e^{\beta t}$$

矛盾。証完。

定理 4. 在定理 2, 3 的条件下，A 与 T_λ 交换，并且

$$x\in E\Longrightarrow AT_\lambda x=\lambda(T_\lambda-I)x,\ x\in\mathfrak{D}\Longrightarrow T_\lambda Ax=\lambda(T_\lambda-I)x; \tag{8}$$

$$T_\lambda x=\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}U_t x\,dt(x\in E)\ \ (\lambda>\beta); \tag{9}$$

$$\lim_{n\to\infty} T_n x=x\ (\text{强})\ (x\in E)\ (n\text{ 表自然数}); \tag{10}$$

$$\lim_{n\to\infty} AT_n x=Ax\ (\text{强})\ (x\in\mathfrak{D}). \tag{11}$$

証: 对于任意 $x\in E$,

$$\left(I-\frac{1}{\lambda}A\right)\left(I-\frac{1}{\lambda}A\right)^{-1}x=x,\ \ 因\ T_\lambda x-\frac{1}{\lambda}AT_\lambda x=x.$$

又对于 $x\in\mathfrak{D}$,

$$\left(I-\frac{1}{\lambda}A\right)^{-1}\left(I-\frac{1}{\lambda}A\right)x=x,\ \ 因\ T_\lambda x-\frac{1}{\lambda}T_\lambda Ax=x.$$

于是(8)得証。

在定理 2 的証明中已得对于 $x\in E$, 令

$$\varphi_\lambda(t)=\lambda e^{-\lambda t},$$

$$AC_{\varphi_\lambda}x=(C_{-\varphi_\lambda'}-\varphi_\lambda(0)I)x=\lambda(C_{\varphi_\lambda}-I)x,$$

因为

$$C_{-\varphi_\lambda'}x=\int_0^\infty -\varphi_\lambda'(s)U_s x\,ds=\lambda\int_0^\infty \varphi_\lambda(s)U_s(\lambda)ds=\lambda C_{\varphi_\lambda}x.$$

由此,

$$\left(I-\frac{1}{\lambda}A\right)C_{\varphi_\lambda}\lambda=x,\ 因\ C_{\varphi_\lambda}x=T_\lambda\left(I-\frac{1}{\lambda}A\right)C_{\varphi_\lambda}=T_\lambda x.$$

于是
$$T_\lambda x=\int_0^\infty \varphi_\lambda(s)U_s x\,ds=\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}U_t x\,dt\ \ (\lambda>\beta).$$

由(8)得
$$x=T_n x-\frac{1}{n}T_n Ax\ \ (x\in\mathfrak{D}).$$

但依定理 3, $\|T_n\|\leqslant\left(1-\frac{\beta}{n}\right)^{-1}\leqslant\left(1-\frac{\beta}{n_0}\right)^{-1}$，这里 n_0 表示第一个 $>\beta$ 的

自然数。在上式取 $n\to\infty$ 时的極限，得

$$x=\lim_{n\to\infty}T_nx\,(\text{强})\quad(x\in\mathfrak{D}).$$

既然 $\overline{\mathfrak{D}}=E$，且 $\|T_n\|\leqslant\left(1-\frac{\beta}{n_0}\right)^{-1}$，依第二章§5 綫性算子列强斂的条件，可知

$$x=\lim_{n\to\infty}T_nx\,(\text{强})\quad(x\in E).$$

于是(10)得証。

对于 $x\in\mathfrak{D}$，由(8)得知 $AT_nx=T_nAx$，从而由(10)得(11)。

注：在定理 3 中，曾对实数 $\lambda>\beta$ 証明有界綫性算子 T_λ 的存在。但只要 $R\lambda>0$，上述一切仍成立，即

$$T_\lambda\equiv\left(I-\frac{1}{\lambda}A\right)^{-1}$$

是有界綫性算子，滿足

$$\|T_\lambda\|\leqslant\frac{1}{R\lambda-\beta}.$$

注意
$$R(\lambda;A)\equiv\frac{1}{\lambda}T_\lambda=(\lambda I-A)^{-1}$$

正是 A 的豫解算子，从而由定理 3, 4 知 A 的豫解算子是有界綫性算子，并且

$$R(\lambda;A)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}U_tx\,dt\quad(x\in E).\tag{12}$$

这式在以后是有用的。

定理 5.（表現定理）：在定理 2, 3, 4 的假定下，对于任意 $x\in E$，对于任意有穷区間中的 t 一致地

$$U_tx=\lim_{n\to\infty}e^{tAT_n}x(\text{强})\equiv\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(tAT_n)^m\cdot x\ (\text{强})。\tag{13}$$

証：由定理 4 的(8)得知 AT_n 是定义在空間 E 上的有界綫性算子。于是 $AT_n\in\mathfrak{E}(E)$，而"算子函数" e^{tAT_n} 是指 $\mathfrak{E}(E)$ 中的無穷級数

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(tAT_n)^m. \tag{14}$$

由(8)，
$$\|tAT_n\|=\|tn(T_n-I)\|\leqslant tn+tn\left(1-\frac{\beta}{n}\right)^{-1},$$

从而級数(14)对于 t 的任意有穷区間絕对且一致收斂，而(14)决定 $\mathfrak{E}(E)$ 中的一元。由(8)不难看出，

$$e^{tAT_n}=e^{tnT_n}e^{-tnI},$$

这里 $e^{-tnI}=e^{-tn}\cdot I$，于是，由 $\|T_n\|\leqslant\left(1-\frac{\beta}{n}\right)^{-1}$，得

$$\|e^{tAT_n}\|\leqslant e^{-tn+tn\left(1-\frac{\beta}{n}\right)^{-1}}=e^{\beta t\left(1-\frac{\beta}{n}\right)^{-1}}.$$

由(9)不难看出 T_n 与 U_t 交换，从而 $AT_n\equiv n(T_n-I)$ 也与 U_t 交换。

对于 $x\in\mathfrak{D}$，由定理1得

$$\|U_tx-e^{tAT_n}\cdot x\|=\left\|e^{(t-s)AT_n}U_sx\Big|_{s=t}-e^{(t-s)AT_n}U_sx\Big|_{s=0}\right\|=$$

$$=\left\|\int_0^t\left(\frac{d}{ds}e^{(t-s)AT_n}U_sx\right)ds\right\|=$$

$$=\left\|\int_0^t e^{(t-s)AT_n}U_s(A-AT_n)x\,ds\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^t e^{\beta(t-s)\left(1-\frac{\beta}{n}\right)^{-1}}e^{\beta s}\|(A-AT_n)x\|\,ds,$$

这里利用了下列微分关系：

$$\frac{d}{ds}e^{(t-s)AT_n}U_sx=e^{(t-s)AT_n}(-AT_n)U_sx+e^{(t-s)AT_n}AU_sx=$$

$$=e^{(t-s)AT_n}(A-AT_n)U_sx.$$

注意 $e^{\frac{\beta(t-s)}{1-\beta/n}+\beta s}$ 作为 s 的函数当 $0\leqslant s\leqslant t$ 时有界。由(11)可知，对于

任意有穷区間中的 t 值一致地

$$U_t x = \lim_{n\to\infty} e^{tAT_n} x \text{ (强)}, \quad x \in \mathfrak{D}.$$

但 $\overline{\mathfrak{D}} = E$, $\|U_t\| \leqslant e^{\beta t} \leqslant e^{\beta\alpha}$,

$$\|e^{tAT_n}\| \leqslant e^{\beta t\left(1-\frac{\beta}{n}\right)^{-1}} \leqslant e^{\beta\alpha\left(1-\frac{\beta}{n}\right)^{-1}},$$

如果 t 在有穷区間 $[0, \alpha]$ 中变化。从而不难看出(13)对于一切 $x \in E$, 对于任意有穷区間中的一切 t 一致成立。証完。

定理 6. 設 A 是定义在 Banach 空間上的稠集 $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(A)$ 上的綫性算子。設

$$T_n = \left(I - \frac{1}{n} A\right)^{-1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

是由 E 到 E 中的有界綫性算子，并且 $\|T_n\| \leqslant \left(1 - \frac{\beta}{n}\right)^{-1}$ $(n > \beta$, n 是自然数)，那末必存在一意决定的綫性算子的單参数强連續标准型半群 $\{U_t \mid t \geqslant 0\}$，使对于每个 $x \in \mathfrak{D}(A)$,

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{U_h - I}{h} x = Ax \text{ (弱)},$$

并且(10)成立。

注: 这是前几个定理的逆命題，也是綫性算子的單参数强連續半群的無穷小母元的特征。

証: 不难看出(8)(10)(11)仍成立。事实上，由

$$\left(I - \frac{1}{n} A\right) T_n x = x \,(x \in E) \text{ 与 } T_n\left(I - \frac{1}{n} A\right) x = x \,(x \in \mathfrak{D})$$

立即得出(8)。由上面第二式，令 $n \to \infty$, 利用(8), 得

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = x \text{ (强)} \quad (x \in \mathfrak{D}(A)).$$

然后利用 $\mathfrak{D}(A)$ 稠。并且 $\|T_n\|$ 对 n 一致有界($\leqslant \left(1 - \frac{\beta}{n_0}\right)^{-1}$, n_0 表示 $> \beta$ 的第一个自然数)，不难看出上面極限式对任意 $x \in E$ 也成立。又与定理 4 的証明一样可知 $AT_n x \to Ax$ (强) $(n \to \infty)$。旣然 $T_n A \subset AT_n$,

可知当 $x\in\mathfrak{D}(A)$ 时，

$$AT_nx=T_nAx\to Ax\ （强）.$$

令

$$U_t^{(n)}=e^{tAT_n},$$

仿定理 5 証明中的最前部分可知 $\|U_t^{(n)}\|\leqslant e^{\frac{\beta t}{1-\beta/n}}$。又不难看出，

$$\frac{dU_t^{(n)}}{dt}\cdot x=\lim_{h\to\infty}\frac{e^{(t+h)AT_n}-e^{tAT_n}}{h}\cdot x=$$

$$=\lim_{h\to\infty}\frac{e^{hAT_n}-1}{h}\cdot e^{tAT_n}=AT_ne^{tAT_n}x=$$

$$=AT_nU_t^{(n)}x=U_t^{(n)}AT_nx,$$

这里利用了 e^{hAT_n} 的無穷級数展开式。$(U_t^{(n)})$ 是綫性算子的强連續标准型單参数半群。由定理 2 証明的最后部分可知

$$U_t^{(n)}x-x=\int_0^t U_s^{(n)}AT_nx\,ds,\ x\in E. \tag{15}$$

不难看出，T_n 与 T_m 交换，从而 $AT_n=n(T_n-I)$ 与 $U_t^{(m)}=e^{tAT_m}$ 交换。于是与定理 5 的証明相仿，

$$\|U_t^{(m)}x-U_t^{(n)}x\|=\left\|\int_0^t\left(\frac{d}{ds}e^{(t-s)AT_n}\cdot U_s^{(m)}x\right)ds\right\|=$$

$$=\left\|\int_0^t e^{(t-s)AT_n}U_s^{(m)}(AT_m-AT_n)x\,ds\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^t e^{\beta(t-s)\Big/\left(1-\frac{\beta}{n}\right)}\cdot e^{\beta s\Big/\left(1-\frac{\beta}{m}\right)}\cdot\|(T_m-T_n)Ax\|\,ds.$$

依(11)对于任意 $x\in\mathfrak{D}$，对于 t 值的任意有穷区間，一致地

$$\lim_{n\to\infty}U_t^{(n)}x=U_tx\ （强） \tag{16}$$

存在。U_t 显然是 $\mathfrak{D}$ 上的綫性算子。但 $\|U_t^{(n)}\|\leqslant e^{\frac{\beta t}{1-\beta/n}}\leqslant e^{\frac{\beta\alpha}{1-\beta/n}}$。

$(t\in[0,\alpha])$且$\overline{\mathfrak{D}}=E$, 依第二章§5, (16)对于一切$x\in E$成立。由$(U_t^{(n)})$是半群,容易推出$(U_t)$是半群。由(15)令$n\to\infty$, 并利用(11),得

$$U_tx-x=\int_0^t U_sAxds\quad(x\in\mathfrak{D}).①$$

这正是說(U_t)的無穷小母元是A。由定理5可知(U_t)一意决定。

定理 7. (Stone): 設(U_t)是 Hilbert 空間$\mathfrak{H}$中保范算子的連續單参数群:

1°. $U_tU_s=U_{t+s}(-\infty<t,s<+\infty)$, $U_0=I$;

2°. $\lim\limits_{t\to t_0} U_tx=U_{t_0}x$ (强) $(x\in\mathfrak{H})$。

那末必存在自伴綫性算子

$$H=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dE(\lambda),$$

使

$$U_t=e^{itH}\equiv\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}\,dE(\lambda).$$

証: 依定理2及3,存在稠定閉綫性算子A,使

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{U_h-1}{h}x=Ax\ (\text{弱}),$$

并且

$$\frac{dU_t}{dt}\cdot x=AU_tx=U_tAx\ (\text{强})。$$

令$H=-iA$, 对于$x,y\in\mathfrak{D}(A)\equiv\mathfrak{D}(H)$,

$$(Hx,y)=-i(Ax,y)=\frac{1}{i}\frac{d}{dt}(U_tx,y)\Big|_{t=0}=$$

$$=\frac{1}{i}\frac{d}{dt}(x,U_{-t}y)\Big|_{t=0}=i\frac{d}{d\tau}(x,U_\tau y)\Big|_{\tau=0}(\text{即令}\tau=-t)=$$

$$=(x,-iAy)=(x,Hy).$$

---

① $\|U^{(n)}x_n-Ux\|\leqslant\|U^{(n)}x_n-U^{(n)}x\|+\|U^{(n)}x-Ux\|\leqslant e^{\frac{\beta t}{1-\beta/n}}\|x_n-x\|+$ $+\|U^{(n)}x-Ux\|\to 0\ (n\to\infty)$。

这就是説，H是对称算子。

由定理 3 的証明已知 $\mathfrak{W}(H+iI)=\mathfrak{H}$，而那里是由 $t\to\infty$ 証出的。同样，令 $t\to\infty$，也可証明$\mathfrak{W}(H-iI)=\mathfrak{H}$。这就是説$H$的 Cayley 变式 V 是保范的，从而H是自伴的。設H的譜分解是

$$H=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda).$$

利用定理 5，得

$$U_t\cdot x=\lim_{n\to\infty}e^{tAT_n}\cdot x=\lim_{n\to\infty}e^{nt\left\{\left(I-i\frac{1}{n}H\right)^{-1}-I\right\}}\cdot x=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{nt\left\{\left(1-\frac{i}{n}\lambda\right)^{-1}-1\right\}}dE(\lambda)x=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t\left(1-i\frac{1}{n}\lambda\right)^{-1}}dE(\lambda)x=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}dE(\lambda)x(\text{强})。$$

这里在积分号下取極限是合法的，因为

$$\left|\frac{i\lambda t}{1-i\frac{1}{n}\lambda}\right|=\frac{\lambda t}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{n^2}}}\leqslant\frac{\lambda t}{\sqrt{1+\lambda^2}}\leqslant\text{常数}。$$

証完。

注： 在 Stone 定理的应用中，常需把条件放寬。事实上，V. Neumann 就可分 Hilbert 空間的情形在只假定U_t按 t 弱可測証明了 Stone 定理。下面証明这在一般可分 Banach 空間情形也成立。

定理 8. 設E是可分 Banach 空間。有一族由E到E中的压縮綫性算子 $U_t(t>0)$ 滿足

$$U_tU_{t'}=U_{t+t'}\ \ (t,t'>0),$$

并且对于任意 $f\in E^*$ 与 $x\in E$，$f(U_tx)$ 是 t 的可測函数，那末 U_tx 是 t

的連續函数，即对于任意 $x\in E$,

$$\lim_{t\to t_0} U_t x = U_{t_0} x \text{（强）。}$$

証：既然 E 是可分的，而 $U_t x$ 弱可測，依第二章 §6, $U_t x$ 是强可測。設 $0<\alpha<\eta<\beta<\xi$, 且 $\beta<\xi-\varepsilon$, $\varepsilon>0$, 那末

$$U_\xi x = U_\eta(U_{\xi-\eta} x)$$

的右边与 η 無关，所以按 η 取 Bochner 积分，得

$$(\beta-\alpha)(U_{\xi\pm\varepsilon}-U_\xi)x=\int_\alpha^\beta U_\eta(U_{\xi\pm\varepsilon-\eta}-U_{\xi-\eta})x\cdot d\eta,$$

令 $\xi-\eta=\tau$, $dy=-d\tau$。于是

$$(\beta-\alpha)\|(U_{\xi\pm\varepsilon}-U_\xi)x\|\leqslant\int_{\xi-\alpha}^{\xi-\beta}\|U_{\tau\pm\varepsilon}-U_\tau)\|d\tau.$$

依 Bochner 积分的定义，对于任意 $\delta>0$, 可取阶段函数 $V_t x$, 使

$$\int_{\xi-\beta-\varepsilon}^{\xi-\alpha-\varepsilon}\|(V_\tau-U_\tau)x\|d\tau<\delta,$$

并且 $$\|V_t x\|\leqslant 2\|U_t x\|.$$

于是对于实数軸上可測有界集 A, 令

$$V_t x\equiv a\in E\text{（如果 } t\in A\text{）},\quad V_t x\equiv 0\text{（如果 } t\notin A\text{）},$$

那末，对于这个 V_t,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\xi-\beta}^{\xi-\alpha}\|(V_{\tau\pm\xi}-V_\tau)x\|d\tau=0,$$

因为 A 与把 A 移动 $\pm\varepsilon$ 所得的集的对称差的 Lebesgue 测度随 $\varepsilon\to 0$ 而 $\to 0$。由此可得

$$\|(U_{\xi\pm\varepsilon}-U_\xi)x\|\to 0,$$

証完。

参考文献

[1] Dunford, N: On one parameter groups of linear transformations, Ann. Math. (2) 39 (1938), 569—573.

[2] 深宮政范 (Fukamiya, M.): On one-parameter groups of operators, Proc. Imp. Acad. Sci. Tokyo, 16 (1940) 262—265.

[3] Гельфанд, И. М.: Об одно параметрических группах операtоров в нормированном Пространстве. Дан. 25 (1939), 711—716.

[4] Hadamard, J.: Principe de Huyghens et prolongement analytique. Bull. Soc. Math. Fr. 52 (1924) 見 (Selecta).

[5] Hadamard, J.: Le principe de Huygens, conférence faite le 22 Mai 1924 (Hadamard's lectures).

[6] Hille, E.: Functional analysis and semi-groups, 1948 (有俄譯本)。

[7] Mandl, F.: Quantum mechanics, 1954.

[8] Немыцкий, В. В. и Степанов В. В.: 微分方程定性理論第一章。

[9] Neumann, J. Von: Über einen Satz Von M. H. Stone, Ann. Math. (2) 33 (1932), 567—573.

[10] Stone, M. H. Linear transformations in Hilbert space, III, proc. Nat. Acad. Sc. 16 (1930), 172—175.

[11] Szökefalvi-Nagy, B.: On semi-groups of self-adjoint transformations in Hilbert space, Proc. Nat. Acad. Sc. 24 (1938), 559—560.

[12] 吉田耕作 (Yosida, K.): On the differentiability and the representation of one parameter semi-group of linear operators, J. Math. Soc. Jap. 1 (1948), 15—21.

[13] 吉田耕作: An operator-theoretical treatment of temporally homogeneous Markoff process, J. Math. Soc. Jap. 1 (1948), 244—253.

[14] 吉田耕作: Brownian Motions on the surface of 3-sphere, Ann. Math. Stat, 20 (1940).

[15] 吉田耕作: Integration of Fokker-Planck's equation in a compact Riemannian space, Ark. for mat., (1949) 1—3.

[16] 吉田耕作: Integration of Fokker-Planck's equation with a boundary condition, J. Math. Soc. Jap. 3 (1951), 69—73.

[17] 吉田耕作: Fokker-Planck 方程式 ねよびその积分について。数学 3:3 (1951), 129—136.

§2. 几个应用的例

下面举出前节中結果的几个直接而有趣的应用。

我們首先注意 §1 定理中的表現可以改換成另一形式，在某些应用中更为便利。設(U_t)是压縮綫性算子(即 $\|U_t\|\leqslant 1$)的强連續單参数半群。§1 中的(13)可以写成

$$U_t x = \lim_{h\to 0} e^{t\frac{U_h - I}{h}} x\ (\text{强})\quad (x\in E). \tag{1}$$

事实上，令
$$V_h = \frac{U_h - I}{h},$$
那末
$$\|e^{tV_h}\| = \|e^{-\frac{t}{h}I} e^{\frac{t}{h}U_h}\| \leqslant e^{-\frac{t}{h}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{h}\right)^k \|U_h^k\| \leqslant 1. \tag{2}$$

利用 §1 定理 5 的証明，可知

$$\|U_t x - e^{tV_h} x\| = \|e^{(t-s)V_h} U_s x|_{s=t} - e^{(t-s)V_h} U_s x|_{s=0}\| =$$

$$= \left\|\int_0^t \frac{d}{ds}\left(e^{(t-s)\frac{U_h - I}{h}} U_s x\right) ds\right\| = \left\|\int_0^t e^{(t-s)V_h} U_s (A - V_h) x\, ds\right\|$$

$$\leqslant \int_0^t \|(A - V_h)x\| ds \leqslant \omega \|(A - V_h)x\|,$$

如果把 t 的值限制在有穷区間$[0, \omega]$中。如果 $x\in\mathfrak{D}(A)$依 §1 定理 2, 右边随 $h\to 0$ 而 $\to 0$, 从而上述一串不等式最左端也 $\to 0$。既然 $\mathfrak{D}(A)$在 E 中稠，而依(2)，算子 e^{tV_h} 按范数一致有界。依第二章 §5 的結果，

$$\|U_t x - e^{tV_h} x\| \to 0\ (h\to 0)$$

对每个 $x\in E$ 成立。这正是(1)。

例 1. 考察在 §1 中論过的算子

$$(U_t x)(s) = x(t+s),$$

U_t 看作 Banach 空間 $C(0, \infty)$中的压縮綫性算子組成一个强連續半群。注意

$$V_h x = \frac{1}{h}(U_h - I)x = \frac{1}{h}(x(s+h) - x(s)),$$

从而用差分符号

$$\Delta_h x = \Delta_h^{(1)} x \equiv x(s+h) - x(s),$$

及
$$\Delta_h^{(n)} x = (\Delta_h^{(1)})^n x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x(s+kh)^{①}$$

不难看出，(1)成为

$$x(s+t) = \lim_{h \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{t}{h}\right)^n \Delta_h^{(n)} x(s), \tag{1'}$$

这里極限意味着对 $0 \leqslant s \leqslant \infty$ 是一致的[对 $0 \leqslant t \leqslant \omega$($\omega$ 为任意固定数)也是一致的]。

这式可以看作是 Taylor 公式的推广。由此可以导出著名而熟知的 Weierstrass 逼近定理。事实上，設 $x(t)$是 $C[0, 1]$中的函数，令

$$x(t) = x(1) \quad (t \geqslant 1).$$

現把 $x(t)$延拓成 $C(0, \infty)$中的元。对于任意固定的 $\varepsilon > 0$，取 h 足够小。依(1')可知

$$\left| x(t+s) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{t}{h}\right)^n \Delta_h^{(n)} x(s) \right| < \frac{\varepsilon}{2} (0 \leqslant s < \infty, 0 \leqslant t \leqslant 1),$$

上不等式左边的無穷級数一致收斂($0 \leqslant s < \infty$, $0 \leqslant t \leqslant 1$)。这在上面已經提到。令 $s = 0$，并取自然数 m 足够大，使这个一致收斂級数的前 m 項之和与整个級数相差任意小，就得出了 $x(t)$在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上用一多項

① 例如見 Микеладзе. Ш. Е.: 数学分析的数値方法，第一章 §2。

式的一致逼近。

例 2. 考察 $C(0,\infty)$上的算子

$$(U_t x)(s)=e^{\alpha t}x(s)(R\alpha<0),$$

这时(U_t)形成压縮綫性算子的强連續半群。利用§1定理4,得

$$y_n(s)\equiv(T_n x)(s)=n\int_0^\infty e^{-nt}e^{\alpha t}x(s)dt=\frac{n}{n-\alpha}x(s).$$

如果 n 足够大(使 $R(n-\alpha)>0$),于是

$$(AT_n x)(s)=n(T_n-I)x=\frac{n\alpha}{n-\alpha}x(s).$$

从而

$$(Ax)(s)=\lim_{n\to\infty}(AT_n x)(s)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\alpha}{n-\alpha}x(s)=\alpha x(s).$$

例 3. 考察 $L^1(-\infty,\infty)$上的算子

$$(U_t x)(s)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(s-s_1)^2}{t}}x(s_1)ds_1,\quad (t>0)$$

(U_t)是压縮綫性算子的强連續半群。利用§1定理4,得

$$y_n(s)\equiv(T_n x)(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)d\tau\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\pi t}}ne^{-nt-\frac{(s-\tau)^2}{t}}dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{n}\,e^{-2\sqrt{n}|s-\tau|}x(\tau)dt.$$

这里我們利用了下列公式:

$$\int_0^\infty e^{-\left(t^2+\frac{a^2}{t^2}\right)}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}.$$

如果 $X(s)$ 是 $L^1(-\infty,\infty)$中的連續函数,那末得

$$y_n'(s)=\frac{d}{ds}\left[\int_{-\infty}^{s}\sqrt{n}\,e^{-2\sqrt{n}(s-\tau)}x(\tau)d\tau+\int_{s}^{\infty}\sqrt{n}\,e^{-2\sqrt{n}(\tau-s)}x(\tau)d\tau\right]$$

$$=-2\sqrt{n}\int_{-\infty}^{s}\sqrt{n}\,e^{-2\sqrt{n}(s-\tau)}x(\tau)d\tau+\sqrt{n}\,x(s)+$$

$$+2\sqrt{n}\int_{s}^{\infty}\sqrt{n}\,e^{-2\sqrt{n}(\tau-s)}x(\tau)d\tau-\sqrt{n}\,x(s).$$

而

$$y_n''(s)=4n\int_{-\infty}^{s}\sqrt{n}\,e^{-2\sqrt{n}(s-\tau)}x(\tau)d\tau-2nx(s)+$$

$$+4n\int_{s}^{\infty}\sqrt{n}\,e^{-2\sqrt{n}(\tau-s)}x(\tau)d\tau-2nx(s)=4ny_n(s)-$$

$$-4nx(s).$$

于是

$$(AT_nx)(s)=(Ay_n)(s)=n((T_n-I)x)(s)=ny_n(s)-nx(s)=$$

$$=\frac{1}{4}y_n''(s).$$

注意对于在有穷区間 $(-\alpha,\alpha)$ 外等于零并且具連續二阶微商的函数 $x(t)$,

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{n}\,e^{-2\sqrt{n}|s-\tau|}x''(\tau)d\tau=x'(\tau)\sqrt{n}\,e^{-2\sqrt{n}|s-\tau|}\Big|_{-\alpha}^{\alpha}-$$

$$-\int_{-\alpha}^{s}\sqrt{n}(-2\sqrt{n})e^{-2\sqrt{n}(s-\tau)}x'(\tau)d\tau-$$

$$-\int_{s}^{\alpha}\sqrt{n}(2\sqrt{n})e^{-2\sqrt{n}(\tau-s)}x'(\tau)d\tau=2nx(\tau)\tau e^{-2\sqrt{n}(s-\tau)}\Big|_{-\alpha}^{s}$$

$$-4n^{\frac{3}{2}}\int_{-\alpha}^{s} x(\tau)e^{-2\sqrt{n}(s-\tau)}d\tau-$$

$$-2nx(\tau)e^{-2\sqrt{n}(\tau-s)}\int_{s}^{\alpha} 4n^{\frac{3}{2}}\Big|_{s}^{\alpha} x(\tau)e^{-2\sqrt{n}(\tau-s)}d\tau=$$

$$=4n(s)n-4\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{n}\,e^{-2\sqrt{n}|s-\tau|}x(\tau)d\tau=y_n''(s),$$

即 $y_n''=T_nx''$。依§1定理4的第三式，$T_nx\to x$(强)，可知

$$y_n''\to x''(\text{强})。$$

这对于在有穷区間外等于零并具連續二阶微商的函数 $x(t)$ 都成立，再注意上面已經証明，对于这样的 $y_n\equiv T_nx$, $Ay_n=\frac{1}{4}y_n''$, 从而由于 A 的閉性可知，因 $y_n\equiv T_nx\to x$(强) $y_n''\to x''$(强)

$$x\in D(A)\ \text{且}\ Ax=x''.$$

于是得知，对于这样的 $x(s)$,

$$U(s,t)\equiv(U_tx)(s)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(s-\sigma)^2}{t}}x(\sigma)d\sigma\ \text{是 Cauchy 問題}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{4}\frac{d^2u}{ds^2},\quad u(s,0)=x(s)$$

的解，这里初始条件的滿足是指

$$\lim_{t\to 0}\|u(s,t)-x(s)\|=0.$$

例 4. 考察 $L^1(-\infty,\infty)$ 上的强連續算子半群

$$(U_tx)(s)=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}x(s-ku).$$

这时

$$y_n(s)\equiv(T_nx)(s)=$$

$$=\int_0^\infty ne^{-(n+\lambda)t}\sum_{k=0}^\infty\frac{(\lambda t)^k}{k!}x(s-ku)dt=\sum_{k=0}^\infty\frac{n\lambda^k}{(n+\lambda)^{k+1}}x(s-ku).$$

对于連續的 x, 当 $n\to\infty$ 时按强斂

$$(Ay_n)(s)=(n(T_n-I)x)(s)\to(Ax)(s)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left[\sum_{k=0}^\infty\frac{n\lambda^k}{(n+\lambda)^{k+1}}\cdot x(s-ku)-x(s)\right]=$$

$$=\lim_{n\uparrow\infty}n\left[\left(\frac{n}{n+\lambda}x(s)-x(s)\right)+\frac{n\lambda}{(n+\lambda)^2}x(s-u)\right]=$$

$$=\lambda[x(s-u)-x(s)].$$

这就是說:

$$z(s,t)\equiv(U_tx)(s).$$

給出了偏微分方程

$$\frac{\partial z(s,t)}{\partial t}=\lambda[z(s-u,t)-z(s,t)]$$

的初始值問題,

$$z(s,0)=x(s)$$

的解。

例3是一个更一般問題的特例,我們在这里略为說明一下。E. Hille 曾考慮了所謂抽象 Cauchy 問題, 古典 Cauchy 問題是指給出一組偏微分方程, 依賴于 $m+1$ 个独立变量, 設从变量 u 的初始值在这 $m+1$ 維空間的一个曲面 s 上給定, 求这方程組的解 u, 使它在 s 上取給定的初始值, 例如考慮一个據受限制的情形, 卽設 A 是依賴于变量 $s_1\cdots s_m$ 而不依賴于变量 t 的綫性微分算子, s 表曲面 $\pi=0$, 求解方程

$$\frac{\partial}{\partial t}y=Ay,$$

初始条件是:

$$y(s, \cdots, s_m, 0) = y_0(s, \cdots, s_m).$$

仿此，Hille 提出的抽象 Cauchy 問題，是指給出一綫性算子，作用在一个 Banach 空間 E 中，其定义域与值域各表示成 $\mathfrak{D}(A)$ 与 $\mathfrak{M}(A)$。設 $y_0 \in E$ 是已知的，求一依賴于 t 而在 E 中取值的抽象函数 $y(t) = y(t; y_0)$ 使对于每个 $t > 0$,

(1) $y(t) \in \mathfrak{D}(A)$;

(2) $y'(t)$ 絕对連續微商 $y''(t)$ 存在并且对每个 t, $y'(t) \in E$;

(3) $Ay(t) = y'(t)$;

(4) $\lim\limits_{t \downarrow 0} \|y(t; y_0) - y_0\| = 0.$

Hille 称解 $y(t; y_0)$ 为眞零解，指 $y(t; 0) \neq 0$，他称解 y 为正規 ω 型，指

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{t} \log \|y(t; y_0)\| = \omega < +\infty.$$

下面叙述 Hille 的几个簡單結果，更詳細和深入的結果，請參看本节后面开列的有关文献。

定理 1. 設 A 是閉綫性算子，其点譜 $P(A)$ 在任意半平面中不稠，那末，对于每个 $y_0 \in E$，抽象 Cauchy 問題至多有一正規型解。

証 設对巳知的 $y_0 \in E$，有兩个如上述的解，那末其差是一个“眞零解”，設它是正規 ω 型的，那末

$$L(\lambda; -y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} y(t) dt \tag{2}$$

是对 $R(\lambda) > \omega$ 定义的抽象函数，因为：

$$\log \|e^{-\lambda t} y(t)\| \leqslant -\Re\lambda \cdot t + \log \|y(t)\| (\omega - R(\lambda)) t \tag{3}$$

从而(2)是有定义的，并且是 λ 的解析函数。对于滿足 $R(\lambda) > \omega$ 的 λ 值，如果 $0 < \alpha < \beta < \infty$,[①]

① 这里引用了第二章 §6 定理 4，即如果 $x(s)$ 是按 Bochner 可积分的函数，T 是有界綫性算子，那末 $Tx(s)$ 也是按 Bochner 可积分的，并且 $T\int_A x(s)\mu(ds) = \int_A Tx(s)\mu(ds)$。不难看出，那个定理的証明在只假定 T 是閉时也眞。

$$A\left\{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\lambda t}y(t)dt\right\}=\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\lambda t}Ay(t)dt=\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\lambda t}y'(t)dt=$$

$$=e^{-\lambda\beta}y(\beta)-e^{-\lambda\alpha}y(\alpha)+\lambda\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\lambda t}y(t)dt,$$

这是因为上式两端的积分都存在。令 $\alpha\to 0$, $\beta\to\infty$, 右边依 (2) 趋于 $\lambda L(\lambda, y)$。依 A 的閉性，得

$$A(L(\lambda;y))=\lambda L(\lambda;y),\ R(\lambda)>\omega.$$

如果 $L(\lambda;y)\neq\Theta$, 那末 $L(\lambda;y)$ 成为算子 A 的与固有值 λ 相应的固有元。因此，如果 A 的点譜不在某一右半平面中稠，必存在 λ 值在这右半平面的一个开集，使对这些 λ 值 $L(\lambda;y)=\Theta$, 从而 $L(\lambda;y)\equiv\Theta$, 既然 $y(t)$ 連續必然 $y(t)=\Theta$, 証完。

定理 2. 如果 A 生成半群 $U_t=U_t(A)$ $(0\leqslant t<+\infty)$, 而这半群 (U_t) 是强連續的 $(U_0=I)$, 那末方程

$$\frac{\partial}{\partial t}y=Ay \tag{4}$$

的抽象 Cauchy 問題对于每个 $y_0\in\mathfrak{D}(A)$ 有解 (这解是 U_ty_0, 并且这是唯一的解)。

証 依 §1 定理 2, 对于 $y_0\in\mathfrak{D}(A)$, U_ty_0 是 (4) 的解并且 $U_0y_0=y_0$, 現在証明解的唯一性，定理 1 只說明抽象 Cauchy 問題的正規型解是唯一的，而現在要証明它沒有任何 (不管什么型的) 其他解。設 $y(t)=y(t;\Theta)$ 是"零解"，于是 $y(t)\in\mathfrak{D}(A)$, 并且对 $t>0$ 是强可微分的，于是对于每个 $s\in[0, t]$

$$\frac{\partial}{\partial s}U_{t-s}y^{(s)}=U_{t-s}y'^{(s)}=U_{t-s}Ay^{(s)}=\Theta.$$

把上式从 0 到 t 积分，得

$$U_0y(t)-U_ty(0)=\Theta,$$

既然 $y(0)=y(0;\Theta)=\Theta$, 得 $y^{(t)}=\Theta$,証完。

定理 3. 設閉綫性算子 A 生成一个在 $t=0$ 强連續的單参数算子群 $(U_t)(-\infty<t<+\infty)$。$U_0=I$; 那末为了 U_ty_0 是方程 (4) 的抽象 Cauchy 問題的解,必須且只須 $y_0\in\mathfrak{D}(A)$。

証 事实上,

$$\frac{1}{\delta}(U_{t+\delta}-U_t)y_0=U_{t-t_0}\frac{1}{\delta}(U_{t_0+\delta}-U_{t_0})y_0,$$

从而 $U_ty_0\in\mathfrak{D}(A)$或者对于每个 t 成立,或者对于每个 t 不眞。这正說明,为了 U_ty_0 是方程(4)的抽象 Cauchy 問題的解,必須且只須 $y_0\in$ $\in\mathfrak{D}(A)$, 証完。

注 在一定限制下,定理 2 的逆也成立,事实上,如果 A 是稠定閉綫性算子,下列定理成立。

定理 4. 設 A 是閉稠定綫性算子,而 A 的抽象 Cauchy 問題对于每个 $y_0\in\mathfrak{D}(A)$具有唯一的解 $y(t;y_0)$, 滿足:

$$\|y(t;y_0)\|\leqslant\|y_0\|.$$

那末 A 的豫解算子 $R(\lambda;A)$ 对于每个滿足 $R(\lambda)>0$ 的变数 λ 存在,并且 A 生成压縮綫性算子的强連續單参数半群(U_t)。使 $U_ty_0=y(t;y_0)$。

証 作积分

$$L(\lambda;y_0)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}y(t;y_0)dt.$$

不难看出

$$\|L(\lambda;y_0)\|\leqslant\|y_0\|\int_0^\infty e^{-\Re\lambda\cdot t}dt=\frac{1}{\Re\lambda}\|y_0\|,$$

$$\Re\lambda>0.$$

由此可知 $y_0\to L(\lambda;y_0)$ 是定义在 $\mathfrak{D}(A)$ 上的綫性有界算子。既然 $\mathfrak{D}(A)$在 E 中稠,这个有界綫性算子可以延拓到整空間 E 上去,成为有界綫性算子 $R(\lambda)$。既然 A 是閉的,仿定理 1 的証可以导出

$$(\lambda I - A)L(\lambda; y_0) = y_0,\quad R(\lambda) > 0,\ y_0 \in \mathfrak{D}(A),$$

因为这时 $e^{\lambda t}y(t)$ 当 $t \to 0$ 时等于 $y(0) = y_0$。既然 $\overline{\mathfrak{D}(A)} = E$ 而 A 是閉算子，上述关系可以延拓到整个空間上。事实上，設 $z_0 \in E$，取 $y_n \in \mathfrak{D}(A)$，使 $y_n \to z_0$，那末 $L(\lambda; y_n) \to L(\lambda; z_0)$，$(\lambda I - A)L(\lambda; y_n) = y_n \to z_0$ 从而依 A 的閉性可知 $(\lambda I - A)L(\lambda; z_0) = z_0$，$\Re\lambda > 0$，$z_0 \in E$。

現在利用解的一意性，既然方程(4)不明显含 t，如果 $y(t)$ 是(4)的解($t > 0$)，而如 t_0 是固定的数 > 0，那末 $y(t + t_0)$ 也是一个解，特别如果 $y(t; y_0)$ 是(4)的解，那末 $y(t + t_0; y_0)$ 也是它的解，并且也是正規型。当 $t \downarrow 0$ 时，$y(t + t_0; y_0) \to y(t_0; y_0)$，因为依假定 $y(t; y_0)$ 是强絕对連續的，由此可知，

$$y(t + t_0; y_0) = y(t; y(t_0; y_0)), \tag{5}$$

因为右边的項也是(4)的解，也是正規型，并且 $y(0; y(t_0; y_0)) = y(t_0; y_0) \in \mathfrak{D}(A)$，(5)对一切正数 t, t_0 及每个 $y_0 \in \mathfrak{D}(A)$ 是恒等式，从而存在一族綫性算子 $U_t (0 < t < +\infty)$，具有下列性質：

$$\begin{cases} U_t y_0 = y(t; y_0),\quad 0 < t < +\infty,\quad y \in \mathfrak{D}(A); \\ U_{t_1 + t_2} = U_{t_1} \cdot U_{t_2},\quad 0 < t_1 \cdot t_2 < +\infty; \\ \|U_t\| \leqslant 1; \\ \|U_t y_0 - y_0\| \to 0,\ t \downarrow 0,\ y_0 \in \mathfrak{D}(A). \end{cases} \tag{6}$$

这里 U_t 是定义在 $\mathfrak{D}(A)$ 上的有界綫性算子，而 $\overline{\mathfrak{D}(A)} = E$，从而可以延拓到整个 E 上而仍保持(6)中的諸性質，于是 (U_t) 是压縮綫性算子的强連續單参数半群。設 (U_t) 的無穷小母元是 A'，从而依§1，A' 的豫解算子是

$$R(\lambda; A')(y_0) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U_t y_0 dt,\ \Re\lambda > 0.$$

与 $L(\lambda; y_0)$ 的式比較，可知

$$R(\lambda; A')y_0 = L(\lambda; y_0) = R(\lambda)y_0,\ y_0 \in \mathfrak{D}(A).$$

既然上面等式两端都是有界綫性算子，可知这等式也对每个 $y_0 \in E$ 成立。前面已知

$$(\lambda I - A)R(\lambda)y_0 = y_0$$

对每个 $y_0 \in E$ 成立，而依 §1 定理 4 及其下的注，

$$(\lambda I - A')R(\lambda, A') = I,\ R(\lambda, A')(\lambda I - A')x = x\ (x \in \mathfrak{D}(A')).$$

于是設 $x \in \mathfrak{D}(A')$，那末，由于 $\mathfrak{D}(A') = \mathfrak{W}(R(\lambda; A'))$，可以写成

$$x = R(\lambda; A')z,\ z \in E,$$

于是

$$A'x = (A' - \lambda I)R(\lambda, A')z + \lambda R(\lambda, A')z = -z + \lambda R(\lambda)z =$$

$$= (A - \lambda I)R(\lambda)z + \lambda R(\lambda)z = AR(\lambda)z = AR(\lambda; A')z = Ax.$$

这就是說，$A' \subset A$。如果 A 是 A' 的眞延拓，由于 $\mathfrak{W}(\lambda I - A') = E(R(\lambda) > 0)$，每个这样的 λ 必是 A 的固有值，因为 $\Theta \in E$ 总可以表示成 $\Theta = (\lambda I - A')x = (\lambda I - A)x$ 的形狀，$x \in \mathfrak{D}(A') \subset \mathfrak{D}(A)$。取 $y_\lambda \neq \Theta$ 是与 λ 相应的固有元，于是由一意性得知

$$y(t; y_\lambda) = U_t y_\lambda = e^{\lambda t} y_\lambda,$$

因为：
$$Ae^{\lambda t}y_\lambda = e^{\lambda t}\lambda y_\lambda = \frac{\partial}{\partial t}e^{\lambda t}y_\lambda,$$

$$e^{\lambda t}y_\lambda \big|_{t=0} = y_\lambda.$$

$e^{\lambda t}y_\lambda$ 既然不滿足定理中的条件，与假定矛盾。于是 $A = A'$，証完。

关于半群在偏微分方程方面的应用，請参看[§1, 6], [1]、[2]、[3]、[§1、15—17]等。半群另一方面的应用是在概率論方面。例如 Колмогоров 平稳随机过程譜分解定理就是由 Stone 定理导出的，而前面已經提到在 Марков 过程方面的应用，这里从略，請参看[4]及吉田耕作的諸文章(§1)。

習 題 一

1. 把算子

$$(U_t x)(s) = x(t+s)$$

在空間 $\mathfrak{H}=L^2(-\infty,+\infty)$ 中考察，求証 (U_t) 是一个保范算子的强連續單參数群，求証它的無窮小母元 A 是算子 $\frac{d}{ds}$.

参 考 文 献

[1] W. Feller: The parabolic differential equations and the associcted Semi-groups of transformations Ann. Math. 55 (1952), 468—519.

[2] E. Hille Le probleme abstrait dé Cauchy, Univ. de Torino. Rendi Conti del Lemin Mat. 12 (1953), 95—103.

[3] E. Hille: The abstrait Cauchy problem and Cauchy problem for parabolic differential equations, J. d' Analyse Math. 3 (1954), 83—96.

[4] 伊藤清，概率論。

第五章　Riesz 空間理論概要

泛函分析的研究对象是函数类。为了反映函数类中諸函数之間的关系，这种函数类应具有代数結構，通常是綫性空間的結構和拓扑結構，比較簡單的情形乃是由范数規定的，这使得我們系統地研究了賦范綫性空間的理論。但在研究种种实函数类，例如以前考察的 $C(\Omega)$, $L^p(\Omega, \mu)(1\leqslant f<+\infty)$等时。还有一种結構，卽序結構，也是一个重要屬性，而这在賦范綫性空間理論中得不到反映。为此，我們有必要把序結構加以考察，特別是使它与綫性空間的結構按一定方式結合起来，从而引出半序綫性空間的理論来。値得注意，把序結構与綫性空間結構結合后，就往往自然地定义出一定的拓扑結構来（有时不是眞正的拓扑結構，而只不过是一种收斂）。这方面理論比較發展得成系統的，乃是 Riesz 空間理論，本章主要就介紹这一理論的初步。Riesz 空間并不能包括一切常出現的实函数空間，从而系統建立更一般的半序綫性空間理論，似乎是很有趣的工作。

半序綫性空間的概念誕生得較迟。这个概念首先由匈牙利数学家 F. Riesz(1880—1956)引入；他在 Bologna 国际数学大会(1928)上的講演中奠定了半序綫性空間理論的輪廓。其后，苏联 Л. В. Канторович 及其他学者对种种类型的，以及各种具体的半序綫性空間及其上的綫性算子理論进行了丰富而系統的研究(1935—1936起)，荷蘭 H. Freudenthal (1936)証明了譜分解定理（这定理已最初由 Riesz 在 1928 提出），苏联 M. Г. Крейн 与 C. Г. Крейн 兄弟(1940)与日本角谷靜夫(1940)証明了种种表現定理（卽滿足一定条件的 Riesz 空間必“同構”于某种具体空間），这些都标志着半序綫性空間理論进展中的几个重要步驟。特別这方面的工作以苏联与日本兩国为最突出。Riesz 空間理論不但使

对各种函数空間的研究更加多采，而且也在数学很多部門中得到应用。例如与积分論結合，使 Radon–Nikodym 定理的意义更为清楚，并且 Lebesgue 积分論的原来想法也只有借序的概念才能更充分地發揮。近来很多数学家在半序綫性空間理論的基础上重建了积分理論，請参看楊宗磐先生的 [1] 与 E. J. McShane 的[16]及德国学者的一系列論文[25][26][27] 等。苏联学派的算子理論除已叙述在 Л. В. Канторович 等三位学者合著的大部書 [10] 中外，这些理論現已被应用到近似方法方面去，使一些实用的解各种方程的方法——如牛頓方法。Чаплыгин 方法等，得到理論的闡明。Riesz 空間理論也与概率論方面的思想結合起来，特别值得注意的是日本学派（吉田耕作、中野秀五郎、角谷靜夫）在 Riesz 空間理論及其在遍历理論方面应用的工作。

这里只对 Riesz 空間理論作一很簡短的介紹，只在用实例說明理論时略举一些較直接的应用，而不涉及上述的系統应用。

与半序綫性空間密切相关联的，乃是 М. Г. Крейн 的凸錐理論，我們將作一簡略的介紹。至于这一观点作为处理非綫性問題的方法，我們也从略，請参看 Крейн–Рутман[14]与 Красносельский[12]。

§1. Riesz 空間

定义 1 实綫性空間 E 叫做 Riesz 空間①，是指其中定义了一个序結構，即对 E 中某些元偶 (x, y)，定义有关系

$$x \geqslant y \text{（或写作 } y \leqslant x\text{）},$$

讀作"x 大或等于 y"或"x 跟随 y"，使下列諸条件成立（$x, y, z \in E$）：

1）$x \geqslant x$；$x \geqslant y$ 且 $y \geqslant x \Longrightarrow x = y$；$x \geqslant y$ 且 $y \geqslant z \Longrightarrow x \geqslant z$（序关系）；

2）$x \geqslant y \Longrightarrow x + z \geqslant y + z$（$x \to x + z$ 是保序的一对一映象）；

3）$x \geqslant y, \lambda \geqslant 0 \Longrightarrow \lambda x \geqslant \lambda y$（$x \to \lambda x$ 是保序的）。

---

① 这方面的命名很不統一，苏联学派称为 K–Линеал，日本暂用"向量束"，美国暂用 Vector lattice。今按 Bourbaki 的命名，追念概念的首創者，称为 Riesz 空間。

4）对于任意两元 $x, y \in E$，存在元 z，满足下列条件：

$x \leqslant z$ 且 $y \leqslant z$，而如 $x \leqslant u$ 且 $y \leqslant u$，必然 $u \geqslant z$。这时我們写作 $z = x \vee y$ 或 $z = \sup(x, y)$，称 z 作 x 与 y 的結或上端。

例 1 考察紧 (T_2) 型空間 Ω 上一切連續实値函数的全体 $C(\Omega)$，加法与乘法定义如常，而 $x \geqslant y$ 表示函数 $x(t), y(t)$ 满足下列关系：

$$t \in \Omega \Longrightarrow x(t) \geqslant y(t).$$

这时
$$(x \vee y)(t) = \mathrm{Max}(x(t), y(t))(t \in \Omega) \tag{1}$$

不难驗明，$C(\Omega)$ 是 Riesz 空間。

例 2 考察测度空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$，$\mathfrak{B}$ 乃是相应可测集的 Borel 体（即 σ-环，使 $\Omega \in \mathfrak{B}$），μ 是测度。設 $S(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ 表示 Ω 上一切 μ-可测实値殆遍有穷函数全体組成的綫性空間，这里殆遍相等的函数看作是同一元。令 $x \geqslant y$ 表示

$$x(t) \geqslant y(t) \text{在 } \Omega \text{ 上 } \mu\text{-殆遍成立。}$$

这样 $x \vee y$ 仍由(1)定义。不难驗明 $S(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ 是 Riesz 空間。特别当 $\Omega = [0, 1]$，μ 表示 Lebesgue 测度时，我們簡單表示成 S。

例 3 設 $(\Omega, \mathfrak{B})$ 是可测空間，$\mathfrak{B}$ 是集 Ω 的一些子集作成的 Borel 体。考察 V，即 $(\Omega, \mathfrak{B})$ 上一切有穷値全加法集合函数的全体。如果 $\mu_1, \mu_2 \in V$，α 为实数，定义

$$(\mu_1 + \mu_2)(E) = \mu_1(E) + \mu_2(E),\ E \in \mathfrak{B}, \tag{2}$$

$$(\alpha\mu_1)(E) = \alpha\mu_1(E),\ E \in \mathfrak{B}, \tag{3}$$

$$(\mu_1 \vee \mu_2)(E) = \sup_{\substack{E = E_1 \vee E_2, \\ E_1 \wedge E_2 = \phi, \\ E_1, E_2 \in \mathfrak{B}}} (\mu_1(E_1) + \mu_2(E_2)),\ E \in \mathfrak{B} \tag{4}$$

$$\mu_1 \geqslant \mu_2 \Longleftrightarrow \mu_1(E) \geqslant \mu_2(E)(E \in \mathfrak{B}). \tag{5}$$

不难看出，V 是綫性空間。由(5)看出定义 1 中的 1) 2) 3) 满足。現在証明由(4)定义的 $\mu_1 \vee \mu_2$ 满足定义 1 中的条件 4)。首先对于任意 $\mu \in \in V$，令

$$\mu_+(E)=\sup_{\substack{A\subset E\\ A\in\mathfrak{B}}}\mu(A),\quad \mu_-(E)=\sup_{\substack{A\subset E\\ A\in\mathfrak{B}}}\{-\mu(A)\}.\tag{6}$$

$$|\mu|(E)=\mu_+(E)+\mu_-(E),\ E\in\mathfrak{B}.\tag{7}$$

首先証明对于每个 $E\in\mathfrak{B}$, $|\mu|(E)<+\infty$。事实上,否則，設存在 $E\in$ $\in\mathfrak{B}$, 使

$$|\mu|(E)=+\infty.$$

今証由此就会得出,存在一列$(E_n)(n=1,2,\cdots)$,$E_n\in\mathfrak{B}$, 使

$$E_n\subset E_{n-1}(n>1),\ |\mu|(E_n)=+\infty,\tag{8}$$

$$|\mu(E_n)|\geqslant n-1.$$

事实上,取 $E_1=E$, 并設已取定 $E_1,\cdots,E_k$, 使它們满足(8)。 由(8)中的第二条件,对于 $n=k$, 并用(7),可知存在 $A\in\mathfrak{B}$, $A\subset E_k$, 使

$$|\mu(A)|\geqslant|\mu(E_k)|+k.\tag{9}$$

如果$|\mu|(A)=+\infty$, 令 $E_{k+1}=A$, 从而(8)对于 $n=k+1$ 也成立。否則 $|\mu|(A)<+\infty$, 由于$|\mu|(E_k)=+\infty$, $\mu_+(E_k)$ 与 $\mu_-(E_k)$ 之中至少有一个$=+\infty$, 例如設 $\mu_+(E_k)=+\infty$($\mu_-(E_k)=\infty$ 的情况也可以同样处理),那末因

$$\sup_{\substack{B\subset F_k\setminus A\\ B\in\mathfrak{B}}}\mu(B)+\sup_{\substack{B\subset A\\ B\in\mathfrak{B}}}\mu(B)\geqslant\sup_{\substack{B\subset E_k\\ B\in\mathfrak{B}}}\mu(B)=\mu_+(E)=+\infty,$$

可知
$$\mu_+(E_k\setminus A)+\mu_+A\geqslant+\infty,$$

即
$$|\mu|(E_k\setminus A)\geqslant\mu_+(E_k\setminus A)=+\infty$$

于是由(9)得知

$$|\mu(E_k\setminus A|\geqslant|\mu(A)|-|\mu(E_k)|\geqslant k.$$

由(8), 对于 $E_{k+1}=E_k\setminus A$ 的成立。由数学归納法可得出一串滿足(8)的集来。

由此,
$$|\mu(\lim_n E_n)|=|\lim_n\mu(E_n)|=+\infty.$$

但 $\lim\limits_n E_n\in\beta$, 而 μ 是有穷值集函数,这不可能。于是

$$|\mu|(E)<+\infty,$$

从而 μ_+, μ_- 都是有穷集函数。現在証 μ_+, μ_-, $|\mu|$ 都是全加法的。只須証明 μ_+ 的情形，μ 的情形一样地証出，从而得出 $|\mu|$ 的全加法性。設

$X_k\in\mathfrak{B}$, $X_i\cap X_k=\phi(i\neq k)$, 那末对于每个 $E\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}X_k$,

$$\mu(E)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E\cap X_k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mu_+(X_k),$$

对于一切 $E\subset\bigcup_k X_k$ 取上端，得

$$\mu_+\left(\bigcup_k X_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mu_+(x_k). \tag{10}$$

另一方面，令 $Y_k\subset X_k$, $Y_k\in\mathfrak{B}$, $k=1,2,\cdots$, 得

$$\mu_+\left(\bigcup_k X_k\right)\geqslant\mu\left(\bigcup_k Y_k\right)=\sum_k\mu(Y_k),$$

所以
$$\mu_+\left(\bigcup_k X_k\right)\geqslant\sum_k\sup_{Y_k\subset X_k}\mu(Y_k)=\sum_k\mu_+(X_k). \tag{11}$$

結合(10)与(11)，得出 μ_+ 的全加法性。这就是說，μ_+, μ_-, $|\mu|\in V$。但

$$(\mu_1\vee\mu_2)(E)=\sup_{\substack{E=E_1\cup E_2\\E_1\cap E_2=\phi}}(\mu_1(E_1)+\mu_2(E_2))=$$

$$=\sup_{E_1\subset E}\{(\mu_1-\mu_2)(E_1)+\mu_2(E)\}=(\mu_1-\mu_2)_+(E)+\mu_2(E), \tag{12}$$

从而
$$\mu_1\vee\mu_2\in V.$$

由(12)，为了証明 $\mu_1\vee\mu_2$ 滿足定义 I 的条件 4)，只須証对于 $\mu\in V$,

$$\mu_+\geqslant\mu,\ \mu_+\geqslant 0, \tag{13}$$

并且
$$\nu\in V,\ \nu\geqslant\mu,\ \nu\geqslant 0\Longrightarrow\nu\geqslant\mu_+. \tag{14}$$

但因 $\mu(\phi)=0$, 所以由(6)和(13)成立，而如 $\nu\in V$, $\nu\geqslant\mu$, $\nu\geqslant 0$, 則

$$\nu(E)=\sup_{\substack{A\subset E\\ A\in\mathfrak{B}}}\nu(A)\geqslant\mu_+(E),$$

証完。

于是得知 V 是 Riesz 空間。由(13)(14)得知

$$\mu_+=\mu\vee 0.$$

同理不难看出 $\mu_-=(-\mu)\vee 0$.

注　由例 3 的証明的最后部分(12)，可知一般在任意 Riesz 空間中，

$$(x-y)_++y=x\vee y, \tag{15}$$

这里 $(x-y)_+=(x-y)\vee 0$, 因为这証明只用了 Riesz 空間的一般性質，而不用 V 中的具体特征。同样用 x_- 表示 $(-x)\vee 0$。

由定义 1 的 2)可知

$$x\geqslant y\Longrightarrow x+\{-(x+y)\}\geqslant y+\{-(x+y)\}\Longrightarrow -y\leqslant -x,$$

从而由 3), $\qquad x\geqslant y,\ \lambda<0\Longrightarrow \lambda x\geqslant\lambda y.$

令 $$x\wedge y=-((-x\vee)(-y)), \tag{16}$$

得 $$-(x\wedge y)=(-x)\vee(-y)\geqslant -x,\ \geqslant -y,$$

即 $$x\wedge y\leqslant x,\ \leqslant y.$$

当 $z\leqslant x,\ z\leqslant y$ 时，必然 $-z\geqslant -x,\ -z\geqslant -y$, 从而

$$-z\geqslant(-x)\vee(-y),\ 或\ z\leqslant x\wedge y.$$

这个元，$x\wedge y$ 叫做 x 与 y 的交，或下端。

定义 2　在 Riesz 空間中，

$$x_+=x\vee 0,\ x_-=(-x)\vee 0,\ |x|=x\vee(-x)$$

各叫做 x 的正部分，負部分，絕对值。

对于 Riesz 空間 E 中的任意一組元 $(x_\iota)_{\iota\in J}$(标号集 J 的势是任意的——有穷或無穷)，如果存在一元 x_0, 使

$$\iota\in J\Longrightarrow x_0\geqslant x_\iota\ (或相应地\ x\leqslant x_\iota),$$

而对于任意一个滿足

$$\iota\in J\Longrightarrow u\geqslant x_\iota \text{（或相应地 } u\leqslant x_\iota\text{）} \tag{17}$$

的元 $u\in E$, 必然 $u\geqslant x_0$, 那末 x_0 称作元組$(x_\iota)(\iota\in J)$的**結**或**上端**（或相应地叫做**交**或**下端**），而只滿足(17)的元 u 叫做元組(x_ι)的**上界**（相应地,**下界**）。上下端各表示成

$$x_0=\bigvee_{\iota\in J}x_\iota\equiv\sup_{\iota\in J}x_\iota,\ \left(x_0=\bigwedge_{\iota\in J}x_\iota\equiv\inf_{\iota\in J}x_\iota\right).$$

当 J 是有穷集或可数無穷集时,我們也用下列符号表示相应的結与交:

$$\bigvee_{i=1}^{n}x_i=x_1\vee x_2\vee\cdots\vee x_n,\quad \bigwedge_{i=1}^{n}x_i=x_1\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_n;$$

$$\bigvee_{i=1}^{\infty}x_i=x_1\vee x_2\vee\cdots\vee x_n\vee\cdots,\quad \bigwedge_{i=1}^{\infty}x_i=x_1\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_n\wedge\cdots.$$

但在一般的 Riesz 空間中,無穷多元的結或交未必存在。

例 1 考察 $C[0,1]$。令

$$x_n(t)=\begin{cases}0 & \text{如果}\quad 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\\ n\left(t-\frac{1}{2}\right) & \text{如果}\ \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\\ 1 & \text{如果}\ \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

容易驗明 $0\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant 1$, 但

$$\bigvee_{n=1}^{\infty}x_n$$

在 $C[0,1]$中不存在,因为如果这样的上端果然存在,它必須在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$处等于 0, 而在$\left[\frac{1}{2},1\right]$ 处等于 1, 从而不可能屬于 $C[0,1]$

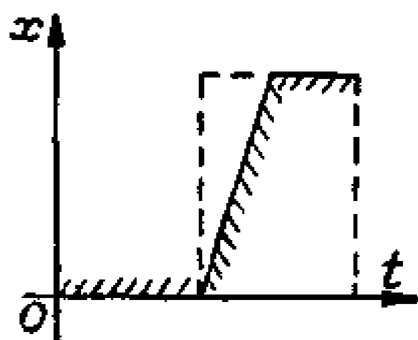


圖 4.

注意我們也可举出有序結構但非 Riesz 空間的例。

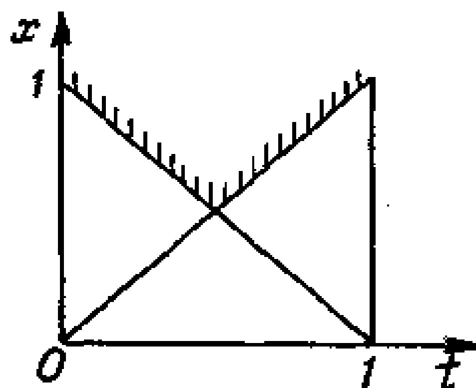


圖 5.

例 2　設 $C^{(1)}[0,1]$ 是 $[0,1]$ 上具一阶連續微商的实值函数全体。于是令

$$x_1(t)=t,\quad x_2(t)=1-t,$$

則 $x_1, x_2\in C^{(1)}$，但 $x_1\vee x_2\overline{\in} C^{(1)}$。更确切地說，在 $C^{(1)}$ 中，同时 $\geqslant x_1$ 与 x_2 的元沒有最小的。

在一般的 Riesz 空間中，有穷多元的交和結一定存在，并且不难驗明

$$x_1\vee x_2\vee x_3=(x_1\vee x_2)\vee x_3=x_1\vee(x_2\vee x_3);$$

一般地，
$$x_1\vee\cdots\vee x_{n-1}\vee x_n=(x_1\vee\cdots\vee x_{n-1})\vee x_n.$$

对于交也有同样的公式。由此可以看出結与交兩种运算滿足締合律与交换律①，下面証明也有关于这兩种运算的分配律。

定理 1　在任意 Riesz 空間中，下列恒等式成立：

1) $(x\vee y)+z=(x+z)\vee(y+z)$, $(x\wedge y)+z=(x+z)\wedge(y+z)$;

2) $\lambda>0\Longrightarrow\lambda(x\vee y)=\lambda x\vee\lambda y$, $\lambda(x\wedge y)=\lambda x\wedge\lambda y$;

3) $x+y=(x\vee y)+(x\wedge y)$，特别 $x=x_+-x_-$;

4) $(x\wedge y)\vee z=(x\vee z)\wedge(y\vee z)$, $(x\vee y)\wedge z=(x\wedge z)\vee(y\wedge z)$;

5) $x_+\wedge x_-=\Theta$; $x_++x_-=|x|$;

6) $|x|\geqslant\Theta$，且 $|x|=\Theta\Longleftrightarrow x=\Theta$; $|\lambda x|=|\lambda||x|$（λ 表实数）；$|x+y|\leqslant|x|+|y|$;

7) $|x-y|=(x\vee y)-(x\wedge y)$;

$$|x-x_1|=|x\vee y-x_1\vee y|+|x\wedge y-x_1\wedge y|.$$

証：1) 因 $x\vee y\geqslant x$, $x\vee y\geqslant y$ 及定义 1 的 2) 不难看出

$$(x\vee y)+z\geqslant x+z,\ (x\vee y)+z\geqslant y+z.$$

① 还应注意有下列兩恒等式：$(x\vee y)\wedge x=x=(x\wedge y)\vee x$, $x\vee x=x=x\wedge x$。具有兩个締合交换运算且滿足上述几个恒等式的代数結構叫做格或絡。

如果 $u \geqslant x+z, u \geqslant y+z$, 那末 $u-z \geqslant x$, $u-z \geqslant y$, 所以 $u-z \geqslant x \vee y$, 即 $u \geqslant (x \vee y)+z$。于是由結的定义可知

$$(x \vee y)+z=(x+z) \vee (y+z).$$

1) 中第二式的証明完全一样。

2) 設 $\lambda>0$。由定义 1 的 3) 知 $\lambda(x \vee y) \geqslant \lambda x$, $\lambda(x \vee y) \geqslant \lambda y$, 从而 $\lambda(x \vee y) \geqslant \lambda x \vee \lambda y$。但以 $\lambda x, \lambda y$ 代替上面的 x, y, 并以 $1/\lambda$ 代入,得

$$\frac{1}{\lambda}(\lambda x \vee \lambda y) \geqslant \frac{1}{\lambda}(\lambda x) \vee \frac{1}{\lambda}(\lambda y)=x \vee y.$$

再用定义 1 的 3) 得 $\lambda x \vee \lambda y \geqslant \lambda(x \vee y)$。于是 2) 中第一式得証。第二式的証明也是一样的。

3) 注意引用本定义的 1)与(15),得

$$(x \vee y)-x-y=[\Theta \vee (y-x)]-y=(-y) \vee (-x)=-(x \wedge y),$$

从而 3)証完。令 $y=\Theta$, 得 $x=x_{+}-x_{-}$。

4) 由 $x \wedge y \leqslant x \leqslant x \vee z$, $x \wedge y \leqslant y \leqslant y+z$, $z \leqslant x \vee z$, $z \leqslant y \vee z$, 得

$$(x \wedge y) \vee z \leqslant x \vee z, \quad (x \wedge y) \vee z \leqslant y \vee z,$$

从而

$$(x \wedge y) \vee z \leqslant (x \vee z) \wedge (y \vee z). \tag{18}$$

为了完成定理中 4)的第一式的証,只須証

$$w \leqslant x \vee z, w \leqslant y \vee z \Longrightarrow w \leqslant (x \wedge y) \vee z.$$

由 3)知 $w \leqslant x \vee z \Longrightarrow w \leqslant x+z-(x \wedge z)$, 从而

$$w+(x \wedge z) \leqslant x+z.$$

同理得 $w+(y \wedge z) \leqslant y+z$。于是由 1)及(18)得

$$w+\{(x \wedge z) \wedge (y \wedge z)\}=\{w+(x \wedge z)\} \wedge \{w+(y \wedge z)\} \leqslant$$
$$\leqslant (x+z) \wedge (y+z)=(x \wedge y)+z.$$

但$(x \wedge z) \wedge (y \wedge z)=x \wedge y \wedge z$, 由 3)得

$$w \leqslant \{(x \wedge y)+z\}-\{(x \wedge y) \wedge z\}=(x \wedge y) \vee z.$$

第一式証完。第二式的証也是一样的。

5）注意

$$\Theta=x-x=[x\vee(-x)]+[x\wedge(-x)]\geqslant 2[x\wedge(-x)],$$

依分配律 4）

$$\Theta=(x\wedge(-x))\vee\Theta=(x\vee\Theta)\wedge(-x\vee\Theta)=x_+\wedge x_-.$$

$$x_++x_-=(x_+\vee x_-)+(x_+\wedge x_-)=x_+\vee x_-=$$
$$=(x\vee\Theta)\vee(-x\vee\Theta)=x\vee(-x)\vee\Theta.$$

但　$$x\vee(-x)\geqslant x\wedge(-x)=-((-x)\vee x),$$

从而　$$2(x\vee(-x))\geqslant\Theta,\ 即\ |x|=x\vee(-x)\geqslant\Theta,$$

所以　$$x_++x_-=x\vee(-x)=|x|.$$

6）由 5)已知$|x|\geqslant\Theta$。如果$|x|=\Theta$，則 $x_++x_-=\Theta$，故 $x_+\vee x_-=\Theta$，$x_+=x_-=\Theta$，故 $x=x_+-x_-=\Theta$。$|\lambda x|=(\lambda x)\vee(-\lambda x)=|\lambda|(x\vee\vee-x)=|\lambda|\,|x|$。因$|x|+|y|\geqslant x+y\geqslant(-x)+(-y)$，故 $|x|+|y|\geqslant\geqslant(x+y)\vee(-x+(-y))=|x+y|$。

7）注意对于任意元 a,b，

$$|a-b|=(a-b)_++(a-b)_-=\{(a-b)\vee 0\}+\{(-a+b)\vee 0\}=$$
$$=\{(a\vee b)-b\}-\{(a-b)\wedge 0\}=\{(a\vee b)-b\}-$$
$$-\{(a\wedge b)-b\}=(a\vee b)-(a\wedge b).$$

于是 7)的第二式的右边等于(利用分配律)

$$(x\vee y\vee x_1)-\{(x\wedge x_1)\vee y\}+\{(x\vee x_1)\wedge y\}-\{x\wedge x_1\wedge y\}=$$
$$=\{[(x\vee x_1)\wedge y]+[(x\vee x_1)\wedge y]\}-\{[(x\wedge x_1)\vee y]-$$
$$-[(x\wedge x_1)\wedge y]\}=\{(x\vee x_1)+y\}-\{(x\wedge x_1)+y\}=$$
$$=(x\vee x_1)-(x\wedge x_1)=|x-x_1|.$$

注　定理 1 的 3) 中第二式叫做元 x 的 Jordan 分解，用到具体的 Riesz 空間 V 中，这分解卽是

$$\mu=\mu_+-\mu_-.$$

这正是平常測度論中的 Jordan 分解[①]。

① 例如見 P. Halmos 的測度論，§29，定理 2。

在 Riesz 空間中，如果元列(w_n)滿足

$$w_1 \geqslant w_2 \geqslant w_3 \geqslant \cdots \geqslant w_n \geqslant \cdots,$$

我們說它是降列，而如果 $\inf w_n = a$，我們写作

$$w_n \downarrow a,$$

如果把上式中的$\geqslant$換成$\leqslant$，得出升列，相应地把 $\sup w_n = a$ 写成

$$w_n \uparrow a.$$

更一般地，对于空間中定向列(w_δ))$(\delta \in \Delta$，Δ 是定向半序集)，如果

$$\delta_1 \succ \delta_2 \Longrightarrow w_{\delta_1} \geqslant w_{\delta_2} \quad (\text{或 } w_{\delta_1} \leqslant w_{\delta_2}).$$

那末称(w_δ)是升(降)定向列，而当

$$\sup_{\delta \in \Delta} w_\delta = a \quad (\text{或相应地 } \inf_{\delta \in \Delta} w_\delta = a)$$

时，我們也写作

$$w_\delta \uparrow a \quad (\text{或相应地 } w_\delta \downarrow a)。$$

定义 3. 在 Riesz 空間E中，所謂定向元列$(x_\delta)(\delta \in \Delta)(0)$斂于元$x_0 \in E$，(也叫做"序斂"于 x_0)，是指在E中存在降列 $w_\delta \downarrow 0$，使

$$|x_\delta - x_0| \leqslant w_\delta.$$

这时我們表示成

$$(0) - \lim_{\delta \in \Delta} x_\delta = x_0,$$

或簡写成

$$x_\delta \xrightarrow{(0)} x_0.$$

x_0 叫做元列(x_δ)的(0)極限。

注 在 Riesz 空間中，如果点列(x_δ)的(0)極限存在，它必是一意的。事实上，設

$$(0) - \lim x_\delta = x, \ (0) - \lim x_\delta = y.$$

那末按定义存在，$w_\delta \downarrow 0$，$z_\delta \downarrow 0$，使

$$|x - x_\delta| \leqslant w_\delta, \ |y - x_\delta| \leqslant z_\delta.$$

于是依定理 1，对于每个 $\delta \in \Delta$，

$$|x - y| \leqslant |x - x_\delta| + |x_\delta - y| \leqslant w_\delta + z_\delta.$$

容易驗明(仿定理 1 的 1)的証明)

$$z_{\delta_0}+\bigwedge_{\delta\succ\delta_0} w_\delta=\bigwedge_{\delta\succ\delta_0}(z_{\delta_0}+w_\delta),$$

从而

$$z_{\delta_0}=z_{\delta_0}+\bigwedge_{\delta\succ\delta_0} w_\delta=\bigwedge_{\delta\succ\delta_0}(z_{\delta_0}+w_\delta)\geqslant\bigwedge_{\delta\succ\delta_0}(z_\delta+w_\delta)\geqslant$$
$$\geqslant\bigwedge_{\delta}(z_\delta+w_\delta),$$

所以

$$\Theta\leqslant\bigwedge_{\delta}(z_\delta+w_\delta)\leqslant\bigwedge_{\delta_0} z_{\delta_0}=\Theta.$$

于是得知 $|x-y|=\Theta$, 卽 $x=y$。

定义 4. Riesz 空間 E 叫做 σ-备(相应地叫做备的), 是指其中任意有上界的点列 $(x_n)(n=1, 2, \cdots)$(相应地任意一族元 $x_\iota(\iota\in J)$)。必有上端。

注　在 σ-备(或备) Riesz 空間 E 中, 如果元列 (x_n)(相应地任意元族 $x_\iota(\iota\in J)$)有下界,那末$(-x_n)$(相应地$(-x_\iota)$)有上界,从而依定义,上端 $\vee(-x_n)$(相应地 $\vee(-x_\iota)$)存在。但不难驗明。$-\vee(-x_n)$(相应地 $-\vee(-x_\iota)$) 是 (x_n)(相应地 (x_ι)) 的下端。从而在 σ-备(相应地,备) Riesz 空間中,有下界的元列(元族)必有下端。在备 Riesz 空間中,不难証明,如果 $\bigvee_{\iota\in J} x_\iota$ 存在,那末对于任意 x, $\bigvee_{\iota\in J}(x_\iota+x)$ 也存在。并且

$$\bigvee_{\iota\in J}(x_\iota+x)=\bigvee_{\iota\in J} x_\iota+x.$$

对下端也有同样的等式:

$$\bigvee_{\iota\in J}(x_\iota+x)=\bigvee_{\iota\in J} x_\iota+x.$$

例 1. 考察Riesz空間$S(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$。設$(x_n)$是这空間中的一元列。如果存在 $y\in S(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$。使对于殆一切 $t\in\Omega$, $x_n(t)\leqslant y(t)$, 那末令

$$\sup_n x_n(t)=x(t).$$

必然$x(t)\leqslant y(t)$, 从而$x(t)$也是殆遍有穷。并且由可測函数的性質，它也是可測的。于是得知$x=\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, 而$S$是$\sigma$-备 Riesz 空間。用更細的推理可以知道$S(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$是备 Riesz 空間。但我們將在下一节用其他方式証明。

例 2. 考察測度空間$(\Omega, \mathfrak{B})$上一切有穷值全加法集函数所組成的 Riesz 空間V。設$(\mu_\alpha)(\alpha\in J)$是$V$中一个有上界$\mu_0$的元族($J$是具任意势的标号族)。令对于任意$E\in\mathfrak{B}$,

$$\mu(E)=\sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu_{\alpha_n}(E_n) \,\middle|\, E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,\ E_i\cap E_j=\right.$$
$$\left.=\phi(i\neq j),\ \alpha_i\in J,\ i=1,2,\cdots\right\}.$$

显然

$$\mu(E)\leqslant\sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu_0(E_n) \,\middle|\, E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,\ E_i\cap E_j=\phi,\ i\neq j\right\}=\mu_0(E),$$

从而μ是有穷值的。取$E=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}Z_i$, $Z_i\cap Z_j=\phi(i\neq j)$, $Z_i\in\mathfrak{B}$, 那末

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}Z_i\right)=\sup_{(E_n)}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu_{\alpha_n}(E_n) \,\middle|\, \bigcup_n E_n=\bigcup_i Z_i\right\}=$$
$$=\sup_{E_n}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\mu_{\alpha_n}(E_n\cap Z_i) \,\middle|\, \bigcup_n E_n=\bigcup_i Z_i\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\sup_{E_n}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_{\alpha_n}(E_n\cap Z_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(Z_i);$$

而另一方面

$$\mu(Z_i)=\sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu_{\alpha_n^{(i)}}(E_n^{(i)})\,\middle|\,Z_i=\bigcup E_n^{(i)},\ E_n^{(i)}\cup E_k^{(i)}=\phi(n=k)\right\},$$

从而

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(Z_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\sup_{Z_i=\bigcup E_n^{(i)}}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_{\alpha_n}(i)(E_n^{(i)})=$$

$$=\sup_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}Z_i=\bigcup\limits_{i,n}E_n^{(i)}}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_{\alpha_n^{(i)}}(E_n^{(i)})\leqslant\mu\left(\sum_{1}^{\infty}Z_i\right),$$

因为对于每个 i，諸 $E_n^{(i)}$ 互相無关地遍表其并为 Z_i 的互不相交集列，所以可以把 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}$ 与 sup 交换。于是得知 $\mu\in V$。

現在証 $\mu=\bigvee\limits_{\alpha}\mu_{\alpha}$。取 $E_1=E$, $E_n=\phi(n>1)$，則得

$$\mu(E)\geqslant\mu_{\alpha_1}(E),\ \alpha_1\in J\ \text{任意},$$

这就是說 $\mu\geqslant\mu_{\alpha_1}$, $\alpha_1\in J$。反之，前面已証对于任意 $\mu_0\geqslant\mu_\alpha(\alpha\in J)$，必然 $\mu\leqslant\mu_0$，从而 μ 是諸 μ_α 的上端。

于是得証 V 是备 Riesz 空間。

例 3. 設 R_A 表示 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 中一固定有界自伴綫性算子 A 所决定的自伴有界綫性算子集。

$$R_A=\{B\mid B\in\mathfrak{E}(\mathfrak{H}),\ B^*=B,\ BvvA\}.$$

这里 $BvvA$ 表示 B 是与 A 可交換的算子 C 可交換，即 $AC=CA\Longrightarrow BC=CB$。

在 R_A 中規定 $B\geqslant0$ 表示 $x\in\mathfrak{H}\Longrightarrow(Bx,x)\geqslant0$，而 $B\geqslant C$ 表示 $B-C\geqslant0$。我們証明。按照这样規定的序，R_A 成为备 Riesz 空間。

我們可以借在 Hilbert 空間理論中的譜分解証明上述的結果。但

更有趣的，乃是用初等的直接証明，因为那样譜分解定理便成为 Riesz 空間理論的后果。

首先 R_A 是綫性空間，这很容易驗明。为了証明 R_A 是备 Riesz 空間，我們需要一些准备。①

設 $0\leqslant A_1\leqslant A_2\leqslant\cdots\leqslant I$，每个 A_n 是自伴有界綫性算子。今証 A_n 强斂于一个自伴有界綫性算子。如 $m<n$，而 $A_{mn}\equiv A_n-A_m\geqslant 0$，从而对于一切 $x\in\mathfrak{H}$，

$$\|A_{mn}x\|^4=(A_{mn}x,\ A_{mn}x)^2\leqslant(A_{mn}x,\ x)(A_{mn}^2x,\ A_{mn}x).$$

这不等式可以由 $[u,v]\equiv(A_{mn}u,v)$ 具有內积的几个有关性質这一事实推出。注意 $0\leqslant A_{mn}\leqslant I$，所以 $(A_{mn}x,x)\leqslant\|x\|^2$，即 $\|A_{mn}\|\leqslant 1$。所以

$$\|A_nx-A_mx\|^4\leqslant[(A_nx,\ x)-(A_mx,\ x)]\|x\|^2.$$

数列 $\{(A_nx,x)\}$ 既是增的且有界的，它必收斂，从而 (A_nx) 强斂。令 $A_x=\lim\limits_{n\to 0}A_nx$，不难看出 A 是自伴有界綫性算子。

自伴有界綫性算子 B 的平方总是正的。B 本身不必是正的。但我們由譜分解可以取 B^2 的"正平方根"，即取一正自伴有界綫性算子 C，使 $C^2=B^2$②。如果 $B\in R_A$，而 $C^2=B^2$，$C\geqslant 0$，那末 $C\,vv\,B$，从而 $C\in R_A$。令

$$B_+=\frac{1}{2}(B+C),\quad B_-=\frac{1}{2}(C-B).$$

那末 $B_+,B_-\in R_A$。我們証明在 R_A 中 $B_+=B\vee 0$，$B_-=-B\vee 0$。設 $L=\{x\,|\,B_+x=\Theta\}$。L 是 $\mathfrak{H}$ 中子空間。設 P 是在 L 上的投影算子。因 $BC=CB$，所以

$$B_+B_-=\frac{1}{2}(C^2-B^2)=0.$$

---

① 这里的証明是根据 Соболев[19] 的。

② 設 $B^2=\int_0^\infty\lambda dE(\lambda)$ 是正自伴綫性算子 B^2 的譜分解，只須取 $C=\int_0^\infty\sqrt{\lambda}\,dE(\lambda)$。見第四章。初等証明請見下頁。

这就是說 $B_-x\in L(x\in\mathfrak{H})$，从而 $PB_-=B_-$。$PvvB$：事实上，設 DvB，$D\in f(\mathfrak{E})$。那末 DvB_+，而由 $B_+Dx=DB_+x$ 可知 $x\in L\Longrightarrow Dx\in L$，所以 $DP=PDP$。如 $D^*=D$，那末 $PD=(DP)^*=(PDP)^*=P^*D^*P^*=PDP=DP$。

現在我們来証明 R_A 是备 Riesz 空間。設 H 是任意正自伴有界綫性算子。必要时乘一小正数，無妨設 $0\leqslant H\leqslant I$。令 $H=I-T$，那末 $0\leqslant T\leqslant I$。如果能找到正自伴綫性有界算子 Y，使

$$Y=\frac{1}{2}(T+Y^2),$$

那末 $C\equiv I-Y$ 就滿足

$$C^2=I-2Y+Y^2=I-T=H$$

但令 $Y_0=0$，$Y_1=\frac{1}{2}T$，而一般

$$Y_{n+1}=\frac{1}{2}(T+Y_n^2)(n=0,1,2,\cdots). \tag{*}$$

注意

$$Y_{n+1}-Y_n=\frac{1}{2}(T+Y_n^2)-\frac{1}{2}(T+Y_{n-1}^2)=\frac{1}{2}(Y_n^2-Y_{n-1}^2)=$$
$$=\frac{1}{2}(Y_n+Y_{n-1})(Y_n-Y_{n-1}). \tag{+}$$

因 Y_0 与 Y_1 是 T 的多項式，其系数是正数，由(+)用数学归納法不难看出 $Y_{n+1}-Y_n$，Y_n 都是 T 的正系数多項式，因 $T\geqslant 0$，所以 $T^n\geqslant 0(n=2,3,\cdots)$ 从而 $Y_n\geqslant 0$，$Y_n\geqslant Y_{n-1}$。由(*)用数学归納法得知 $\|Y_n\|\leqslant 1$，即 $Y_n\leqslant I$。由正文前面所証。可知 Y_n 强斂于一个自伴綫性有界算子 Y。不难看出 $0\leqslant Y\leqslant I$，所以 $C=I-Y\geqslant 0$，C 即是 H 的多項式的强極限。所以对于每个有界綫性算子 Q，$QH=HQ\Longrightarrow QC=CQ$，即 $CvvH$。

今对 $B\in R_A$，作 $C\geqslant 0$，使 $C^2=B^2$，那末不难看出 $CvvB$ 从而 $C\in R_A$。因为任意有界綫性算子可以表示成两个自伴算子的綫性組合 $\left[\text{即 } H=\frac{1}{2}(H+H^*)+\frac{i}{2i}(H-H^*)\right]$。所以 $PvvB$。于是 $P\in R_A$。特别 PvB_+，PvB_-。于是

$$PB_- = B_-P = B_-,\ PB_+ = B_+P = 0.$$

注意相交換的正自伴有界綫性算子 T_1, T_2 的积仍是自伴的，因为 $T_1\,vT_2 \Longrightarrow T_1\,vT_2^{\frac{1}{2}}$, $T_2^{\frac{1}{2}}$ 表示平方等于 T_2 的正自伴綫性有界算子，所以

$$(T_1T_2x, x) = (T_1T_2^{\frac{1}{2}}T_2^{\frac{1}{2}}x, x) = (T_2^{\frac{1}{2}}T_1T_2^{\frac{1}{2}}x, x) =$$
$$= (T_1T_2^{\frac{1}{2}}x, T_2^{\frac{1}{2}}x) \geqslant 0.$$

于是因 $B_+ + B_- = C \geqslant 0$, 所以

$$B_- = PB_- + PB_+ = P(B_- + B_+) = PC \geqslant 0.$$
$$B_+ = C - B_- = C - PC = (I-P)C \geqslant 0.$$

由 $B = B_+ - B_-$ 知

$$BP = B_+P - B_-P = -B_-,\ B(I-P) = B + B_- = B_+.$$

所以 $B_+ = B + B_- \geqslant B$。如果 $H \in R_A$, $H \geqslant 0$, $H \geqslant B$, 那末 HvP, 从而

$$H = H(P + (I-P)) = HP + H(I-P),$$
$$(H-B)P \geqslant 0,\ (H-B)(I-P) \geqslant 0,$$

所以
$$H \geqslant H(I-P) \geqslant B(I-P) = B_+.$$

于是得証在 R_A 中。$B_+ = B \vee 0$。

于是对于 $B_1, B_2 \in R_A$,

$$B_1 \vee B_2 = (B_1 - B_2)_+ + B_2$$

存在，而 R_A 是Riesz 空間

考察 R_A 中任意一族具有上界 B_0 的算子 $B_\alpha(\alpha \in J$, J 是具有任意势的标号集)。为了証明

$$\sup_{\alpha \in J} B_\alpha \in R_A,$$

我們無妨設 (B_α) 中任意有穷多个算子的上端也已在 (B_α) 中。令

$$B(x) = \sup_{\alpha \in J} (B_\alpha x, x),$$

那末 $B(x) \leqslant (B_0x, x)$, 从而是有穷的。我們証明对于任意有穷多个元 $x_1, \cdots, x_k \in \mathfrak{H}$, 必存在一列 $B_{\alpha_n} \in R_A$, 使

$$B(x_i)=\lim_{n\to\infty}(B_{\alpha_n}x_i,x_i)\ (1\leqslant i\leqslant k).$$

事实上，对于每个 i，存在一列 $\alpha_n^{(i)}\in J$，使

$$B(x_i)=\lim_{n\to\infty}(B_{\alpha_n^{(i)}}x_i,x_i).$$

令
$$B_{\alpha_n}=B_{\alpha_n^{(1)}}\vee B_{\alpha_n^{(2)}}\vee\cdots\vee B_{\alpha_n^{(k)}}\ (n=1,2,\cdots)$$

那末 $B_{\alpha_n}\in R_A$，并且对于每个 $x_i(1\leqslant i\leqslant k)$，

$$(B_{\alpha_n^{(i)}}x_i,x_i)\leqslant(B_{\alpha_n}x_i,x_i)\leqslant B(x_i).$$

由此
$$\lim_{n\to\infty}(B_{\alpha_n}x_i,x_i)=B(x_i).$$

考察

$$B(x,y)=\frac{1}{4}\{[B(x+y)-B(x-y)]+i[B(x+iy)-B(x-iy)]\}.$$

取一串 (B_{α_n})，使

$$B(x)=\lim_{n}(B_{\alpha_n}x,x)$$

对于 $x=x_1\pm y,x_1\pm iy,x_2\pm y,x_2\pm iy,x_1+x_2\pm iy$ 都成立。依上面所証

$$\begin{aligned}B(x_1,y)=&\frac{1}{4}\{[B(x_1+y)-B(x_1-y)]+\\&+i[B(x_1+iy)-B(x_1-iy)]\}=\\&+\lim_{n\to\infty}\{[(B_{\alpha_n}(x_1+y),x_1+y)-(B_{\alpha_n}(x_1-y),x_1-y))]+\\&+i[(B_{\alpha_n}(x_1+iy),x_1+iy)-(B_{\alpha_n}(x_1-iy),x_1-iy)]\}=\\&=\lim_{n\to\infty}(B_{\alpha_n}x_1,y).\end{aligned}$$

同理

$$B(x_2,y)=\lim_{n\to\infty}(B_{\alpha_n}x_2,y),\ B(x_1+x_2,y)=\lim_{n\to\infty}(B_{\alpha_n}(x_1+x_2),y).$$

所以 $B(x,y)$ 是双綫性对称式。不难看出

$$B(\Theta)=0,\quad B(\lambda x)=|\lambda|^2B(x).$$

因此，$B(x)=B(x,x)$ 是二次泛函数。由此可知存在自伴綫性有界算子 B_0，使 $B(x)=(B_0x,x)$。不难驗明

$$B_0=\sup_{\alpha} B_\alpha.$$

由于对任意 $x, y\in\mathfrak{H}$, 存在 B_{α_n}, 使

$$(B_0Ax, y)=\lim_{n\to\infty}(B_{\alpha_n}Ax, y)=\lim_{n\to\infty}(B_{\alpha_n}x, Ay)=$$

$$=(B_0x, Ay)=(AB_0x, y),$$

从而 $B_0A=AB_0$。同理可証 $B_0\in R_A$。証完。

在 σ-备 Riesz 空間 E 中，考察一个 (0) 有界点列 x_n: 即指存在 $y, z\in E$, 使

$$y\leqslant x_n\leqslant z.$$

那末
$$x^*=\bigwedge_{n\geqslant 1}\bigvee_{k\geqslant n}x_k,\quad x_*=\bigvee_{n\geqslant 1}\bigwedge_{k\geqslant n}x_k$$

都存在，它們分别叫做元列 (x_n) 的上 (0) 極限与下 (0) 極限，表示成

$$x^*=(0)\text{-}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n,\ x_*=(0)\text{-}\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n.$$

特别如 $E=R$(实数全体)。那末上、下(0)極限卽平常数列的上下極限。

定理 2. 在 σ-备 Riesz 空間中，为了

$$x=(0)\text{-}\lim_{n\to\infty}x_n,$$

必須且只須

$$(0)\text{-}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n=(0)\text{-}\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n=x.$$

証 1) **必要性** 設

$$x=(0)\text{-}\lim_{n\to\infty}x_n,$$

卽存在元列 $w_n\downarrow 0$, 使 $|x-x_n|\leqslant w_n$。于是不难看出

$$x-w_n\leqslant x_n\leqslant x+w_n,$$

从而
$$\bigvee_{k\geqslant n}(x-w_k)\leqslant\bigvee_{k\geqslant n}x_k\leqslant\bigvee_{k\geqslant n}(x+w_k).$$

但
$$\bigvee_{k\geqslant n}(x-w_k)=x+\bigvee_{k\geqslant n}(-w_k)=x-\bigwedge_{k\geqslant n}w_k=x,$$

$$\bigvee_{k\geqslant n}(x+w_k)=x+\bigvee_{k\geqslant n}w_k=x+w_n.$$

于是对于一切 k,

$$x\leqslant\bigvee_{k\geqslant n}x_k\leqslant x+w_n,$$

从而
$$x\leqslant\bigwedge_{n=1}^{\infty}\bigvee_{k\geqslant n}x_k\leqslant\bigwedge_{n=1}^{\infty}(x+w_n)=x+\bigwedge_{n=1}^{\infty}w_n=x,$$

即
$$(0)\text{-}\varlimsup_{n\to\infty}x_n=x.$$

同理可証下 (0) 極限 $=x$。

充分性　設

$$(0)\text{-}\varlimsup_{n\to\infty}x_n=(0)\text{-}\varliminf_{n\to\infty}x_n=x.$$

令
$$u_n=\bigvee_{k\geqslant n}x_k,\quad v_n=\bigwedge_{k\geqslant n}x_k,\quad u_n-v_n\equiv w_n.$$

不难看出 $u_n\downarrow x$, $v_n\uparrow x$, 从而

$$w_1\geqslant w_2\geqslant w_3\geqslant\cdots,$$

而且

$$\bigwedge_{n=1}^{\infty}w_n=\bigwedge_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)=\bigwedge_{n=m}^{\infty}(u_n-v_n)\leqslant$$

$$\leqslant\bigwedge_{n=m}^{\infty}(u_m-v_n)=u_m-\bigwedge_{n=m}^{\infty}v_n=u_m-x.$$

上式既然对于一切 m 成立，于是

$$\bigwedge_{n=1}^{\infty}w_n\leqslant\bigwedge_{m=1}^{\infty}(u_m-x)=\bigwedge_{m=1}^{\infty}u_m-x=x-x=\Theta.$$

但 $w_n\leqslant\Theta$, 所以 $\bigwedge\limits_{n=1}^{\infty}w_n=\Theta$, 从而得知 $w_n\downarrow\Theta$。因

$$x_n \leqslant u_n = x + (u_n - x) \geqslant x + (u_n - v_n) = x + w_n,$$

$$x_n \geqslant v_n = x + (v_n - x) \geqslant x - (u_n - v_n) = x - w_n.$$

于是
$$|x - x_n| \leqslant w_n.$$

由此得証
$$(0)\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

注 注意本定理对于一般定向元列仍眞，只要所論的各極限在空間中存在。

定理 3. $x \to \lambda x$ 是由 Riesz 空間 E 到它自己之中的(0)連續映象，而$(x, y) \to x + y$, $(x, y) \to x \vee y$, $(x, y) \to x \wedge y$ 是由 $E \times E$ 到 E 中(0)連續映象。这就是說，如果

$$(0)\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad (0)\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

那末对于任意实数 λ,

$$(0)\text{-}\lim_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda x \qquad (0)\text{-}\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$$

$$(0)\text{-}\lim_{n\to\infty} (x_n \vee y_n) = x \vee y,$$

$$(0)\text{-}\lim_{n\to\infty} (x_n \wedge y_n) = x \wedge y.$$

証 因 $|\lambda x - \lambda x_n| = |\lambda|\,|x - x_n|$, 从而

$$x_n \xrightarrow{(0)} x \Longrightarrow \lambda x_n \xrightarrow{(0)} \lambda x.$$

又 $|x + y - (x_n + y_n)| \leqslant |x - x_n| + |y - y_n|$, 不难証明

$$(0)\text{-}\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y.$$

又因

$$|x_n \vee y_n - x \vee y| \leqslant |x_n \vee y_n - x_n \vee y| + |x_n \vee y - x \vee y| \leqslant |y_n - y| + |x_n - x|$$

因此不难推出定理中的第 3 式。第 4 式的証明也是一样的。

系 $x_n \geqslant y_n (n = 1, 2, \cdots) \Longrightarrow$

$$(0)\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n \geqslant (0)\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n,$$

如果每个 (0) 極限存在。

証　因为 $x_n \geqslant y_n \Longleftrightarrow x_n \vee y_n = x_n$，从而由定理中的第 3 式就可証得。

注　注意在一般 Riesz 空間 E 中。$\lambda \to \lambda x$ 并不一定是由 R 到 E 中的連續映象。

例　設把实数偶 (ξ_1, ξ_2) 組成的平常二維綫性空間添加上如下的序結構：規定 $(\xi_1, \xi_2) \geqslant (\eta_1, \eta_2)$，是指 $\xi_1 > \eta_1$ 或当 $\xi_1 = \eta_1$ 时，$\xi_2 \geqslant \eta_2$。不难証明这样得出的确是 Riesz 空間。在这个空間中。

$$\frac{1}{n}(1,0) = \left(\frac{1}{n}, 0\right) > (0,1) > \Theta (n=1,2,\cdots)$$

从而

$$\frac{1}{n}(1,0) \overset{(0)}{\not\longrightarrow} \Theta$$

定义 5. Riesz 空間 E 叫做阿基米德型的，是指

$$x > \Theta \Longrightarrow (0) - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} x = \Theta.$$

定理4. 在 σ-备 Riesz 空間 E 中，由 $R \times E$ 到 E 中的映象 $(\alpha, x) \to \alpha x$ 是連續的。

証　注意

$$|\alpha x - \alpha_n x_n| \leqslant |\alpha x - \alpha_n x| + |\alpha_n x - \alpha_n x_n| =$$
$$= |\alpha - \alpha_n| |x| + |\alpha_n| |x - x_n|.$$

因 $\alpha_n \to \alpha$，所以 $|\alpha_n|$ 有界，从而可設 $|\alpha_n| \leqslant \beta (n=1,2,\cdots)$。因 $x_n \overset{(0)}{\longrightarrow} x$，必存在 $w_n \downarrow \Theta$。使 $|x_n - x| \leqslant w_n$，由此

$$|\alpha_n| \, |x_n - x| \leqslant \beta w_n \downarrow \Theta.$$

为了完成証明，只須証 $\beta_n \longrightarrow 0 \Longrightarrow \beta_n |x| \overset{(0)}{\longrightarrow} \Theta$。必要时用 $\sup\limits_{m \geqslant n} \beta_m$ 代替 β_n，無妨設 $\beta_n \downarrow 0$。于是 $\beta_n |x| \downarrow$（即 $(\beta_n |x|)$ 是遞降元列），从而依 σ-备性。存在 $z \in E$，使 $\beta_n |x| \downarrow z$。所以

$$(0)-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\beta(x)=\frac{1}{2}z.$$

但对于每个 β_n, 由于 $\beta_m\downarrow 0$, 存在 $m=m(n)$, 使 $\beta_m<\frac{1}{2}\beta_n$。于是

$$z=(0)-\lim_{n\to\infty}\beta_n|x|=(0)-\lim_{n}\frac{1}{2}\beta_n|x|=\frac{1}{2}z,$$

卽 $z=\Theta$。証完。

系 σ-备 Riesz 空間必是阿基米德型的。

定理 5. 在 σ-备 Riesz 空間 E 中，为了 $(0)-\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，必須且只須 Cauchy 条件成立

$$(0)-\lim_{n,m\to\infty}|x_n-x_m|=\Theta.$$

注 这里上式左边的極限，是指定向列 (z_{nm}) 的 (0)-極限，其中 $y_{nm}\equiv|x_n-x_m|$, $(n,m)\succ(n',m')$ 表示 $n\geqslant n'$, $m\geqslant m'$。

証 必要性是不待証明的。因为

$$|x_n-x_m|\leqslant|x_n-x|+|x-x_m|.$$

为了証明充分性，注意，令 $y_{nm}\equiv x_n-x_m$, 那末依条件，存在定向列

$$w_{nm}\downarrow\Theta((n,m)\to(\infty,\infty)).$$

使 $|y_{nm}|\leqslant w_{nm}$。于是

$$x_n-x_m\leqslant w_{nm},\ x_n-\sup_{m\geqslant k}x_m\leqslant w_{nk},$$

$$x_n\leqslant w_{nk}+\sup_{m\geqslant k}x_n,$$

而上式对于任意 k 成立，从而

$$x_n\leqslant w_{nn}+\inf_{k}\sup_{m\geqslant k}x_m=w_{nn}+\overline{\lim_{n}}\,x_n.$$

卽
$$x_n-\overline{\lim_{m\to\infty}}\,x_m\leqslant w_{nn}.$$

又因 $x_n-x_m\leqslant w_{nm}$, 所以 $\sup\limits_{n\geqslant k}x_n-x_m\leqslant w_{km}$。而这对任意 k 成立，于是

$$\inf_{k}\sup_{n\geqslant k}x_n-x_m\leqslant w_m m,$$

即

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\, x_m - x_n \leqslant w_{nn}.$$

与上面結果合并，得

$$\left|x_n - \overline{\lim_{m\to\infty}}\, x_m\right| \leqslant w_{nn} \downarrow \Theta,$$

因为 $\Theta \leqslant \inf w_{nn} \leqslant \inf w_{nm} = \Theta$（因 $w_{\max(p,q),\max(p,q)} \leqslant w_{pq}$）。这正說明 $\lim x_n = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, x_m$ 存在。証完。

下面說明一下在备 Riesz 空間 R_A 中，(0)斂的具体涵义是什么，設 $A_n \xrightarrow{(0)} 0$, $A_n \in R_A$, 那末不难看出（在一般 Riesz 空間中成立）；(A_n) 是(0)有界的。卽 $\exists B, C \in R_A$, 使 $B \leqslant A_n \leqslant C (n=1, 2, \cdots)$。令

$$\overline{A}_n = \sup_{p\geqslant n} A_p, \quad \underline{A}_n = \inf_{p\geqslant n} A_p.$$

那末依(0)斂的性質。$\overline{A}_n \downarrow 0$, $\underline{A}_n \uparrow 0$。依前面論 R_A 时的結果

$$(\overline{A}_n x, x) = \sup_{m\geqslant n} (A_m x, x), \quad \inf_n (\overline{A}_n x, x) = 0,$$

$$(\underline{A}_n x, x) = \inf_{m\geqslant n} (A_m x, x) \quad \sup_n (\underline{A}_n x, x) = 0. \qquad (*)$$

这就是說，数列 $(A_n x, x) \to 0 (n\to\infty)$。由于

$$(Ax, y) = \frac{1}{4}\{[A(x+y), x+y] - [A(x-y), x-y] + $$
$$+ i[A(x+iy), x+iy] - i[A(x-iy), x-iy]\},$$

所以 $(A_n x, y) \to 0 (n\to\infty)$。因此 $(A_n x) (n\to\infty)$ 弱斂于 Θ。于是对于每个 $x \in \mathfrak{H}$。$\|A_n x\|$ 是有界的。依共鳴定理 $(\|A_n\|)$ 是有界的，卽存在正数 α, 使 $\|A_n\| \leqslant \alpha (n=1, 2, \cdots)$。由于不难証明

$$(A_n x, A_n x)^2 \leqslant (A_n x, x)(A_n A_n x, A_n x) \leqslant (A_n x, x)\|A_n\|\|A_n x\|^2,$$

对于每个 x, $\qquad \|A_n x\|^2 \leqslant \alpha (A_n x, x) \to 0.$

从而 (A_n) 强斂于 0。

反之，設 (A_n) 强斂于 0, 那末 $\|A_n x\| \to 0 (n\to\infty)$ 对于每个 $x \in \mathfrak{H}$ 成立，从而由

$$|(A_n x, x)| \leqslant \|A_n x\| \|x\|.$$

可知$(A_n x, x) \to 0$, 由(*)可知$\overline{A}_n \downarrow 0$, $\underline{A}_n \uparrow 0$, 卽 $A_n \xrightarrow{(0)} 0$ 于是得証，R_A 中的(0)斂，卽指算子的强斂。

習　題　一

1. 求証有穷維阿基米德型 Riesz 空間必是备的，并且同構于(卽代数地同構且保序)于 R^n(Юдин)。

2. 在 σ－备 Riesz 空間中，所得級数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (0) 斂，是指

$$(0)-\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k \tag{1}$$

存在，而所謂 $\sum x_n$ 絕对(0) 斂，是指 $\sum |x_n|$ (0) 斂。求証絕对 (0) 斂蘊涵(0)斂，并且这时，当級数中各項次序任意变更时，級数的"和"(1)的値不变。

3. 設在 Riesz 空間 E 中，$\Theta \leqslant x \leqslant u+v$, $u > \Theta$, $v > \Theta$, 那末必存在 x_1, $x_2 \in E$。使 $x = x_1 + x_2$，且 $\Theta \leqslant x_1 \leqslant u$, $\Theta \leqslant x_2 \leqslant v$。

4. 求証在 Riesz 空間中，如果 $x = u - v$, $u \wedge v = \Theta$, 那末必然 $u = x_+$, $v = x_-$。

5. 求証 $L^p(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$是备 Riesz 空間。

6. 求証在 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 中的一切有界对称綫性算子全体所組成的綫性空間 $\mathfrak{F}^0(\mathfrak{H})$ 中，为了 $A \vee B$ 存在，必須且只須 $A \leqslant B$ 或 $B \leqslant A$，这里 $A \vee B$ 表示一元 $C \in \mathfrak{F}_0(\mathfrak{H})$。使 $C \geqslant A$, $C \geqslant B$, 而且 $D \in \mathfrak{F}_0(\mathfrak{H})$, $D \geqslant A \Longrightarrow D \geqslant B$, $D \geqslant C$。$D \geqslant C$ 表示 $(Dx, x) \geqslant (Cx, x)$(一切 $x \in \mathfrak{H}$)。(Kadison)。

7. 設 E 是备 Riesz 空間，其中有一元 e，使对于每个 $x \in E$ 存在自然数 n，使 $|x| \leqslant ne$。求証(λ 表实数)

$$\|x\| = \inf\{\lambda \mid |x| \leqslant \lambda e\},$$

是 E 上一个范数，并且按这个范数 E 成为 Banach 空間，且

$$\|x\| = \max(\|x_+\|, \|x_-\|).$$

8. 求出 $S(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$, $L^p(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$中(0)斂的涵义。

§2. 賦距与賦范的 Riesz 空間

在很多具体函数空間中，它除掉具有綫性空間結構与序結構外，还具有拓扑結構，特别是由距离或范数規定的，这三种結構的結合当然

更完全地反映了具体空間的性質，本节簡單地叙述一下这种空間的性質。

定义 1. 設 Riesz 空間 E 同时是 Fréchet 空間，并設这个 Fréchet 空間的准范数与序之間有下列关系：

$$|x|\leqslant|y|\Longrightarrow\|x\|\leqslant\|y\|, \tag{1}$$

那末 E 叫做 Fréchet 型 Riesz 空間。特别如果 $\|x\|$ 是范数，即相应的 Fréchet 空間是 Banach 空間，使(1)成立，那末 E 叫做 Banach 型 Riesz 空間。

注　由 (1) 可知 $x\vee y$, $x\wedge y$ 是按范数的連續函数，事实上，由于 $|x\vee y-z\vee y|\leqslant|x-z|$ 可知 $\|x\vee y-z\vee y\|\leqslant\|x-z\|$，于是 $\|x\vee y-x'\vee y'\|\leqslant\|x\vee y-x'\vee y\|+\|x'\vee y-x'\vee y'\|\leqslant\|x-x'\|+\|y-y'\|$。

例 1. 在 $S(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ 中，令

$$\|x\|=\int_\Omega\frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}\mu(dt).$$

那末 $S(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ 是 Fréchet 型 Riesz 空間。

例 2. 在 $C(\Omega)$ 中，令

$$\|x\|=\max_{t\in\Omega}|x(t)|,$$

于是 $C(\Omega)$ 是 Banach 型 Riesz 空間。

例 3. 在前节所考察的 Riesz 空間 R_A 中，令 $\|B\|$ 表示算子 B 的范数。我們知道，由于 R_A 中的元都是自伴算子，

$$\|B\|=\sup_{\|x\|=1}(Bx, x).$$

于是不难看出(1)成立，从而 R_A 是 Banach 型 Riesz 空間。

例 4. 在 V 中，令

$$\|u\|=|u|(\Omega),$$

表示 $\mu(\in V)$ 在 Ω 上的全变分，不难看出 V 是 Banach 型 Riesz 空間。

定理 1. 設 E 是 σ- 备 Fréchet 型 Riesz 空間，并且在 E 中滿足

$$|x|<|y|\Longrightarrow\|x\|<\|y\|, \tag{2}$$

$$(0)\lim_{n\to\infty}x_n=x\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x\|, \tag{3}$$

那末 E 是备 Riesz 空間。

証 我們只須証明当 $\Theta\leqslant x_\alpha\leqslant z$ 时 $(\alpha\in J)$, $\bigvee_{\alpha\in J}x_\alpha$ 存在，这里 J 是具有任意势的标号族。一般的有上界元族不难化成这样情形，因为如果 (x_α) 是有上界 z 的元族，$(x_\alpha-x_{\alpha_0})$ (α_0 在 J 中固定) 仍是有上界族，而此族中其有 Θ 元，令 $y_\alpha=x_\alpha-x_{\alpha_0}(\alpha\in J)$，那末

$$\bigvee_\alpha(y_\alpha)_+=\bigvee y_\alpha,\ \bigvee x_\alpha=\bigvee y_\alpha+x_{\alpha_0},$$

从而一般情形也就得証了。

設 $\mathfrak{F}(J)$ 表示 J 的有穷子集全体，而对于每个 $\beta\in\mathfrak{F}(J)$，令

$$z_\beta\equiv\bigvee_{\alpha\in\beta}x_\alpha.$$

那末 $\Theta\leqslant z_\beta\leqslant z$，从而 $\|z_\beta\|\leqslant\|z\|$。由于

$$\gamma\equiv\sup_{\beta\in\mathfrak{F}(J)}\|z_\beta\|<+\infty$$

存在。于是存在标号列 $\beta_j(j=1,2,\cdots)$，$\in\mathfrak{F}(J)$，使

$$\lim_{j\to\infty}\|z_{\beta_j}\|=\gamma.$$

由于 E 是 σ- 备 Riesz 空間，令

$$z_n=\sup_{j\leqslant n}z_{\beta_j},$$

那末 $z_n\in\{z_\beta\,|\,\beta\in\mathfrak{F}(J)\}$，并且 $z_n\uparrow$，$z_n\leqslant z$。令

$$w=(0)\text{-}\lim_{n\to\infty}z_n,$$

依(3)，$\|w\|=\lim\|z_n\|=\gamma$，因为 $\|z_n\|\geqslant\|z_{\beta_j}\|$，$\|z_n\|\leqslant\gamma$。現在証明

$$w=\sup_\alpha x_\alpha.$$

設有一 x_α，使 $x_\alpha\vee w>w$，那末依(2)，$\|x_\alpha\vee w\|>\|w\|=\gamma$。但 $x_\alpha\vee w=$

$=(0)\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}(x_\alpha \vee z_n)$,

而 $x_\alpha \vee z_n \in \{z_\beta \mid \beta \in \mathfrak{F}(J)\}$, 所以

$$\|x_\alpha \vee w\| = \lim_{n\to\infty} \|x_\alpha \vee z_n\| \leqslant \gamma,$$

得出矛盾，于是每个 $x_\alpha \leqslant w$。設 $u \geqslant x_\alpha (\alpha \in J)$，我們証明 $u \geqslant w$。事实上，如果 $u \wedge w < w$, 依(2), 有 $\|w \wedge u\| < \gamma$, 但对于每个 $\beta \in \mathfrak{F}(J)$, $z_\beta \leqslant w \wedge u$, 得出矛盾。所以 $w = \sup\limits_\alpha x_\alpha$。証完。

例 特別可知 $S(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ 是备 Riesz 空間，証明了在 § 1 中指出而未加証明的事实。

注 并非一切 Riesz 空間都是 Fréchet 型或 Banach 型的。設 Ω 是任意無穷集，$\mathfrak{F}(\Omega)$表示 Ω 上一切有穷实值函数的全体。那末 $\mathfrak{F}(\Omega)$ 按平常函数的运算与序成为 Riesz 空間，但熟知，例如当 $\Omega=[0, 1]$时，$\mathfrak{F}(\Omega)$是不能賦距的。

下面考虑一下在 Fréchet 型或 Banach 型 Riesz 空間中，按范数收斂与(0)收斂之間的关系。在 $C(\Omega)$中，(0)收斂乃是指点点收斂，从而不必蘊函一致收斂。反之，在 S 中，按范数收斂并不蘊涵(0)收斂。事实上，諸閉区間。

$$\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4}, 1\right].$$

$\left[0, \frac{1}{8}\right]$, $\left[\frac{1}{8}, \frac{2}{8}\right]\cdots$ 的特征函数各表为 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\cdots$, 那末 $\{x_n(t)\}$ 按測度收斂于 0, 也就是按 S 中准范数收斂于 0, 但不殆遍收斂于 0, 即不(0) 收斂于 0。但在 V 中，(0) 斂与按范数收斂是相同的，証明留給讀者。

定理 2. 在 Fréchet 型 Riesz 空間 E 中，如果(x_n)按范数收斂于 x, 那末由(x_n)的任意子列(y_n)可以取出子列(y_{n_k}), 使存在 $z \in E$,

$$|y_{n_k} - x| \leqslant \frac{1}{k} z \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{4}$$

反之，如果 E 中点列(x_n)的任意子列(y_n)含有一适当子列(y_{n_k})，使存在一元 z，令(4)成立，那末(x_n)按范数收斂于 x。

注 按(4)意义的收斂，即(x_n)的任意子列(y_n)包含一个子列，使存在一元 $z\in E$，令(4)成立，叫做相对一致(*)收斂。本定理說明：在 Fréchet 型 Riesz 空間中，按范数收斂等值于相对一致(*)收斂。

証 只須考察 $x=\Theta$ 之場合。由于 $\lim\|y_n\|=0$，对每个 k，可取 y_{n_k} 使 $\|ky_{n_k}\|\leqslant\frac{1}{k^2}$。令

$$z=\sum_{k=1}^{\infty}|ky_{n_k}|,$$

那末由于 $\sum\|ky_{n_k}\|\leqslant\sum\frac{1}{k^2}<+\infty$，可知 $z\in E$。又 (4) 对于 $x=\Theta$ 成立。

反之，如果 $|y_{n_k}|<\frac{1}{k}z$，那末 $\|y_{n_k}\|\leqslant\left\|\frac{1}{k}z\right\|$ 从而 $\lim\limits_{k\to\infty}y_{n_k}=\Theta$（按准范数）。如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|\neq0$，必存在$(x_n)$的子列$(y_n)$，使 $\lim\|y_n\|=\delta>0$，这不可能。于是 $\lim x_n=\Theta$(按准范数)。

例 設 $E=S$，定理 2 蘊涵熟知的結果，按測度收斂的函数列必包含一个殆遍收斂的子列。

在 Fréchet 型 Riesz 空間中，有界性也有种种定义。首先，作为距离空間，其中一集 A 叫做按准范数有界，是指存在正数 α，使

$$x\in A\Longrightarrow\|x\|\leqslant\alpha.$$

作为 Riesz 空間，其中集 A 叫做(0)有界，是指存在元 $a, b\in E$，使 $x\in A\Longrightarrow a\leqslant x\leqslant b$。还有一种有界性，即 A 叫做按 Banach 意义有界，是指对于 A 中任意元列(x_n)及任意一串斂于 0 的数 $\lambda_n\in k$，$\|\lambda_n x_n\|\to0$。A 叫做按 Banach 意义(0)有界，是指对于 A 中任意元列(x_n)及任意一串斂于 0 的实数 λ_n，(0)-$\lim\lambda_n x_n=\Theta$ ①。

---

① Канторович 称按 Banach 意义(0)有界为(0)消灭的，見 квп。

在 Fréchet 型 Riesz 空間中，(0) 有界性蘊涵按准范数有界，因为 $a\leqslant x\leqslant b\Longrightarrow\|x\|\leqslant\|a\|+\|x-a\|\leqslant\|a\|+\|b-a\|$ 逆命題一般不成立。例如在 $L^p(p\geqslant 1)$ 中，單位球是按范数有界的，但显然不是 (0) 有界的。

由 Riesz 空間 E 到 Riesz 空間 E_0 中的綫性算子叫做 (0) 有界的，是指它把 E 中 (0) 有界集映成 E_0 中 (0) 有界集，下面的簡單定理成立。

定理 3. 为了 Banach 型 Riesz 空間 E 上的綫性泛函数 f 是有界的，必須且只須它是(0)有界的。

証 設 f 是有界的，由于(0)有界集 A 必是按范数有界，所以 $f(A)$ 是 R 中有界集，从而是 R 中 (0) 有界集 (因在 R 中兩种有界性一致)。反之，如果 f 不是有界的，可以取一串元(x_n)，使$\|x_n\|\leqslant 2^{-n}$，而 $|f(x_n)|\uparrow+\infty$，于是 $a=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|\in E$，而 $f(x)$ 在序区間 $-a\leqslant x\leqslant a$ 上無界。証完。

注 在 Banach 空間中，按范数有界与按 Banach 有界兩概念是一致的，但在 Fréchet 空間中，这兩概念一般并不相同(参看 Mazur-Orlicz [32])。(0) 有界集必是按 Banach (0) 有界的，这很容易看出，但一般逆命題不成立。Канторович 称备 Riesz 空間为 K^+-空間，是指其中 (0)有界性与按 Banach (0)有界性等价。例如 $L^\infty[\alpha,\beta]=M[\alpha,\beta]$是 K^+- 空間。事实上，如果 $A\subset L^\infty$ 是非(0)有界的，那末对于每个自然数 n，存在 A 中一个有界可測函数 $x_n(t)$，使

$$\mu\{t\,|\,|x_n(t)|>n\}>0,$$

这里 μ 表示 L^∞ 中相应的測度。于是

$$\mu\left\{t\,\middle|\,\left|\frac{1}{\sqrt{n}}x_n(t)\right|>\sqrt{n}\right\}>0.$$

从而$\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}x_n(t)\right\}$在 L^∞ 中不(0)斂于 $\Theta(n\to\infty)$，这就是說，A 不

是按 Banach(0)有界的。

对于各种有界性的关系的进一步研究似乎是有趣的。

習 題 二

1. 在Banach 型 Riesz 空間中,設

$$x \geqslant \Theta, y \geqslant \Theta \Longrightarrow \|x+y\| = \|x\| + \|y\|,$$

那末这空間叫做(AL)型(抽象(L)型)的,求証在(AL)型空間中,

$$x_n \uparrow x_0 \Longrightarrow \|x_n - x_0\| \longrightarrow 0 (n \to \infty).$$

求証 $L^1(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ 与 $V(\Omega, \mathfrak{B})$ 都是(AL)型空間。

2. 求証(AL)型空間必是备 Riesz 空間。

3. 設 E 是 σ-备 Riesz 空間, 并且存在强單位元 1, 使对于每个 $x \in E$, 存在实数 α, 使 $|x| \leqslant \alpha 1$, 令

$$\|x\| = \inf\{\alpha \,\big|\, |x| \leqslant \alpha 1, \alpha > 0\}$$

那末对于范数 $\|x\|$(習題1的7), E 是 Banach 型 Riesz 空間, 并且当 $x \geqslant \Theta, y \geqslant \Theta$ 时,

$$\|x \vee y\| = \max(\|x\|, \|y\|).$$

4. 在 Banach 型备 Riesz 空間 R_A 中, $B \to (Bx, x)$ 是由 R_A 到 $\mathfrak{H}$ 的單位球面 $\{x \mid \in \mathfrak{H}, \|x\| = 1\}$ 中的一个保序保范綫性映象。

5. 可分(按范数)Banach 型 Riesz 空間 E 必具有弱單位元, 即一元 e, 使 $x \in E. x > \Theta \Longrightarrow x \wedge e > \Theta$ (提示, 令 $e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n \|x_n\|}$, (x_n) 为 E 中稠集)。

§3. Riesz 空間的直和分解

F. Riesz 在他 1928 年的报告中考察了囿变函数的 Jordan 分解的問題。这时,他把囿变函数的全体看成 $C[a, b]$ 的共軛空間。于是 Jordan 分解可以看成是 $C[a, b]$ 中綫性泛函数分解。同样, M. Fréchet 研究了綫性泛函数的一种分解,相应于函数按 Lebesgue, Beppo Levi, de la Vallee Poussin 分成絕对連續、特异、跳躍的三个部分。Riesz 提出另一种考察方式,他直接考察綫性算子的分解,并且这种算子并不必是作用在 $C[a, b]$ 上的, Riesz 也發現了他的这种想法与 Lebesgue 积分的关系, $C[a, b]$ 上綫性泛函数的"正則部分"(相应于絕对連續函数那一部分)可以表示成

$$\varphi(x)=\int_a^b \alpha(t)x(t)dt.$$

这里$\alpha(t)$是有和函数，如果把殆遍相等的函数等同起来，$C[a, b]$上綫性有界泛函数与有和函数之間建立了一一对应，可測集A对应的綫性泛函数φ_A是

$$\varphi_A(x)=\int_a^b \chi_A(t)x(t)dt=\int_A x(t)dt.$$

这里χ_A表示集A的特征函数，我們把$\alpha(t)$的序移到$\varphi(x)$上去，即設$\varphi\geqslant\Theta$,是指相应的$\alpha(t)\geqslant 0$(殆遍),对于集$\{t|\alpha(t)\leqslant\gamma\}$,令$\chi_\gamma(t)$表示它的特征函数,于是$\alpha(t)$可以用函数

$$\sum_i \gamma_i[\chi_{\gamma_i}(t)-\chi_{\gamma_{i-1}}(t)]$$

来逼近，这里(γ_i)是有窮多个随i遞增的实数。这种和在形式上与論Hilbert空間中綫性自伴算子的譜分解所用的和

$$\sum_i \gamma_i(E(\gamma_i)-E(\gamma_{i-1}))$$

很相仿,从而使我們連想到一种“譜分解”，适用于較一般的Riesz空間,这就引出Riesz空間中譜分解問題来，本节將仿Fréchet的分解来考察Riesz空間的直和分解,而下节將論譜分解問題。

定义 1. Riesz空間E中兩元x, y叫做直交，是指$|x|\wedge|y|=\Theta$,并表示成$x\perp y$,对于空間E中任意子集Y，令

$$Y^\perp=\{z|z\in E, y\in Y\Longrightarrow|z|\wedge|y|=\Theta\}$$

$$Y^{\perp\perp}=(Y^\perp)^\perp,\text{等等}$$

注意显然$X\subset X^{\perp\perp}$，由此$X^\perp\subset X^{\perp\perp\perp}$。但一般$X\subset Y\Longrightarrow X^\perp\supset Y^\perp$,从而$X^\perp\supset X^{\perp\perp\perp}$,即$X^\perp=X^{\perp\perp\perp}$。

例 1. 設$\mu\in V(\Omega, \mathfrak{B})$, $\mu>\Theta$。注意当$\alpha, \beta, \in V$时，

$$(\alpha\wedge\beta)(E)=-(-\alpha\vee-\beta)(E)=$$

$$=-\sup_{\substack{E=E_1\cup E_2\\E_1\cap E_2=\phi}}(-\alpha(E_1)-\beta(E_2))=\inf_{\substack{E=E_1\cup E_2\\E_1\cap E_2=\phi}}(\alpha(E_1)+\beta(E_2)),$$

因此，如果 $\nu\perp\mu,\nu\in V$，对于每个自然数 n，存在 $E_n\in\mathfrak{B}$，使

$$|\nu|(\Omega\setminus E_n)+\mu(E_n)<\frac{1}{2^n},$$

令
$$E_0=\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n\equiv\inf_n\sup_{k\geqslant n}E_k,$$

那末，对于任意 n，

$$\mu(E_0)\leqslant\sum_{k\geqslant n}\mu(E_k)\leqslant\frac{1}{2^{n-1}},$$

从而 $\mu(E_0)=0$。于是

$$|\nu|(\Omega\setminus E_0)=|\nu|(\underline{\lim_{n\to\infty}}(\Omega\setminus E_n))\equiv$$

$$\equiv|\nu|(\sup_n\inf_{k\geqslant n}(\Omega\setminus E_n))=$$

$$=\lim_{n\to\infty}|\nu|(\inf_{k\geqslant n}(\Omega\setminus E_n))\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0.$$

这就是說，ν 对 μ 是特异的，反之，如果 ν 对 μ 是特异的，必然 $|\nu|\wedge\mu=\Theta$，这不難看出。

例 2. 在 $S(\Omega,\mathfrak{B},\mu)$ 中，$x\perp y$ 是表示

$$\{t|x(t)\neq0\}\cap\{t|y(t)\neq0\}$$

是 μ 测度为 0 的集。

定义 2. 如果 Riesz 空間 E 的綫性子集，A 满足条件，

$$x\in A,\ |y|\leqslant|x|\Longrightarrow y\in A,$$

A 叫做 E 的正規子空間，或叫做 E 的幻。

例 1. $L^p(\Omega,\mathfrak{B},\mu)(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 是 $S(\Omega,\mathfrak{B},\mu)$ 中的幻。

例 2. 在 $V(\Omega,\mathfrak{B})$ 中固定一元 $\mu>\Theta$。令

$$A_\mu\equiv\{\nu\,|\,\mu(E)=0\Longrightarrow|\nu|(E)=0,\nu\in V\}.$$

不難看出 A_μ 是 V 中的幻。

定理 1. 設 X 是 Riesz 空間 E 中的任意子集，那末 $X^{\perp}$ 必是 E 中的幻。如果 E 是备 Riesz 空間，$X^{\perp}$ 中任意有上界的子集必有上端，并且这个上端与在 E 中的上端相等。

証 設 $|y|\wedge|x|=\Theta$，而 α 是任意实数。取自然数 n，使 $n\geqslant|\alpha|$，那末，

$$\Theta\leqslant|\alpha y|\wedge|x|\leqslant n(|y|\wedge|x|)=\Theta,$$

$$\text{即}\ |\alpha y|\wedge|x|=\Theta,$$

$$\text{又如}\ |x|\wedge|y|=|x|\wedge|z|=\Theta,\ \text{那末}$$

$$\Theta\leqslant|x|\wedge|y+z|\leqslant|x|\wedge(|y|+|z|)\leqslant|x|\wedge(2|y|\vee2|z|)=$$
$$=(|x|\wedge2|y|)\vee(|x|\wedge2|z|)=\Theta,$$

即 $\qquad |x|\wedge|y+z|=\Theta$，設 $|x|\wedge|y|=\Theta$，而 $|u|\leqslant|y|$，那末，

$$\Theta\leqslant|x|\wedge|u|\leqslant|x|\wedge|y|=\Theta,\ \text{即}\ |x|\wedge|u|=\Theta,$$

于是証明了 $x^{\perp}$ 确是 E 中的幻，設 $|y_\alpha|\wedge|x|=\Theta(\alpha\in J)$，而 $y_\alpha\leqslant z\in E$，那末，为了証明 $|\vee y_\alpha|\wedge|x|=\Theta$，虽然把每个 y_α 换成 $y_\alpha\vee y_{\alpha_0}(\alpha_0\in J)$ 对于結果并無变更，从而無妨設

$$y\equiv y_{\alpha_0}\leqslant y_\alpha\leqslant z(\alpha\in J),$$

于是 $-y_\alpha\leqslant-y$，从而 $|y_\alpha|\leqslant z\vee(-y)$，既然空間是备的，$\vee|y_\alpha|$ 存在。由此，因

$$y_\alpha\leqslant|y_\alpha|\leqslant\bigvee_{\alpha\in J}|y_\alpha|,\ \text{所以}\ \bigvee_{\alpha\in J}y_\alpha\leqslant\bigvee_{\alpha\in J}|y_\alpha|.$$

而
$$-\vee y_\alpha=\wedge(-y_\alpha)\leqslant-y_\alpha\leqslant\bigvee_{\alpha\in J}|y_\alpha|.$$

所以
$$|\vee y_\alpha|\leqslant\vee|y_\alpha|,$$

因此，为了完成証明，只須証 $\vee|y_\alpha|\wedge|x|=\Theta$，这是由無穷分配律直接推出的：

$$\bigvee_\alpha|y_\alpha|\wedge|x|=\bigvee_\alpha(|y_\alpha|\wedge|x|).\qquad(1)$$

現在証明在备 Riesz 空間中，(1)恒成立。这式可以写成

$$\bigvee_\alpha (|y_\alpha|-|x|)\wedge\Theta=\bigvee_\alpha [(|y_\alpha|-|x|)\wedge\Theta],$$

而取兩边的"負"項，得

$$-\bigvee_\alpha (|y_\alpha|-|x|)\vee\Theta=-\bigvee_\alpha [(|y_\alpha|-|x|)\wedge\Theta]=$$

$$=\bigwedge_\alpha[-(|y_\alpha|-|x|)\vee\Theta].$$

令 $|y_\alpha|-|x|=z_\alpha$，只須証

$$\left(\bigvee_\alpha z_\alpha\right)_-=\bigwedge_\alpha (z_\alpha)_-. \qquad (2)$$

令 $v=\bigvee_\alpha z_\alpha$。因为 $(z_\alpha)_-\geqslant\Theta$，所以 $w=\bigwedge_\alpha (z_\alpha)_-$ 存在。

因 $$-v\leqslant -z_\alpha(\alpha\in J)，所以$$

$$v_-=(-v)\vee\Theta\leqslant(-z_\alpha)\vee\Theta=(z_\alpha)_-$$

从而

$$v_-\leqslant\bigwedge_\alpha (z_\alpha)_-，反之，w\leqslant(z_\alpha)_-，所以 -w\geqslant-(z_\alpha)_-$$

即 $$(z_\alpha)-w\geqslant(z_\alpha)_+-(z_\alpha)_-=z_\alpha,$$

$$\bigvee_\alpha (z_\alpha)_+-w=\bigvee_\alpha [(z_\alpha)_+-w]\geqslant\bigvee_\alpha z_\alpha.$$

但，$$\bigvee_\alpha (z_\alpha)_+=\bigvee_\alpha (z_\alpha\vee\Theta)=\bigvee_\alpha z_\alpha\vee\Theta=v_+$$

所以

$$v_+-w\geqslant v，即 v_-\geqslant w,$$

結合已証得的 $v_-\leqslant w$，即得(2)。証完。

定义 3. 备 Riesz 空間 E 中綫性子空間 X 叫做正則子空間，是指

对于X中每个子集Z,如果Z在E中有上界，那末$\bigvee_{z\in Z} z\in x$。正規且正則的綫性子空間,卽正則的幻,也叫做空間E的成分,或叫做备幻。

定理 2. 在备 Riesz 空間中,为了子集$X=X^{\perp\perp}$,必須且只須x是E中的备幻。

証 必要性巳由定理1推出,因为$X^{\perp\perp}=(X^{\perp})^{\perp}$。反之,設$X$是备幻,現在証$X^{\perp\perp}\subset X$。$X^{\perp\perp}$既是幻,如果$z\in X^{\perp\perp}$因$\Theta\leqslant z_+\leqslant|z|$, $\Theta\leqslant z_-\leqslant|z|$,所以$z_+, z_-\in X^{\perp\perp}$。由于$X^{\perp\perp}$与$X$都是綫性子空間,只須証当$z>\Theta$时,$z\in X^{\perp\perp}\Longrightarrow z\in X$。令

$$z'=z-\bigvee_{x\in X}(z\wedge|x|). \tag{3}$$

我們証$z'\in X^{\perp}$。事实上,对于任意$x\in X$,

$$\Theta\leqslant z'\wedge|x|=z'\wedge(z\wedge|x|)\leqslant z'\wedge\Big(\bigvee_{x\in X}(z\wedge|x|)\Big)=$$

$$=\Big\{z\wedge\Big[2\bigvee_{x\in X}(z\wedge|x|)\Big]\Big\}-\bigvee_{x\in X}(z\wedge|x|)$$

而由無穷分配律[定理1之証],

$$z\wedge 2\bigvee_{x\in X}(z\wedge|x|)=\bigvee_{x\in X}(z\wedge 2z\wedge 2|x|)=\bigvee_{x\in X}(z\wedge|x|)$$

从而$z'\wedge|x|=\Theta$。

另一方面,因$\Theta\leqslant z'\leqslant z$,而$z\in X^{\perp\perp}=$正規的,所以$z'\in X^{\perp\perp}$。于是$z'\in X^{\perp}\cap X^{\perp\perp}$,只能$z'=\Theta$,因为它与自己直交,于是

$$z=\bigvee_{x\in X}(z\wedge|x|)\in X, \tag{4}$$

因为X是备幻。

定义 4. 設X是备 Riesz 空間E的备幻,对于任意$y\in E$

$$P_x y=\bigvee_{x\in X}(y_+\wedge|x|)-\bigvee_{x\in X}(y_-\wedge|x|) \tag{5}$$

叫做 y 在 X 中的投影，而 P_X 叫做与备幻 X 相应的投影算子。

定理 3. 設 E 是备 Riesz 空間，那末对于 E 的任意子集直和分解

$$E = X^{\perp} \dotplus X^{\perp\perp}$$

成立，即 E 中每个元可以一意地表示成 $X^{\perp}$, $X^{\perp\perp}$ 中各一元之和，并且对于这种表示 $y = y_1 + y_2$, 运算 $+$、数乘法、$\vee$ 与 $\wedge$ 都是按坐标取的，即 $y = y_1 + y_2$, $z = z_1 + z_2 \Longrightarrow$

$$y + z = (y_1 + z_1) + (y_2 + z_2),\ y \vee z = (y_1 \vee z_1) + (y_2 \vee z_2),$$

$$y \wedge z = (y_1 \wedge z_1) + (y_2 \wedge z_2).$$

証 由于 $X^{\perp}$, $X^{\perp\perp}$ 都是綫性子空間，只須对正元証明上述分解成立。設 $y > \Theta$, 由(4)(5)知

$$P_{X^{\perp}} y \in X^{\perp}$$

在定理 2 中已經証明

$$y - P_{X^{\perp}} y \in X^{\perp\perp}$$

所以直和分解成立，因为 $X^{\perp} \cap X^{\perp\perp} = \{\Theta\}$。对于任意元 $y \in E$, 依(5),

$$P_X y = P_X y_+ - P_X y_-,$$

而
$$\Theta \leqslant P_X y_+ \wedge P_X y_- \leqslant y_+ \wedge y_- = \Theta$$

所以 $P_X y_+ \wedge P_X y_- = \Theta$, 从而依 §1(習題 1)可知

$$(P_X y)_+ = P_X y_+,\ (P_Y y)_- = P_X y_-.$$

于是一般

$$P_X(y \vee z) = P_X[(y - z)_+ + z] = [P_X(y - z)]_+ + P_X z$$
$$= (P_X y - P_X z)_+ + P_X z = P_X y \vee P_X z.$$

証完。

例 在 $V(\Omega, \mathfrak{B})$ 中取一 $\mu > \Theta$。定义 A_μ 如前。前面已經証明与 μ 直交的一切 $\nu \in V$ 正是那些对 μ 为特异的有穷全加法集函数，这些集函数的全体表示成 S_μ。这就是說

$$\{\mu\}^{\perp} = S_\mu,\ \text{从而}\ A_\mu^{\perp} \subset S_\mu$$

反之，設 $\nu \in S_\mu$, $\nu_1 \in A_\mu$ 那末 Ω 可以分成兩个不相交的集 B_1, B_2, 使

$B_1 \cup B_2 = \Omega$

$$\mu(B_1)=0, \ |\nu|(\beta_2)=0$$

于是依 A_μ 的定义，$|\nu_1|(B_1)=0$，但这正是說 $|\nu_1|$ 与 $|\nu|$ 是互相特异，从而 $|\nu_1| \wedge |\nu| = \Theta$，所以 $\nu \in A_\mu^\perp$，即 $S_\mu \subset A_\mu^\perp$ 于是得知

$$S_\mu = A_\mu^\perp.$$

剩下还要証明 $S_\mu^\perp = A_\mu$，于是就可得知 $A_\mu = A_\mu^{\perp\perp}$，从而 $S_\mu^{\perp\perp} = S_\mu$，即 A_μ，S_μ 都是 V 中的备幻，为此，設 $y > \Theta$，$y \in S_\mu^\perp = A_\mu^{\perp\perp} = \{\mu\}^{\perp\perp}$。令

$$y' = y - \bigvee_{n=1}^{\infty} (y \wedge n\mu)$$

于是 $\Theta \leqslant y' \leqslant y$，而

$$\Theta \leqslant y' \wedge \mu = y' \wedge y \wedge \mu \leqslant y' \wedge \bigvee_n (y \wedge n\mu) =$$

$$= \left(y \wedge 2 \bigvee_n (y \wedge n\mu)\right) - \bigvee_n (y \wedge n\mu) =$$

$$= \bigvee_n (y \wedge n\mu) - \bigvee_n (y \wedge n\mu) = \Theta$$

从而 $y' \in \{\mu\}^\perp = S_\mu$。但已設 $y \in S_\mu^\perp$，而 $\Theta \leqslant y' \leqslant y$，所以 $y' = \Theta$，即

$$y = \bigvee_{n=1}^{\infty} (y \wedge n\mu).$$

但 $y \wedge n\mu \in A_\mu$，因为

$$\mu(E_1) = 0 \Longrightarrow n\mu(E_1) = 0 \Longrightarrow (y \wedge n\mu)(E_1) = 0,$$

所以
$$y(E_1) = \sup_{\substack{\bigcup E'_k = E_1 \\ E'_k \cap E'_j = \phi (k \neq j)}} \{\Sigma (y \wedge n_k \mu)(E'_k)\} = 0$$

因为一切 $y \wedge n\mu \geqslant \Theta$，于是 $y \in A_\mu$。这証明了 $S_\mu^\perp \subset A_\mu$。但 $A_\mu \subset S_\mu^\perp$ 是显然的，因为

$$\nu \in A_\mu \Longrightarrow (\mu(E) = 0 \Longrightarrow |\nu|(E) = 0),$$

从而对于每个 $\nu_1 \in S_\mu$，存在 $E \subset \Omega$，$\mu(E) = 0$，$|\nu_1|(\Omega \setminus E) = 0$，所以

$|\nu|(E)=0$, $|\nu_1|(\Omega\setminus E)=0$, 即 $\nu\perp\nu_1$。这就証明了。

$$A_\mu=S_\mu^\perp.$$

于是証完。特别得知 A_μ 与 S_μ 都是备幻，从而它們自己按照 V 中的序也是备 Riesz 空間，依定理 3, 有直和分解。

$$V=A_\mu+S_\mu.$$

下面在一般 σ-备 Riesz 空間中証明 V 中上述結果的推广:

定理 4. 設 E 是 σ-备 Riesz 空間。取 E 中一元 $a>\Theta$, 称它作單位，而考察

$$\mathfrak{F}(a)\equiv\{e\,|\,\Theta\leqslant e\leqslant a,\ e\wedge(a-e)=\Theta,\ e\in E\},$$

那末 $\mathfrak{F}(a)$ 是 Boole 代数。令

$$A(a)=\left\{(o)\text{-}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n}\alpha_i^{(n)}e_i^{(n)}\,\Big|\,e_i^{(n)}\in\mathfrak{F}(a),\ \alpha_i^{(n)}\in R\right\}$$

$$S(a)=\{x\,|\,x\in E,\ |x|\wedge a=\Theta\}$$

那末 E 中元可以一意表示成 $A(a)$ 与 $S(a)$ 中各一元之和，即下列直和分解成立

$$E=A(a)+S(a),$$

証 証明比較長，分下列五步。

1) $\mathfrak{F}(a)$ 是 Boole 代数。首先，$e\in\mathfrak{F}(a)\Longrightarrow a-e\in\mathfrak{F}(a)$ 这是显然的，又因 $e\wedge(a-e)=\Theta\Longleftrightarrow 2e\wedge a=e$, 由此不难看出

$$e_1,e_2\in\mathfrak{F}(a)\Longrightarrow e_1\vee e_2,\ e_1\wedge e_2\in\mathfrak{F}(a),$$

因为 $$2(e_1\vee e_2)\wedge a=(2e_1\wedge a)\vee(2e_2\wedge a)=e_1\vee e_2;$$

$$2(e_1\wedge e_2)\wedge a=(2e_1\wedge a)\wedge(2e_2\wedge a)=e_1\wedge e_2,$$

因 $e\vee(a-e)=e+(a-e)=a$, 所以 $\mathfrak{F}(a)$ 是 Boole 代数，其最大元是 a, 其最小元是 Θ。

2) 如果 $x>\Theta$, $x\wedge a\neq\Theta$, 必存在正数 α 与 $e_\alpha\in\mathfrak{F}(a)$, $e_\alpha\neq\Theta$, 使 $x\geqslant\alpha e_\alpha$。

事实上，令①

$$e_\alpha=\bigvee_{n=1}^{\infty}\left\{n\left(\frac{x}{\alpha}-\frac{x}{\alpha}\wedge a\right)\wedge a\right\},\quad y_\alpha\equiv\frac{x}{\alpha}-\left(\frac{x}{\alpha}\wedge a\right)$$

我們証明 $e_\alpha\in\mathfrak{F}(a)$

$$2e_\alpha\wedge a=\bigvee_{n=1}^{\infty}(2ny_\alpha\wedge 2a)\wedge a=\bigvee_{n=1}^{\infty}(2ny_\alpha\wedge a)=e_\alpha.$$

又因对于任意 n,

$$-ny_\alpha\wedge a=\left[\frac{nx}{\alpha}-\frac{nx}{\alpha}\wedge na\right]\wedge a=\frac{nx}{\alpha}\wedge\left[a+\left(\frac{nx}{\alpha}\wedge na\right)\right]-$$

$$-n\left(\frac{x}{\alpha}\wedge a\right)\leqslant(n+1)\frac{x}{\alpha}\wedge(n+1)a-n\left(\frac{x}{\alpha}\wedge a\right)\leqslant\frac{x}{\alpha}\wedge a\leqslant\frac{x}{\alpha},$$

从而

$$x\geqslant\alpha\bigvee_{n}(ny_\alpha\wedge a)=\alpha e_\alpha$$

剩下要証 $e_\alpha>\Theta$, 只須証明存在正数 α, 使 $y_\alpha\wedge a>0$。否則对于每个滿足 $0<\alpha<1$ 的 α,

$$\frac{1}{\alpha}\left[\frac{x}{\alpha}-\frac{x}{\alpha}\wedge a\right]\wedge\frac{1}{\alpha}a=\frac{1}{\alpha}(y_\alpha\wedge a)=\Theta,$$

所以

$$\left(\frac{x}{\alpha}-\frac{x}{\alpha}\wedge a\right)\wedge\frac{a}{\alpha}=\Theta$$

即 $(x-x\wedge\alpha a)\wedge a=\Theta$。令 $\alpha\to 0$, 由于 σ- 备 Riesz 空間中各种运算对于(0)斂的連續性，可知 $x\wedge a=\Theta$, 与所設矛盾。

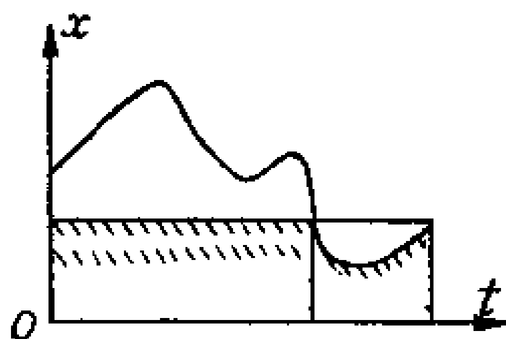


圖 6.

① 在 $S(\Omega,\mathfrak{B},\mu)$ 中，取 a 为殆遍等于 1 的函数，e_α 的意义不难由圖 6 看出，从而 e_α 的解析式就不难猜想到了。

3) 設 $x\geqslant\Theta$, $x\geqslant\alpha e$, $e\in\mathfrak{F}(a)$, $\alpha>0$, 那末由 $0<\alpha'<\alpha$ 可知 $e_{\alpha'}\geqslant e$ 且 $x\geqslant\alpha' e_{\alpha'}$。無妨設 $\alpha=1$, 因为否則用 $\frac{x}{\alpha}$ 代替 x 就够了。設 $0<\delta<1$, 那末

$$\frac{x}{1-\delta}+\left(\frac{e}{1-\delta}\wedge a\right)=\left(\frac{x}{1-\delta}+\frac{e}{1-\delta}\right)\wedge\left(a+\frac{x}{1-\delta}\right)\geqslant$$

$$\geqslant\left(\frac{x}{1-\delta}+\frac{e}{1-\delta}\right)\wedge\left(a+\frac{e}{1-\delta}\right)=\left(\frac{x}{1-\delta}\wedge a\right)+\frac{e}{1-\delta}$$

既然 $e\in\mathfrak{F}(a)$, 可知 $2e\wedge a=e$, $e\wedge a=e$, 从而不难看出对于任意 $m\geqslant1$, $me\wedge a=e$(即容易証明 $me\wedge(a-e)=\Theta$)。于是因

$$1<\frac{1}{1-\delta}, \text{ 必然 } \frac{e}{1-\delta}\wedge a=e, \text{ 从而由上面不等式}$$

得
$$\frac{e}{1-\delta}-\left(\frac{e}{1-\delta}\wedge a\right)\leqslant\frac{x}{1-\delta}-\left(\frac{x}{1-\delta}\wedge a\right)=y_{1-\delta},$$

所以
$$\frac{\delta}{1-\delta}e\leqslant y_{1-\delta}, \quad e\leqslant\frac{1-\delta}{\delta}y_{1-\delta}.$$

但 $e\leqslant a$, 所以

$$e\leqslant\bigvee_{n}(ny_{1-\delta}\wedge a)=e_{1-\delta}.$$

因 $y_{1-\delta}\wedge x\geqslant\frac{\delta}{1-\delta}e\wedge x>\Theta$($\because x\geqslant e$), 証完。

4) 設 $x>\Theta$, 令

$$x=\sup_{\substack{\beta>0\\ \beta\in Q\\ \beta e_\beta\leqslant x}}\beta e_\beta$$

这里 Q 表示有理数全体。因有理数集是可数的，可以把满足上述"上端"符号下所写的条件中的 β 写成 $\beta_1, \beta_2, \cdots\beta_n, \cdots$ 于是上式可以写成。

$$x=(0)\text{-}\lim_{n\to\infty}\bigvee_{i=1}^{n}\beta_i e_{\beta_i}.$$

但任意有穷多个 $e_1, \cdots, e_n\in\mathfrak{F}(a)$ 可以写成有穷多个互相直交的元 $e_1', \cdots$

$\cdots, e'm \in f(a)$的綫性組合。如果 $n=2$, 只須令

$$e_1'=e_1\wedge e_2,\ e_2'=e_1-e_1',\ e_3'=e_2-e_1'.$$

注意,

$$(e_1'\wedge e_2')=(e_1-e_1\wedge e_2)\wedge(e_1\wedge e_2)\leqslant(e_1\wedge e_2)\wedge(a-(e_1\wedge e_2))=\Theta$$

其余也类似地得証。設命題对 $n-1$ 已知,于是对于 $e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}, e_n$,存在两两直交的元 $e_1', \cdots, e_n'$, 使每个 $e_i(1\leqslant i\leqslant n-1)$可以表示成 $e_1', \cdots, e_m'$ 的綫性組合,令

$$e'_{m+i}=e_n\wedge e_i',\ e'_{m+m+1}=e_n-\sum_i e_n\wedge e_i',$$

$$e_i''=e_i'-e'_{m+i}(1\leqslant i\leqslant m),$$

那末 $e_1'', \cdots, e_m'', e'_{m+1}, \cdots, e'_{2m}, e'_{2m+1}$ 即满足要求。因

$$e\wedge e'=\Theta\Longrightarrow \alpha e\wedge\beta e'=\Theta(\alpha, \beta>0)$$

而直交元的結等于其和,所以 $\bar{x}$ 可以表示成$\mathfrak{F}(a)$中元的有穷綫性組合的(0)極限,即 $\bar{x}\in A(a)$。令 $y=x-\bar{x}$, 那末 $y\geqslant\Theta$。我們証明 $y\in S(a)$。如果 $y\notin S(a)$, 依証明的 2), 存在 $e\in\mathfrak{F}(a)$及有理数$\alpha>0$, 使 $y\geqslant\alpha e$, 于是 $\alpha e\leqslant x$, 从而依 $\bar{x}$ 的定义, $\bar{x}\geqslant\alpha e$。依証明中的 3), 如果 $0<\alpha^{(1)}<\alpha$, 必然 $x\geqslant\alpha^{(1)}e_{\alpha^{(1)}}, e_{\alpha^{(1)}}\geqslant e$, 所以, $x=\bar{x}+y\geqslant2\alpha^{(1)}e$。又如 $0<\alpha^{(2)}<\alpha^{(1)}$, 必然有

$$e_{\alpha^{(2)}}\in\mathfrak{F}(a),\ e_{2\alpha^{(2)}}\geqslant e,\ x\geqslant2\alpha^{(2)}e_{2\alpha^{(2)}},$$

所以

$$x=\bar{x}+y\geqslant3\alpha^{(2)}e$$

于是繼續下去,得一串数, $\alpha^{(n)}, 0<\alpha^{(n)}<\alpha$,

$$x\geqslant(n+1)\alpha^{(n)}e(n=1, 2, \cdots).$$

如果取 $\alpha^{(n)}\geqslant\frac{\alpha}{2}$, 那末

$$(n+1)\alpha^{(n)}e\geqslant\frac{n}{2}\alpha e,\ \text{从而}\ x\geqslant n\alpha e(n=1, 2, \cdots),$$

这与阿基米德公理相矛盾。所以 $y\in S(a)$。

5) 分解 $x=\bar{x}+y$ 是一意的, 只須証明如果 $h\in A(a)\cap S(a)$, 那末

$h=\Theta$。一方面，

$$h=(0)\text{-}\lim_{n\to\infty} h_n$$

h_n 是 $\mathfrak{F}(a)$ 中元的綫性組合，从而存在正数 α_n，使 $|h_n|\leqslant\alpha_n a$。另一方面，h 是 $S(a)$ 中的元，所以 $|h|\wedge a=\Theta$，$|h|\wedge|h_n|=\Theta$，取(0)-極限，得 $|h|=|h|\wedge|h|=\Theta$，証完。

例 考 $V(\Omega,\mathfrak{B})$，取 V 中一个固定的元 $\mu>\Theta$。作 $\mathfrak{F}(\mu)$如定理 4，我們証明 $e\in\mathfrak{F}(\mu)\Longleftrightarrow\exists E_0\in\mathfrak{B}, e(E)=\mu(E\cap E_0)\ (E\in\mathfrak{B})$。事实上，如果 $e(E)=\mu(E\cap E_0)E_0\in\mathfrak{B}$，那末

$$[(\mu-e)\wedge e](E)=\inf_{E'\subset E}\{(\mu-e)(E')+e(E\setminus E')\},$$

特别令 $E'=E_0\cap E$，$e(E\setminus E')=0$，$(\mu-e)(E')=\mu(E_0\cap E)-e(E_0\cap E)=0$，所以$(\mu-e)\wedge e=\Theta$。反之，如 $e\in\mathfrak{F}(\mu)$，$e\neq\Theta$，那末 $e\wedge(\mu-e)=\Theta$，从而$(\mu-e)\perp e$，卽存在 $E_0'\in\mathfrak{B}$，使$e(E_0')=0$，$(\mu-e)(E)=(\mu-e)(E\cap E_0')$，因为 $(\mu-e)(\Omega\setminus E_0')=0$，于是 $\mu(E)-e(E)=\mu(E\cap E_0')-e(E\cap E_0')=\mu(E\cap E_0')$，所以

$$e(E)=\mu(E\cap E_0),\ E_0=\Omega\setminus E_0'$$

于是 $A(\mu)$ 中的元乃是 $\mathfrak{F}(\mu)$ 中元 ν 的綫性組合的(0)極限，而在每个綫性組合中，那些元可以設为互相直交的。

$$\nu=(0)\text{-}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n}\lambda_i^{(n)}e_i^{(n)}$$

但对每个 $e_i^{(n)}$，依上述有一相应的 $E_i^{(n)}\in\mathfrak{B}$，从而

$$\sum_{i=1}^{k_n}\lambda_i^{(n)}e_i^{(n)}(E)=\sum_{i=1}^{k_n}\lambda_i^{(n)}\mu(E\cap E_i^{(n)})=$$

$$=\sum_{i=1}^{k_n}\lambda_i^{(n)}\int_E\chi_{E_i^{(n)}}(t)\mu(dt)=\int_E\sum_{i=1}^{k_n}\lambda_i^{(n)}\chi_{E_i^{(n)}}(t)\mu(dt)\quad(6)$$

这里 $\chi_{E_i^{(n)}}$ 表示集 $E_i^{(n)}$ 的特征函数。注意 $\Sigma\lambda_i^{(m)}\chi_{E_i^{(m)}}(t)$ 正是簡單函

数，而簡單函数列的極限是可測函数。考察(6)的左边，为簡單起見，令

$$\nu_n = \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i^{(n)} e_i^{(n)},\text{ 那末}$$

$$|\nu_n(E) - \nu(E)| \leqslant |\nu_k - \nu|(E) \leqslant |\nu_k - \nu|(\Omega) = \|\nu_k - \nu\| \qquad (7)$$

而既然 $\nu = (0)\text{-}\lim \nu_k$，必然 $\|\nu_k - \nu\| \to 0\ (k \to \infty)$①，从而(6)的左边当 $n \to \infty$ 时收斂于 $\nu(E)$。令

$$\sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i^{(n)} \chi_{E_i^{(n)}}(t) = \alpha_n(t),$$

那末由(6)(7)可知对于任意 $\varepsilon > 0$，可取 $n = n(\varepsilon)$ 使

$$p, q \geqslant n \Longrightarrow \left| \int_E (\alpha_p(t) - \alpha_q(t)) \mu(dt) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (8)$$

对任意 $E \in \mathfrak{B}$ 一致成立，对于固定的 p, q，分别取 E 为集

$$\{t \mid \alpha_p(t) \geqslant \alpha_q(t)\},\text{ 与 } \{t \mid \alpha_p(t) < \alpha_q(t)\}.$$

并把(8)中兩个相应不等式按絕对值相加，得

$$\int_\Omega |\alpha_p(t) - \alpha_q(t)| \mu(dt) < \varepsilon \qquad (p, q \geqslant n)$$

这意味着 (α_p) 平均收斂，从而要含一子列殆遍收斂。这个子列的殆遍收斂極限是一可測函数 $\alpha(t)$，并且 $\alpha(t)$ 是按 μ 可积分。因此，在(6)中令 $n \to \infty$，得

$$\nu(E) = \int_E \alpha(t) \mu(dt),$$

从而 $\nu(E)$ 是一个"不定积分"，証明了 Radon-Ninkodym 定理。

关于从 Riesz 空間的眼光对 Radon-Nikodym 定理的进一步研究，請参看下列文献：

① 依§1定理2，$\exists w_k \downarrow \Theta$，使 $|\nu_k - \nu| \leqslant w_k$，故 $\|\nu_k - \nu\| \leqslant \|w_k\|$，而由習題2的1，$\|w_k\| \to 0$。

河田敬义与森田紀一：Radon-Nikodym の定理をめぐつて；日本数学物理学会志，15(1942), 171—186。

Dieudonné, J: Sur le théoréme de Lebesgue-Nikodym, (I), Ann. math, 42(1941), 547—555; (II) Bull. Soc. math. Fr. 72(1944), 193—239, (III) (IV), J. Ind. math. Soc. 15(1951), 77—86, (V) Canad, J. math. 3(1951), 129—139。

習 題 三

1. 求証由(5)定义的备 Riesz 空間中的投影算子满足下列条件：

(i) $P_X y \in x, P_X y = \Theta \Longleftrightarrow y \in x^{\perp}$

$y - P_X y \in x^{\perp}, y = P_X y \Longleftrightarrow y \in x$.

(ii) $P_X(y+z) = P_X y + P_X z, P_x(\alpha y) = \alpha P_X y$,

(iii) $P_X^2 y = P_X y$.

(iv) $y \geqslant \Theta \Longrightarrow P_X y \geqslant \Theta$

(v) $|P_X y| \leqslant |y|$

(vi) $P(\sup\limits_{\alpha} x_\alpha) = \sup\limits_{\alpha} P x_\alpha, P(\inf\limits_{\alpha} x_\alpha) = \inf\limits_{\alpha} P x_\alpha$

(vii) $P((0)\lim\limits_{n} x_n) = (0)\text{-}\lim\limits_{n} P x_n$.

求証如果定义在备 Riesz 空間 E 中的算子 P 满足下列条件：

a) $\Theta \leqslant P_X \leqslant x (\Omega x \geqslant \Theta, x \in E)$,

b) $P(P_X) = Px$

c) $P(x+y) = Px + Py$;

那末 P 是投影算子，与它相应的备幻是 $x = \langle x \mid x \in E, Px = x \rangle$。

2. 設 E 是备 Riesz 空間，并且設有一元 $1 > \Theta$，使 $x \in E$，$x > \Theta \Longrightarrow 1 \wedge x > \Theta$。求証 $\langle 1 \rangle^{\perp\perp} = E$。求証对于 E 的每个备幻 x，必存在 $x > \Theta, x \in E$，使 $x = \langle x \rangle^{\perp\perp}$。当 P 遍表 E 中一切投影算子时，$\langle P1 \rangle$ 組成一个 Boole 代数表示成 $\mathfrak{P}$。設

$$k(x) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} d_k e_k \mid \alpha_k \geqslant 0, l_k \in \mathfrak{P}, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k, l_k \leqslant x, n \in N \right\}$$

这里 $x \in E, x \geqslant \Theta$；$N$ 代表自然数全体，求証

$$\bigvee_{y \in k(x)} y = x$$

3. 求解释在 R_A 中，$A \downarrow B$ 的意义，及 $A^{\perp\perp}$ 的意义，求証不变算子 I 满足習題 2 中單位元 II 的性質，而相应的 $\mathfrak{P}$ 由 R_A 中一切直交投影算子所組成。

§4. 譜分解

为了在 σ-备 Riesz 空間中証明譜分解定理，我們需要在这种空間中的投影的概念，因此，这里把前节中的一部分結果推广到 σ-备 Riesz 空間中去。这里的叙述方式是根据中野秀五郎的①。

定理 1. 在 σ-备 Riesz 空間 E 中对于任意元 p，

$$S(p)=\{p\}^{\perp},\quad A(p)=\{p\}^{\perp\perp}$$

都是幻(正規綫性子空間)，并且 $\{p\}^{\perp}=\{p\}^{\perp\perp\perp}$。

証　仿 §3 中的結果，因为这里不牽涉到备 Riesz 空間中有关备性的特有屬性[見 §3 定理 1 証明的最前部分]。

定理 2. 在 σ-备 Riesz 空間 E 中，为了 $x\in A(p)$ 必須且只須

$$(0)\text{-}\lim_{\nu\to\infty}\{|x|\wedge\nu|p|\}=|x|.$$

証　1) 設 $x\in A(p)$。令

$$x_0=(0)\text{-}\lim_{\nu\to\infty}\{|x|\wedge\nu|p|\}.$$

不难看出 $x_0\leqslant|x|$。因

$$|x|\wedge(|p|+x_0)=|x|\wedge(|p|+(0)\text{-}\lim_{\nu\to\infty}(|x|\wedge\nu|p|)=$$

$$=|x|\wedge(0)\text{-}\lim_{\nu\to\infty}\{(|x|+|p|)\wedge((\nu+1)|p|)\}=$$

$$=(0)\text{-}\lim_{\nu\to\infty}(|x|\wedge(|x|+|p|)\wedge(\nu|p|))=$$

$$=(0)\text{-}\lim_{\nu\to\infty}(|x|\wedge\nu|p|)=x.$$

故　$(|x|-x_0)\wedge|p|=|x|\wedge(|p|+x_0)-x_0=0$，即 $|x|\wedge(|x|-x_0)=0$，因 $|x|-x_0\in\{p\}^{\perp}$。而 $x\in\{p\}^{\perp\perp}$。因 $|x|\wedge(|x|-x_0)=|x|-x_0$，故 $|x|=x_0$。

---

① H. Nakano: Teilweise geordnete Algebra, Jap. J. Math. 17(1940)425—511。

2) 反之,設

$$(o)\text{-}\lim_{\nu\to\infty}\{|x|\wedge\nu|p|\}=|x|,$$

那末对每个 $y\in\{p\}^{\perp}$,

$$|x|\wedge|y|=\{(o)\text{-}\lim_{\nu\to\infty}[(|x|\wedge\nu|p|)]\wedge|y|=$$

$$=(o)\text{-}\lim_{\nu\to\infty}[(|x|\wedge\nu|p|)\wedge|y|]=(o)\text{-}\lim_{\nu\to\infty}[|x|\wedge 0]=0,$$

从而 $|x|\in\{p\}^{\perp\perp}$.

定理 3. 每个 σ-备 Riesz 空間 E 具有直和分解

$$E=S(p)+A(p)\quad(p\in E),$$

换句話說,每个 $x\in E$ 一意地表示成 $S(p)$ 与 $A(p)$ 中各一元之和:

$$x=y+z,\quad y\in A(p),\quad z\in S(p).$$

証 設 $y_1=(o)\text{-}\lim_{\nu\to\infty}\{x_+\wedge\nu|p|\}$, 那末 $y_1\wedge\mu|p|=$

$$(o)\text{-}\lim_{\nu\to\infty}(x_+\wedge\nu|p|)\wedge\mu|p|=(o)\text{-}\lim_{\nu\to\infty}\{x_+\wedge\nu|p|\wedge\mu|p|\}=$$

$$=x_+\wedge\mu|p|.$$

从而

$$(o)\text{-}\lim_{\mu\to\infty}\{y_1\wedge\mu|p|\}=(o)\text{-}\lim_{\mu\to\infty}\{x_+\wedge\mu|p|\}=y_1.$$

而依定理 2, $y_1\in A(p)$。令 $x_+-y_1=z_1$, 那末, $z_1\geqslant 0$, 且 $z_1\wedge|p|=(x_+-y_1)\wedge|p|=\{x_+\wedge(|p|+y_1)\}-y_1=[x_+\wedge\{|p|+(o)\text{-}\lim_{\nu\to\infty}(y_1\wedge\nu|p|)\}]-y_1=(o)\text{-}\lim_{\nu\to\infty}\{x_+\wedge[(|p|+y_1)\wedge(\nu+1)|p|]\}-y_1=$

$$=\{y_1\wedge(|p|+y_1)\}-y_1=0,$$

故 $z_1\in S(p)$.

同理,令 $y_2=(o)\text{-}\lim_{\nu\to\infty}\{x_-\wedge\nu|p|\}$, $z_2=x_--y_2$。

可以証明 $y_2\in A(p)$, $z_2\in S(p)$。令 $y=y_1-y_2$, $z=z_1-z_2$, 于是 $y\in A(p)$, $z\in S(p)$。

設 $x=y'+z'$, $y'\in A(p)$, $z'\in S(p)$, 那末 $y-y'=z'-z\in A(p)\cap\cap S(p)$, 从而 $y-y'$ 与自己直交，故 $y-y'=z'-z=0$, 即分解是一意的。

定义 1. 定理 3 中的元 y:

$$y=(0)\text{-}\lim_{\nu\to\infty}\{x_+\wedge\nu|p|\}-(0)\text{-}\lim_{\nu\to\infty}\{x_-\wedge\nu|p|\} \qquad (1)$$

叫做 x 在 $A(p)$ 中的投影，表示成 $[p]x$, $[p]$ 叫做元 p 决定的投影算子。

定理 4. 在 σ-备 Riesz 空間 E 中，由一元 p 决定的投影算子 $[p]$ 具有下列屬性:

1° $[p]x=[|p|]x$, $[\alpha p]x=[p]x$ 对每个实数 $\alpha\neq0$ 成立, $(x\in E)$;

2° $x\in A(p)\Longleftrightarrow[p]x=x$;

3° $[p]x=0\Longleftrightarrow|x|\wedge|p|=0$;

4° $[p]^2x=[p][p]x=[p]x$;

5° $[p]|x|=(0)\text{-}\lim\limits_{\nu\to\infty}\{|x|\wedge\nu|p|\}$;

6° 对于每个实数 α, $[p](\alpha x)=\alpha[p]x$;

7° $[p](x+y)=[p]x+[p]y$;

8° $[p]x_+=([p]x)_+$, $[p]x_-=([p]x)_-$,

$[p](x\vee y)=[p]x\vee[p]y$;

$[p](x\wedge y)=[p]x\wedge[p]y$;

9° $[p]|x|=|[p]x|\leqslant|x|$;

10° 如果 $(0)\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, 那末 $(0)\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}[p]x_n=[p]x$;

11° $A(p)\subset A(q)\Longleftrightarrow S(p)\supset S(q)\Longleftrightarrow$ 对每个 $x\in E$, $[p]|x|\leqslant[q]|x|\Longleftrightarrow[p][q]x=[q][p]x=[p]x$, $x\in E\Longleftrightarrow p\in A(q)$;

这时我們写作 $[p]\leqslant[q]$

12° $[[p]q]x=[[q]p]x=[p][q]x=[q][p]x=[|p|\wedge|q|]x$;

13° $|p|\wedge|q|=0\Longrightarrow[p+q]x=[p]x+[q]x$;

14° $[|p|+|q|]=[|p|\wedge|q|]$;

15° $[p]x+[q]x=[|p|\vee|q|]x+[|p|\wedge|q|]x$, $(x\in E)$;

16° 如果$[p]|x|\geqslant[q]|x|$(一切 $x\in E$), 那末 $[p]-[q]$ 是投影算子，且$[p]-[q]=[p-[q]p]$;

17° 如$|p_n|\uparrow|p_0|$, 那末对于每个 $x\in E$,

$$(0)\text{-}\lim_{n\to\infty}[p_n]x=[p_0]x;$$

18° 設$[p_n]$是一串投影算子，而$[p_1]|x|\leqslant[p_2]|x|\leqslant\cdots\leqslant[p_n]|x|\leqslant\cdots\leqslant[a]|x|$ $(x\in E)$, 那末存在一元 $b\in E$, 使对于每个 $x\in E$,

$$(0)\text{-}\lim_{n\to\infty}[p_n]x=[b]x,$$

这时写作$[b]=\lim\limits_{n\to\infty}[p_n]$

19° 設$[p_1]\geqslant[p_2]\geqslant\cdots\geqslant[p_n]\geqslant\cdots$, 那末必存在 $a\in E$, 使对于每个 $x\in E$,

$$(0)\text{-}\lim_{n\to\infty}[p_n]x=[a]x,$$

这时写成$[a]=\lim\limits_{n\to\infty}[p_n]$

証:

1° 因为在定义$[p]x$ 时，只用了$|p|$而不用 p[見公式(1)], 所以$[p]=[|p|]$。在(1)中用 αp 代替 $p(\alpha\neq0)$也不影响(0)極限的値，

故 $[\alpha p]=[p]\ (\alpha\neq0)$。

2° 因 $A(p)$是幻，$x\in A(p)\Longleftrightarrow x_+$, $x_-\in A(p)$。依(1)与定理 2, 对于任意 $x\geqslant0$, $x\in A(p)\Longleftrightarrow[p]x=x$, 因依(1), $[p]x=[p]x_+-[p]x_-$, 故 2° 得証。

3° 因$|p|\wedge|x|=0\Longleftrightarrow x_+\wedge|p|=x_-\wedge|p|=0$,

故 3° 由(1)看出。

4° 在定理 3 的証明中巳証$[p]x\in A(p)$, 从而 4° 由 2° 得出。

5° 由(1)得出，因$|x|\geqslant0$。

6° 如 $x=y+z, y\in A(p), z\in S(p)$, 那末 $\alpha x=\alpha y+\alpha z$, 而 $A(p)$ 与 $S(p)$都是幻，故 $\alpha y\in A(p)$, $\alpha z\in S(p)$, 故 $\alpha y=[p]\alpha x$（由直和分解的一意性）。

7° 的証与 6° 相仿。

8° 由于 $x_+\wedge x_-=0$, 定理 3 中的 y_1 与 y_2 也必直交，因为 $0\leqslant y_1\leqslant x_+$, $0\leqslant y_2\leqslant x_-$。故 依(1), $([p]x)_+=y_1$, $([p]x)_-=y_2$,
但 $y_1=[p]x_+$, $y_2=[p]x_-$, 故 8° 的前半得証。于是

$$[p](x\vee y)=[p]((x-y)_++y)=[p](x-y)_++[p]y=$$

(依 7°) $$=([p](x-y))_++[p]y=([p]x-[p]y)_++[p]y=$$
$$=[p]x\vee[p]y,$$

$$[p](x\wedge y)=-[p]\{-(x\wedge y)\}=-[p](-x\vee -y)=$$
$$=-([p](-x)\vee[p](-y))=$$
$$=-(-[p]x\vee -[p]y)=[p]x\wedge[p]y.$$

9° $$|[p]x|=([p]x)_++([p]x)_-=[p]x_++[p]x_-=$$
(依 8°, 7°) $$=[p](x_++x_-)=[p]|x|$$

而$[p]|x|\leqslant|x|$由$[p]$的定义直接看出。

10° 由于 $|[p]x_n-[p]x|=|[p](x_n-x)|\leqslant|x_n-x|$,

故　由(0)斂的定义，得出 10°。

11° 因$(A(p))=(S(p))^{\perp}$, 而 $S(p)=(A(p))^{\perp}$, 所以 11° 的第一式是显然的。設 $A(p)\subset A(q)$, 而 $x=y+z$, $y\in A(q)$, $z\in S(q)$, 那末因 $S(q)\subset S(p)$, 故 $z\in S(p)$依 3°, $[p]z=0$, 故 $[p]|z|=|[p]z|=0$(依 9°), 故

$[p]|x|\leqslant[p](|y|+|z|)=[p]|y|+[p]|z|=[p]|y|\leqslant|y|=[q]|x|$.
反之，設$[p]|x|\leqslant[q]|x|$(一切 $x\in E$)，那末对于 $x\in A(p)$, 依 2°,

$$|x|=[p]|x|\leqslant[q]|x|\leqslant|x|,$$

故 $[q]|x|=|x|$, 即 $|x|\in A(q)$, 故 $x\in A(q)$, 从而 $A(p)\subset A(q)$。設 $A(p)\subset A(q)$, 則 $S(p)\supset S(q)$, 故如 $x=y+z$, $y\in A(q)$, $z\in S(q)$, 則

$[p]x=[p]y=[p][q]x(x\in E)$。又因$[p]x\in A(p)\subset A(q)$, $\therefore [q][p]x=[p]x$。反之設$[q][p]x=[p]x$, 則

$$[p]|x|=[p][q]|x|=|[p][q]x|\leqslant[q]|x|.$$

設 $[p][q]x=[q][p]x=[p]x$ 凡 $x\in E$, 那末

$$p=[p]p=[q][p]p\in A(q),$$

而反之,如 $p\in A(q)$, 卽 $p\in\{q\}^{\perp\perp}$, 从而$\{p\}^{\perp}\supset\{q\}^{\perp}$,

故 $[p]|x|\leqslant[q]|x|$ 一切 x.

于是証得了 11° 中一切条件的等价性。

12° 設$|p|\wedge|q|\wedge x=0$, 則$|p|\wedge\nu|q|\wedge x=0$, 对 ν 取$\vee$, 得

$$|[q]p|\wedge x=0. \tag{2}$$

这就是說 $S(|p|\wedge|q|)\subset S([q]p)$, 由(2)知$[q]|p|\wedge|q|\wedge x=0$,

但 $[q]|p|\wedge|q|=(o)\text{-}\lim\limits_{\nu\to\infty}(|p|\wedge\nu|q|)\wedge|q|=|p\wedge|q|$,

故$|p|\wedge|q|\wedge x=0$, 故$S([q]p)\subset S(|p|\wedge|q|)$。由此,并依 11° 得知$[|p|\wedge|q|]=[[q]p]$。于是依对称的关系得

$$[[p]q]=[[q]p]=[|p|\wedge|q|].$$

如$|p|\wedge|q|\wedge y=0$, 那末对于任意 x, $|p|\wedge|q|\wedge|x|\wedge y=0$, 故$|x|\wedge\nu|p|\wedge\mu|q|\wedge y=0$ $(\nu, \mu=1, 2, \cdots)$。对 ν 取$\vee$, 得$|[p]x|\wedge\mu|q|\wedge y=0$, 再对 μ 取$\vee$, 得

$$|[q][p]x|\wedge y=0$$

故 $[q][p]x\in\{|p|\wedge|q|\}^{\perp\perp}=A(|p|\wedge|q|)$. 依 2°

$$[|p|\wedge|q|][q][p]x=[q][p]x.$$

但依 11°, $|a|\leqslant|b|\Longrightarrow\{b\}^{\perp}\subset\{a\}^{\perp}\Longrightarrow[a]\leqslant[b]$,

故 $[|p|\wedge|q|][q][p]x=[|p|\wedge|q|][p]x=[|p|\wedge|q|]x$,

故 $[q][p]x=[|p|\wedge|q|]x$。由对称关系知$[|p|\wedge|q|]x=$
$=[p][q]x$, 故 12° 証完。

13° 設$|p|\wedge|q|=0$, $x\geqslant0$, 故 $q\in S(p)$, $[p]x\in A(p)$,

故 $[p]x\wedge|q|=0$, 故 $[p]x\in S(q)$, 而因$[q]x\in A(q)$, 故

$[p]x\wedge[q]x=0$。但依 11° 及 12° 的証明，$[p]x\leqslant[|p|+|q|]x$，$[q]x\leqslant[|p|+|q|]x$，故 $[p]x+[q]x=[p]x\vee[q]x\leqslant[|p|+|q|]x$.

令 $z=x-[p]x$，故 $z\in S(p)$。于是依 11°，

$[|p|+|q|]x=[|p|+|q|]([p]x+z)=[p]x+[|p|+|q|]z$.

令 $z'=z-[q]z$，故 $z'\in S(q)$，因 $|p|\wedge z=0$，$0\leqslant z'\leqslant z$，

故 $|p|\wedge z'=0$．但 $z'\wedge|q|=0$，故 $z'\wedge(|p|+|q|)=0$.

因 $z\leqslant x$，故 $[|p|+|q|]z=[|p|+|q|](z'+[q]z)=[|p|+$
$+|q|][q]z=[q]z\leqslant[q]x$。故 $[|p|+|q|]x\leqslant[p]x+[q]x$。綜上所述，得出 13°，因为 $[|p|+|q|]=[|p+q|]=[p+q]$，既然 $|p|\wedge|q|=0$。

14° 因 $|p|\vee|q|\geqslant|p|\geqslant|q|$，故 $|p|$，$|q|\in A(|p|\vee|q|)$，

故 $|p|+|q|\in A(|p|\vee|q|)$，故依 2°，

$$[|p|\vee|q|](|p|+|q|)=|p|+|q|.$$

故 依 12°

$[|p|+|q|]=[[|p|\vee|q|](|p|+|q|)]=[(|p|\vee|q|)\wedge$
$\wedge(|p|+|q|)]=[|p|\vee|q|]$.

15° 注意 $(|p|-[q]|p|)\wedge|[q]p|=0$，依 13°

$$[|p|-[q]|p|]+[[q]p]=[p].$$

依 14°，因 $(|p|-[q]|p|)\wedge|q|=0$，

$$[p]+[q]=[[q]p]+[|p|-[q]|p|+|q|]$$

因 $A(q)\subset A((|p|-[q]|p|)+|q|)$(11°)，而 $[q]|p|\in A(q)$，

$\therefore$ $|p|+|q|=\{(|p|-[q]|p|)+|q|\}+[q]|p|\in A(|p|-$
$-[q]|p|+|q|)$.

另一方面，

$$(|p|-[q]|p|)+|q|\leqslant|p|+|q|.$$

$\therefore$ 依 11°，得 $[|p|+|q|]=[(|p|-[q]|p|)+|q|]$。依 14° 与 12°，

$$[|p|\vee|q|]=[|p|+|q|]=[p]+[q]-[[q]p]=$$
$$=[p]+[q]-[|p|\wedge|q|].$$

16° 設$[p]\geqslant[q]$，因$|p-[q]p|\wedge|[q]p|=0$，依 13°

$$[p-[q]p]+[[q]p]=[p].$$

但依 12° 与 11°，

$$[[q]p]=[p][q]=[q],$$

故 $[p-[q]p]=[p]-[q]$.

17° 設$|p_n|\uparrow|p_0|$．只須对$x\geqslant0$ 証明命題。这时按 8°，

$$[p_1]x\leqslant[p_2]x\leqslant\cdots\leqslant[p_0]x.$$

所以在 σ-备 Riesz 空間E 中，$(o)\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}[p_n]x=x_0$ 存在，且 $x_0\leqslant$ $\leqslant[p_0]x$。另一方面，依

$$[p_n][p_0]x=[p_n][p_0][p_n]x\leqslant[p_n][p_0]x_0=[p_n]x.$$

因此，$$[p_n]([p_0]x-x_0)=0,$$

从而依 3° $|p_n|\wedge([p_0]x-x_0)=0$。令 $n\to\infty$ 得

$$|p_0|\wedge([p_0]x-x_0)=0,$$

而依 3°，$[p_0]([p_0]x-x_0)=0$，$[p_0]x=[p_0]x_0=x_0$，

因为 $[p_0]\ (o)\text{-}\lim\limits_{n}[p_n]x=(o)\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}[p_0][p_n]x=$

$$=(o)\text{-}\lim_{n\to\infty}[p_n]x=x_0.$$

18° 設 $[p_n]\uparrow$。依 11°，$\sum\limits_{\nu=1}^{n}|p_\nu|\in A(p_n)$。因

$$|p_n|\leqslant\bigvee_{k=1}^{n}|p_k|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|p_k|,$$

所以 $$[p_n]=\left[\bigvee_{k=1}^{n}|p_k|\right].$$

由$[p_n]\leqslant[a]$；依 12°，

$$[p_n]=[|a|\wedge(|p_1|\vee\cdots\vee|p_n|)].$$

令 $p'_n=|a|\wedge\bigvee_{k=1}^{n}|p_k|$，那末 $p'_1\leqslant p'_2\leqslant\cdots\leqslant p'_n\leqslant|a|$，

从而，(0)-$\lim\limits_{n\to\infty}p'_n$ 存在。由此，及 17°

$$\lim_{n\to\infty}[p_n]=[\lim_{n\to\infty}p'_n].$$

19° 設$[p_n]\downarrow$。令$[p'_n]=[p_1]-[p_n]$，那末，依 16°，元 p'_n 确存在，并且$[p'_n]\uparrow$，$\leqslant[p_1]$。依 18°，对每个 x，(0)-$\lim\limits_{n\to\infty}[p'_n]x=[p_0]x$，所以(0)-$\lim\limits_{n\to\infty}[p_n]x=([p_1]-[p_0])x$。因$[p_0]\leqslant[p_1]$，故$[p_1]-[p_0]$确是一个投影$[p'_0]$，証完。

定义 2. 由实数集 $R=]-\infty,\infty[$ 到 σ-备 Riesz 空間 E 中的映象 $\lambda\to a_\lambda$ 叫做增的譜族，是指

$$\lambda>\mu\Longrightarrow a_\lambda\geqslant a_\mu.$$

$\lambda\to a_\lambda$ 叫做在閉区間 $\alpha\leqslant\lambda\leqslant\beta$ 中囿变，是指对$[\alpha,\beta]$的每个分割$\mathscr{P}$：$\alpha=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_k=\beta$；和

$$S_{\mathscr{P}}=\sum_{\nu=1}^{k}|a_{\lambda_\nu}-a_{\lambda_{\nu-1}}|$$

所組成的集$\{S_{\mathscr{P}}/\mathscr{P}\}$是(0)囿的：卽存在 $a\in E$，使对于$[\alpha,\beta]$的每个分割 $\mathscr{P}$，

$$S_{\mathscr{P}}\leqslant l.$$

$\lambda\to a_\lambda$ 叫做囿变譜族，是指对于每个閉区間$[\alpha,\beta]$，a_λ 在其中是囿变的。

注　容易看出增譜族必定是囿变譜族。

定理 5. 如果 (a_λ)，(b_λ) 是两个囿变譜族，那末对于任意实数 α，β，$\alpha a_\lambda+\beta b_\lambda$ 也是囿变的。如果 (a_λ) 是囿变譜族，对于任意投影算子$[p]$，$([p]a_\lambda)$ 也是囿变譜族。設 P_λ 是一族算子 $(p_\lambda=[P_\lambda])$ $(-\infty<\lambda<\infty)$，使 $\lambda>\mu\Longrightarrow P_\lambda\geqslant P_\mu$。对于每个 $x\in E$，$(P_\lambda x)$ 是囿变譜族。

証 我們只証末一部分，其他都不难看出。事实上，

$$P_\lambda x = P_\lambda x_+ - P_\lambda x_-,$$

$(P_\lambda x_+)$, $(P_\lambda x_-)$都是增譜族。

定理 6 設(a_λ)是σ-备 Riesz 空間E中的囿变譜族，而$\varphi(\lambda)$是对于$-\infty<\lambda<\infty$定义的連續实值函数。那末当把$[\alpha, \beta]$的一切有穷分割按"細分"关系序次($\mathscr{P}_1 > \mathscr{P}_2$表示分割$\mathscr{P}_2$的分点也都是$\mathscr{P}_1$的分点)，而令

$$\sigma_{\mathscr{P}} = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi(\tau_\nu)(a_{\lambda_\nu} - a_{\lambda_{\nu-1}})(\lambda_{\nu-1} \leqslant \tau_\nu \leqslant \lambda_\nu),$$

那末E中的定向列$(\sigma_{\mathscr{P}})(0)$收斂，我們把它的極限表示成

$$\int_\alpha^\beta \varphi(\lambda) da_\lambda$$

叫做$\varphi(\lambda)$对譜族(a_λ)的 Stieltjes 积分。这个积分具有下列屬性：

1° $\displaystyle\int_\alpha^\beta \varphi(\lambda) da_\lambda = \int_\alpha^\gamma \varphi(\lambda) da_\lambda + \int_\gamma^\beta \varphi(\lambda) da_\lambda;$

2° $\displaystyle\int_\alpha^\beta [\varphi(\lambda) + \psi(\lambda)] da_\lambda = \int_\alpha^\beta \varphi(\lambda) da_\lambda + \int_\alpha^\beta \psi(\lambda) da_\lambda$

($\psi(\lambda)$也是連續的)；

3° $\displaystyle\int_\alpha^\beta \gamma\varphi(\lambda) da_\lambda = \gamma \int_\alpha^\beta \varphi(\lambda) da_\lambda;$

4° $\displaystyle\int_\alpha^\beta da_\lambda = a_\beta - a_\alpha.$

5° 如(a_λ), (b_λ)是兩个囿变譜族，那末

$$\int_\alpha^\beta \varphi(\lambda)da_\lambda+\int_\alpha^\beta \varphi(\lambda)db_\lambda=\int_\alpha^\beta \varphi(\lambda)d(a_\lambda+b_\lambda);$$

$$\int_\alpha^\beta \varphi(\lambda)d(\gamma a_\lambda)=\gamma\int_\alpha^\beta \varphi(\lambda)da_\lambda$$

6° 如果(a_λ)是增譜族，而 $\varphi(\lambda)\geqslant\psi(\lambda)$，那末

$$\int_\alpha^\beta \varphi(\lambda)da_\lambda\geqslant\int_\alpha^\beta \psi(\lambda)da_\lambda(\beta\geqslant\alpha);$$

7° 如果(a_λ)是增譜族，那末

$$\left|\int_\alpha^\beta \varphi(\lambda)da_\lambda\right|\leqslant\int_\alpha^\beta |\varphi(\lambda)|da_\lambda \quad (\beta\geqslant\alpha);$$

8° 令 $c_\mu=\int_\alpha^\mu \varphi(\lambda)da_\lambda$,

那末(c_μ)成为囿变譜族，并且

$$\int_\alpha^\beta \psi(\mu)dc_\mu=\int_\alpha^\beta \psi(\lambda)\varphi(\lambda)da_\lambda;$$

9° 对于任意投影算子 P。

$$P\int_\alpha^\beta \varphi(\lambda)da_\lambda=\int_\alpha^\beta \varphi(\lambda)dPa_\lambda.$$

証 仿平常实变数函数的 Stieltjes 积分情形的証，从略。

如果在E中，

$$(0)\text{-}\lim_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to+\infty}}\int_\alpha^\beta \varphi(\lambda)da_\lambda$$

存在，这極限表示成

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) da_\lambda$$

叫做 $\varphi(\lambda)$ 对譜族 (a_λ) 在 $(-\infty, \infty)$ 上的积分。注意定理6中的 $1°$—$9°$ 对于这个积分(如果它存在)也成立。

定义 3. 在 σ-备 Riesz 空間中，取定一元 p。元 e 叫做相对于 p 的單元，是指 $|e|\wedge|p-e|=0$。相对于 p 的單元全体表示成 $\mathfrak{E}(p)$。

定理 7. $e\in\mathfrak{E}(p)\Longrightarrow p-e\in\mathfrak{E}(p)$。为了 $e\in\mathfrak{E}(p)$，必須且只須 $[e]p=e$。对于任意 $a, p\in E$，$[a]p\in\mathfrak{E}(p)$。$p_+, -p_-\in\mathfrak{E}(p)$。又 $e\in\mathfrak{E}(p)\Longrightarrow pe\in\mathfrak{E}(Pp)$，$P$ 是任意投影算子。如果 $e\in\mathfrak{E}(p)$，那末

$$e_+=[P_+]e,\ e_-=-[p_-]e.$$

如 $e_1\in\mathfrak{E}(p)$，$e_2\in\mathfrak{E}(e_1)$，那末 $e_2\in\mathfrak{E}(p)$。如果 $e_1, e_2\in\mathfrak{E}(p)$，而 $|e_1|\geqslant|e_2|$，那末 $e_2\in\mathfrak{E}(e_1)$。如果 $e_1\in\mathfrak{E}(e_2)$，那末，

$$[e_2]x-[e_1]x=[e_2-e_1]x.$$

証 第一部分显然，今設 $e\in\mathfrak{E}(p)$，那末 $|e|\wedge|p-e|=0$，从而 $[e](p-e)=0$，故 $[e]p=e$。反之如 $[e]p=e$，那末

$$|e|\wedge|p-e|=|e|\wedge|p-[e]p|=0.$$

設 $a, p\in E$，那末

$$[[a]p]p=[a][p]p=[a]p.$$

因 $p_+-p_-=p$，且 $p_+\wedge|-p_-|=0$，故 $p_+, -p_-\in\mathfrak{E}(p)$。

設 $e\in\mathfrak{E}(p)$，那末 $|e|\wedge|p-e|=0$，从而

$$|Pe|\wedge|Pp-Pe|=(P|e|)\wedge(P|p-e|)=0,$$

$$\text{故}\quad Pe\in\mathfrak{E}(P_p).$$

設 $e\in\mathfrak{E}(p)$，那末 $[e]p=e$，从而

$$e_+=([e]p)_+=[e]p_+=[e][p_+]p=[p_+][e]p=[p_+]e,$$

同理，$e_-=-[p_-]e$。

設 $e_1 \in \mathfrak{E}(p)$, $e_2 \in \mathfrak{E}(e_1)$, 那末$[e_2]e_1 = e_2$, 故$[e_2] = [[e_2]e_1] =$

$$= [|e_2| \wedge |e_1|] \leqslant [e_1],$$

从而依定理 4,

$$[e_2]p = [e_2][e_1]p = [e_2]e_1 = e_2,$$

卽 $e_2 \in \mathfrak{E}(p)$。

設 $e_1, e_2 \in \mathfrak{E}(p)$, 而$|e_1| \geqslant |e_2|$, 那末$[e_2] \geqslant [e_1]$, 从而

$$[e_2]e_1 = [e_2][e_1]p = [e_2]p = e_2,$$

卽 $e_2 \in \mathfrak{E}(e_1)$。

設 $e_1 \in \mathfrak{E}(e_2)$, 則$|e_1| \wedge |e_2 - e_1| = 0$, 故 从定理 4,

$$[e_2] = [e_2 - e_1] + [e_1]$$

定义 4. $\mathfrak{E}(p)$中一个譜族(a_λ)(卽由实数λ到$\mathfrak{E}(p)$中的一个映象)叫做p的分解,是指

$$(0)\text{-}\lim_{\lambda \to \infty} a_\lambda = 0, \quad (0)\text{-}\lim_{\lambda \to \infty} a_\lambda = p,$$

$$\lim_{\lambda \to \mu - 0} a_\lambda = a_\mu,$$

并且
$$\lambda \geqslant \mu \Longrightarrow |a_\lambda| \geqslant |a_\mu|.$$

定理 8. 如果(e_λ)是p的分解,那末对于任意投影算子P, Pe_λ是Pp的分解.

証 由于P是(0)連續的(定理 4, 10°), 故

$$(0)\text{-}\lim_{\lambda \to \infty} Pe_\lambda = Pp, \quad (0)\text{-}\lim_{\lambda \to -\infty} Pe_\lambda = 0,$$

$$(0)\text{-}\lim_{\lambda \to \mu - 0} Pe_\lambda = Pe_\mu.$$

又依定理 4, 8°, P是保序的, 从而 $\lambda \geqslant \mu \Longrightarrow |Pe_\lambda| = P|e_\lambda| \geqslant P|e_\mu| =$
$= |Pe_\mu|$。

定理 9. 如果(e_λ)是p的分解,那末$((e_\lambda)_+)$与$((e_\lambda)_-)$各是P_+与P_-的分解。

証 依定理 7, $(e_\lambda)_+ = [p_+]e_\lambda$, 故 依定理 8, $((e_\lambda)_+)$ 是 $[p_+]p =$

$=p_+$ 的分解。同理$((e_\lambda)_-)$是 p_- 的分解。

定理 10. 設 (e_λ), (f_λ) 各是 p, q 的分解，而$|p|\wedge|q|=\Theta$, 那末 $\alpha e_\lambda+\beta f_\lambda$ 是 $\alpha p+\beta q$ 的分解。

証 只須証 $\lambda>\mu\Longrightarrow|\alpha e_\lambda+\beta f_\lambda|\geqslant|\alpha e_\mu+\beta f_\mu|$ 事实上，由于 $p\perp q$ 可知$|p+q|=|p|+|q|$, 这乃是

$$|\alpha||e_\lambda|+|\beta||f_\lambda|\geqslant|\alpha||e_\mu|+|\beta||f_\mu|(\lambda>\mu)$$

的直接后果。

定理 11. 任意元 p 的分解(e_λ)必是囿变的。

証 依定理 9, $((e_\lambda)_+)$, $((e_\lambda)_-)$各是 p_+, p_- 的分解，且由分解的定义不难看出它們都是增譜族。因此，$(e_\lambda)=((e_\lambda)_+-(e_\lambda)_-)$ 是囿变的。

定理 12. 对于 p 的每个分解

$$\lim_{\lambda\to\infty}[e_\lambda]=[p],\quad \lim_{\lambda\to-\infty}[e_\lambda]=\Theta.$$

証 前一式由定理 4 之 17° 直接得来。依同定理 $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}[e_\lambda]$存在。設 $P_0=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}[e_\lambda]$。因 $P_0\leqslant[e_\lambda]$, 可知 $P_0(p-e_\lambda)\leqslant\Theta$。对一切 λ 成立。令 $\lambda\to-\infty$, 得 $P_0p=\Theta$, 从而 $P_0=P_0[p]=[P_0p]=\Theta$, 因为 $P_0\leqslant[p]$。

定理 13. 在 σ-备 Riesz 空間中，对于每个固定的元 $p\in E$ 及每个元 $a\in E$, 存在一意的 p 的分解(e_λ), 使

$$[p]a=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda de_\lambda,$$

这里 $$e_\lambda=[(\lambda p_+-[p_+]a)_++(\lambda p_--[p_-]a)_+]p.$$

証 首先取 $a\in A(p)$, 并設 $p>\Theta$。令

$$e_\lambda=[(\lambda p-a)_+]p,$$

那末 $\lambda>\mu\Longrightarrow(\lambda p-a)_+\geqslant(\mu p-a)_+\Longrightarrow e_\lambda\geqslant e_\mu\geqslant\Theta$,

并且
$$(0)\text{-}\lim_{\lambda\to\mu-0} e_\lambda = e_\mu.$$
又因
$$(\lambda p - a)_+ \in A(p), \text{ 所以}$$
$$[e_\lambda] = [(\lambda p - a)_+][p] = [(\lambda p - a)_+].$$
但
$$(\lambda p - a)_+ \wedge (\lambda p - a)_- = \Theta, \text{ 所以}$$
$$[e_\lambda](\lambda p - a) = [(\lambda p - a)_+](\lambda p - a)_+ = (\lambda p - a)_+ \geqslant \Theta,$$
由此，因 $e_\lambda \in \mathfrak{E}(p)$，得知
$$[e_\lambda]a \leqslant \lambda [e_\lambda]p = \lambda e_\lambda. \tag{3}$$
因
$$[(\lambda p - a)_+](p - e_\lambda) = [e_\lambda](p - e_\lambda) = \Theta, \text{ 所以}$$
$$(p - e_\lambda) \wedge (\lambda p - a)_+ = \Theta,$$
所以
$$[p - e_\lambda](\lambda p - a) = -[p - e_\lambda](\lambda p - a)_- \leqslant \Theta.$$
于是
$$[p - e_\lambda]a \geqslant [p - e_\lambda]\lambda p,$$
即
$$[p - e_\lambda]a \geqslant \lambda(p - e_\lambda) \tag{4}$$

如果 $\lambda < 0$，由(3)得
$$(-\lambda)e_\lambda \leqslant [e_\lambda](-a) < |a|, \text{ 即 } e_\lambda \leqslant -\frac{1}{\lambda}|a|,$$
故 $(0)\text{-}\lim\limits_{\lambda\to\infty} e_\lambda = \Theta$.

如 $\lambda > 0$，由(4)得
$$\lambda(p - e_\lambda) \leqslant [p - e_\lambda]a \leqslant |a|, \text{ 即 } p - e_\lambda \leqslant \frac{|a|}{\lambda},$$
故 $(0)-\lim\limits_{\lambda\to\infty} e_\lambda = p$.

因此(e_λ)是 p 的分解。

如
$$\lambda > \mu, \; e_\lambda - e_\mu \in \mathfrak{E}(p), \text{ 所以由(3)}$$
$$[e_\lambda - e_\mu]a = [e_\lambda - e_\mu][e_\lambda]a \leqslant \lambda[e_\lambda - e_\mu]e_\lambda =$$
$$= \lambda(e_\lambda - e_\mu),$$
而由(4)，
$$[e_\lambda - e_\mu]a = [e_\lambda - e_\mu][p - e_\mu]a \geqslant \mu[e_\lambda - e_\mu](p - e_\mu) =$$
$$= \mu(e_\lambda - e_\mu).$$

所以对于 $\lambda>\mu$，有

$$\mu(e_\lambda-e_\mu)\leqslant([e_\lambda]-[e_\mu])a\leqslant\lambda(e_\lambda-e_\mu).$$

取区間$[\alpha,\beta]$的一个分解$\mathscr{P}$: $\alpha=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_k=\beta$，那末

$\sum_{n=1}^{k}\lambda_{n-1}(e_{\lambda_n}-e_{\lambda_{n-1}})\leqslant([e_\beta]-[e_\alpha])a\leqslant\sum_{n=1}^{k}\lambda_n(e_{\lambda_n}-e_{\lambda_{n-1}})$于是由 Stieltjes 积分的定义。

$$([e_\beta]-[e_\alpha])a=\int_\alpha^\beta\lambda de_\lambda,$$

$$a=(0)\text{-}\lim_{\substack{\beta\to+\infty\\ \alpha\to-\infty}}([e_\beta]-[e_\alpha])\,a=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda de_\lambda.$$

2）現在証明分解 e_λ 的一意性。設(f_λ)也是 p 的分解，

并且
$$a=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda df_\lambda,$$

那末

$$\mu p-a=\int_{-\infty}^{\infty}(\mu-\lambda)df_\lambda=\int_{-\infty}^{\mu}(\mu-\lambda)df_\lambda+\int_{\mu}^{\infty}(\mu-\lambda)df_\lambda=$$

$$=\int_{-\infty}^{\mu}(\mu-\lambda)df_\lambda-\int_{\mu}^{\infty}(\lambda-\mu)d(f_\lambda-f_\mu).$$

但
$$\int_{-\infty}^{\mu}(\mu-\lambda)df_\lambda\geqslant\Theta,$$

$$\int_{\mu}^{\infty}(\lambda-\mu)d(f_\lambda-f_\mu)\geqslant\Theta,$$

并且
$$\int_{-\infty}^{\mu}(\mu-\lambda)df_\lambda \wedge \int_{\mu}^{\infty}(\lambda-\mu)d(f_\lambda-f_\mu)=0.$$

所以
$$(\mu p-a)_+=\int_{-\infty}^{\mu}(\mu-\lambda)df_\lambda.$$

于是得

$$[f_\mu](\mu p-a)_+=\int_{-\infty}^{\mu}(\mu-\lambda)d[f_\mu]f_\lambda=(\mu p-a)_+,$$

所以
$$[e_\mu]=[(\mu p-a)_+]\leqslant[f_\mu]。对于 \varepsilon>0,$$

$$(\mu p-a)_+\geqslant\int_{-\infty}^{\mu-\varepsilon}(\mu-\lambda)df_\lambda\geqslant\int_{-\infty}^{\mu-\varepsilon}\varepsilon df_\lambda=\varepsilon f_{\mu-\varepsilon}$$

由此$[e_\mu]\geqslant[\varepsilon f_{\mu-\varepsilon}]=[f_{\mu-\varepsilon}]$，故令 $\varepsilon\to0$，得$[e_\mu]\geqslant[f_\mu]$。故对任意 μ，

$$[e_\mu]=[f_\mu],$$

故
$$e_\mu=[e_\mu]p=[f_\mu]p=f_\mu.$$

3) 以前曾設 $p>0, a\in A(p)$。現在考察一般情形，即設 p, a 是任意的，依上面已証的部分，存在 p_+ 与 p_- 的一意的分解(e_λ^+), (e_λ^-)，使

$$[p_+]a=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda de_\lambda^+,\quad -[p_-]a=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda de_\lambda^-.$$

令 $e_\lambda=e_\lambda^+-e_\lambda^-$，那末

$$[p]a=[p_+]a+[p_-]a.$$

因 $p_+\wedge p_-=0$，依定理 10，$e_\lambda=e_\lambda^+-e_\lambda^-$ 是 p 的分解。

現在証(e_λ)一意决定。事实上，設有 p 的另一分解 f_λ。使

$$[p]a=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda df_\lambda.$$

那末
$$[p_+]a=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d[p_+]f_\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(f_\lambda)_+,$$
但另一方面
$$[p_+]a=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d[p_+]e_\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(e_\lambda)_+.$$

依 $p\geqslant 0$ 的分解的一意性得 $(e_\lambda)_+=(f_\lambda)_+$。同理証 $(e_\lambda)_-=(f_\lambda)_-$，故 $e_\lambda=f_\lambda$。

系 特別如 σ-备 Riesz 空間有弱單位 1，即一元，滿足 $x>\Theta \Longrightarrow x\wedge 1>\Theta$。

那末 $[1]a=a$，从而对于每元 $a\in E$，存在一个一意决定的單位分解（即 1 的分解）(e_λ)，使

$$a=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda de_\lambda. \tag{3}$$

証 由于 $1\wedge|x|=0\Longrightarrow|x|=0\Longrightarrow x=0$，故 $(1)^\perp=\{0\}$，$\{1\}^{\perp\perp}=\{0\}^\perp=E$（整个空間）。因此 $[1]x=x$ 对任意 $x\in E$ 成立，因 $1>0$，由定理 13 的証得知 1 的分解是增譜族。

例 1. 在备 Riesz 空間 R_A 中不变算子 I 是弱單位元，实际上它滿足更强的条件（即它是"强單位"）：对于每个 $B\in R_A$，存在实数 μ，使 $|B|\leqslant\mu I$，因为这正是有界算子条件的另一种写法。不难証明，为了 $P\in\mathfrak{E}(I)(P\in R_A)$，必須且只須 P 是投影算子。从而上面的系 1 給出了有界自伴綫性算子的譜分解定理。

例 2. 在备 Riesz 空間 $S(\Omega,\mathfrak{B},\mu)$ 中，如 $1(t)\equiv 1\ (t\in\Omega)$，那末 1 是 S 中的弱單位。在 S 中，$x\perp y$ 表示
$$\{t|x(t)\neq 0\}\cap\{t|y(t)\neq 0\}$$
是 μ 測度 $=0$ 的集 $(\in\mathfrak{B})$。为了 $e\in f(1)$，且 $e\geqslant 0$，$1-e\geqslant 0$，必須且只須 $e\perp 1-e$，即

$$\max(e(t), 1-e(t))=1, \quad \min(e(t), \ 1-e(t))=0,$$

即 $e(t)=0$ 或 1，从而 e 是 $\mathfrak{B}$ 中一集的特征函数。如果 $x\in S$，

$$[x]1=(0)\text{-}\lim_{n\to\infty}(1\wedge n|x|),$$

且依前面結果 $[x]1\in f(1)$，即 $[x]1=t$ 恰是 $\{t \mid |x(t)|>0\}$ 的特征函数，特别

$$e_\lambda=[(\lambda 1-a)_+]1$$

乃是集 $\{t|a(t)<\lambda\}$ 的特征函数，于是譜分解(3)不过是下列事实的另一陈述，每个可测函数是一串簡單函数的殆遍收斂極限。

習 題 四

1. 求証在 B_A 中，为了 $T\wedge I-T=0\ (T\in B_A)$，必須且只須 T 是 B_A 中的投影算子。

2. 設 E 是具弱單位元 1 的 AL 空間(見習題二)。求証对于任意元 $x\geqslant 0$，必有 1 的分解(e_λ)，使 $\lambda<0\Longrightarrow e_\lambda=0$，并且使任意滿足 $e\wedge(1-e)=0$ 的元 $e\in E$，

$$\|[e]x\|=\int_0^\infty \lambda d\|e\wedge e_\lambda\|,$$

这里等式右边是平常 Stieltjes 积分，特别

$$\|x\|=\int_0^\infty \lambda d\|e_\lambda\|.$$

特别把这結果应用到空間 $V(\Omega, \mathfrak{B})$ 上去，令 $E=A(\mu)$，$\mu>0$，于是得知对于任意 $\varphi\in A(\mu)$：存在一族可測集 $E_\lambda\in\mathfrak{B}$，使

1° $\lambda>\mu\Longrightarrow E_\lambda\supset E_\mu$；

2° $\bigcap_n E_{\lambda_n}=E_\lambda\ (\lambda_n\downarrow\lambda)$，

3° $\lim_{\lambda_n\to\infty} E_{\lambda_n}=\bigcup E_{\lambda_n}=\Omega$，

而对于每个 $A\in\mathfrak{B}$，

$$\varphi(A)=\int_0^\infty \lambda d\mu(A\cap E_\lambda).$$

由此推出，存在 Ω 上可測函数 $f(t)$，使

$$\varphi(A)=\int_A f(t)dv(t),$$

从而导出了 Raodn-Nikodym 定理。

3. 在具强單位元 1 的备 Riesz 空間E中，如果令 $f=\{e\mid e\in E, e\wedge(1-e)=0\}$，那末对于 $x\geqslant 0$，令

$$S(x)=\Big\{\sum_{R=1}^{n}\alpha_R e_R \mid n \text{ 自然数}, e_R\in f, \alpha_n\geqslant 0,$$
$$\sum_{R=1}^{n}\alpha_n e_R\leqslant x\Big\}.$$

对于 $x, y\geqslant 0, x, y\in E$，定义

$$x\cdot y=\sup\Big\{\sum_{k,l}\alpha_k\beta_l(e_k\wedge e_l')\Big|\sum_{k=1}^{m}\alpha_k e_k\in S(x), \sum_{l=1}^{n}\beta_l e_l'\in S(y)\Big\}$$

而对于一般 $x, y\in E$，定义 $xy=x_+y_++x_-y_--x_-y_+-x_+y_-$，求証 $x, y\in E$，并且 $xy=yx$，$x\geqslant 0$ 且 $y\geqslant 0\Longrightarrow xy\geqslant 0$，$x(\alpha y)=-(\alpha x)\cdot y=\alpha(x\cdot y)$ $(\alpha\in R)$，$x(y+z)=xy+xz$，$x\cdot 1==x$，$x\cdot 0=0$，$e\in f\Longrightarrow ex=[e]x$，$(xy)z=x(yz)$，$xy=0\Longleftrightarrow$ $x\perp y$，对于具体空間 R_A，解釋以上命題的意义。

半序綫性空間習題(續)

1. 由 Hilbert 空間中有界自伴算子所組成的任意強閉环(卽按算子的加法与乘法組成环，且按算子的强斂 $\|A_n x-A_x\|\to 0(n\to\infty$，每个 $x)$为閉)必是具强單位元 1 的备 Riesz 空間，并且为了该空間中的元 $e\in f(1)$ [卽 $e\wedge 1-e=0$]，必須且只須 e 是投影算子(Вулих)。

2. 設E是 Riesz 空間，其上定义有范数，使

$$|x|\leqslant|y|\Longrightarrow\|x\|\leqslant\|y\|,$$

那末E可以扩張成(B)型 Riesz 空間 E_0：更精确地說，用E中按范数的基本列$\{x_n\}$作綫性空間，并把滿足 $\|x_n-y_n\|\to 0$ $(n\to\infty)$的列(x_n)，(y_n)等同起来，求証所得是(B)型Riesz空間。特別如E还滿足条件

$$x, y\geqslant 0\Longrightarrow\|x+y\|=\|x\|+\|y\|,$$

那末所得的E是(AL)空間[河田敬义]。

3. 設E是σ备 Riesz 空間，且具有强單位 1：卽对任意 $x\in E$，存在数 λ，使 $|x|\leqslant\lambda 1$。求証在E中可以定义兩元的乘积 x, y，使E成为交换环，并且滿足下列条件：

1° $1x=x$;

2° $x\geqslant 0, y\geqslant 0\Longrightarrow xy\geqslant 0$;

3° $x\wedge y=0\Longrightarrow x\cdot y=0$,

4° $|xy|=|x|\cdot|y|$, $x^2=|x|^2$.

提示：对于 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$，取 x 与 y 的譜分解

$$x = \int_0^{\lambda_x} \lambda de(x, \lambda), \quad y = \int_0^{\lambda_y} \lambda de(y, \lambda),$$

并作

$$e_\lambda = \bigvee_{\mu+v \leq \lambda} [e(x, \mu^\circ) \wedge e(y, v)],$$

求証 (e_λ) 是 1 的分解，且

$$z = \int_0^{\lambda_x + \lambda_y} \lambda de_\lambda$$

可以定义作 x, y。对于一切 x, y，令 $x \cdot y = x_+ y_+ + x_- y_- - x_+ y_- - x_- y_+$［河田敬义］。

4. 备 Riesz 空間 E 叫做备半序环，是指它是具主單位元 e 的交換环，e 同时又是 Riesz 空間的弱單位（那 $x > 0 \Longrightarrow x \wedge e > 0$），并滿足下列条件：

1) $x > 0,\ y > 0 \Longrightarrow xy \geqslant 0$;

2) $x \neq 0 \Longrightarrow x^2 > 0$;

3) $x_n \uparrow$ 且有上界 $\Longrightarrow$ 对于每个 y，$\sup\limits_n (x_n y) = (\sup\limits_n x_n) \cdot y$。求証，为了元 $x - \alpha e \in E$ 具有有界逆 y（即 $(x - \alpha e) \cdot y = e$ 并且存在 $\mu > 0$，使 $|y| \leqslant \mu e$），必須存在含 α 的开区間 (λ_0, μ_0)，使由 x 的譜分解

$$x = \int_{-\infty}^{\alpha} \lambda de_\lambda$$

定义出来的譜族 (e_λ) 在 (λ_0, μ_0) 中是取定值的。为了 x 具有界逆，必須且只須存在 $\mu > 0$，使 $|x| > \alpha e$，

［В. И. Соболев 1947］

5. 設 E 是备半序环［見習題 4］。設 (e_λ) 是單位元 e 的分解，滿足

$$\lambda \leqslant \mu \Longrightarrow e_\lambda e_\mu = e_\lambda, \quad \lim_{\substack{\lambda \to \lambda_0 \\ \lambda < \lambda_0}} e_\lambda = e_{\lambda_0 - 0} = e_\lambda$$

对于实数直線 R 上的区間 Δ，定义

1) $e(\Delta) = e(\alpha) = e_{\alpha+0} - e_\alpha$ 如 $\Delta = [\alpha, \alpha]$,

2) $e(\Delta) = e_\mu - e_{\lambda+0}$　　如 $\Delta = (\lambda, \mu)$

3) $e(\Delta) = e(\Delta_1) + e(\Delta_2)$　如 $\Delta = \Delta_1 \bigcup \Delta_2, \Delta_1 \bigcap \Delta_2 = \phi$.

那末，$e([\lambda, \mu)) = e_\mu - e_\lambda$，等等，并且

$$e(\Delta_1 \bigcap \Delta_2) = e(\Delta_1) e(\Delta_2)$$

如 Δ 是一串遞增的区間（或遞減）的極限：$\Delta = \lim\limits_{n \to \infty} \Delta_n$，那么 $e(\Delta) = (0)\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} e(\Delta_n)$。对于 R 上开集 $G = \bigcup\limits_n \Delta_n$（$\Delta_n$ 是互不相交的开区間），定义 $e(G) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e$（$\Delta_n$ 是互不相交的

开区間),定义 $e(G)=\sum_{n=1}^{\infty}e(\Delta_n)$,而对于閉集 F,定义 $e(F)=e-e(CF)$。对于 R 中任意集 M,令

$$e^*(M)=\inf_{G\supset M}e(G)\equiv\bigwedge_{G\supset M}e(G),$$

$$e_*(M)=\sup_{F\subset M}e(F)\equiv\bigvee_{F\subset M}e(F).$$

而如 $e_*(M)=e^*(M)$,M 叫做可测的,而这公共值叫做 M 的半序测度,表示成 $e(M)$。求証,R 中开(閉)集必可测,且其测度与按前面由区間定义者相符。如果 M 可测,CM 亦可测,且 $e(M)=e-e(CM)$。有穷或可数多个可测集的交与并仍可测,并且

$$e\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}e(M_n),$$

而如果 $M_i\cap M_j=\phi(i\neq j)$,那末上不等式变成等式。

又
$$e(M_1\cap M_2)=e(M_1)e(M_2).$$

R 上实值函数 $f(\lambda)$ 叫做可测,是指对于任意实数 α,

$$\{\lambda\mid f(\lambda)<\alpha,\lambda\in R\}$$

可测。一切連續函数必可测并且在可测函数集中作任意代数运算或取函数列的平常(点算收斂)的極限,仍不越出这集。对于有界可测函数 $f(\lambda)$;$\alpha\leqslant f(\lambda)<\beta$,取 $[\alpha,\beta]$ 的分割 $P:\alpha==\tau_0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_n=\beta$,令

$$M_i=\{\lambda\mid\tau_{i-1}\leqslant f(\lambda)<\tau_i\},1\leqslant i\leqslant n,$$

作和
$$\underline{S}_{\mathscr{P}}=\sum_{i=1}^{n}\tau_{i-1}e(M_i),\quad\overline{S}_{\mathscr{P}}=\sum_{i=1}^{n}\tau_i e(M_i)$$

求証
$$S=\bigvee_{\mathscr{P}}\underline{S}_{\mathscr{P}}=\bigwedge_{\mathscr{P}}\overline{S}_{\mathscr{P}}$$

存在并与 α,β 的选擇無关,叫做 f 的 Lebesgue-Stieltjes 积分,表示成

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)de_\lambda.$$

对于無界非負可测函数,令

$$f_N(\lambda)=\begin{cases}f(\lambda) & \text{如}\ |f(\lambda)|\leqslant N,\\ N & \text{如}\ |f(\lambda)|>N,\end{cases}$$

并規定
$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)de_\lambda=(0)\text{-}\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_N(\lambda)de_\lambda,$$

如果右边(0)-極限存在。对于任意符号的可测函数 $f(\lambda)$,令

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)de_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f_+(\lambda)de_\lambda - \int_{-\infty}^{\infty} f_-(\lambda)de_\lambda,$$

如果右边兩項都存在，$f_+(\lambda)=\max(f(\lambda),0), f_-(\lambda)=\max(f(\lambda),0)$。

求証上述积分具有平常 Lebesgue 积分的性質：加法性，$\int_E f(\lambda)de_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)x_E(\lambda) de_\lambda$（$x_E(\lambda)$ 表E的特征函数）的对E的全加法性、絕对連續性及在积分号下取極限的定理。又

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda)de_\lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\lambda)de_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda)f_2(\lambda)de_\lambda,$$

如果式中各积分都存在。如E是可測集，則

$$e(E)\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)de_\lambda = \int_E f(\lambda)de_\lambda.$$

[В. И. Соболев. 1953]

参 考 文 献

[1] 楊宗磐：半序空間引論（即將由科学出版社出版）。

[2] 角谷靜夫：Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem, Ann. math. 42 (1941) 523—537。

[3] ——, Concrete representation of (M)—spaces, 同上 984—1024.

[4] 小笠原籐次郎：束論 II. 岩波。

[5] ——：ベクトル束論，日本数学物理学会志 16 (1942) 391—425。

[6] 吉田耕作：位相解析，I. 第13章。

[7] 中野秀五郎：Semi-ordered linear spaces 1955.

[8] Freadenthal, H.: Teilweise geordnete Moduln, Proc. Akad. Amsterdam 39 (1936), 641—651.

[9] Hildebrandt, T. H. Integration in abstract spaces, Bull Amer. math. Soc. 59 (1953), 111—139.

[10] Канторович Л. В., Вулих, Б., З. и Пинскер, А. Г. Функционаланый анализ в полуупорядоченных пространствах, 1950.

[11] Канторович, Л. В., Вулих, В. З. и Пинскер, А. Г. Полуупорядоченные гуупп и линейные полуупорядоченные пространства, успехи Матем. Наук, 6:3 (1951) 31—98.

[12] Красносельский М, А.: Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений 1956.

[13] Крейн М. Г. и Крейн, С. Г.: О пространстве непрерывных функций, определённых на бикомпакте, и его полуупорядоченных подпространствах. Матем сб 13 (1943) 3—38.

[14] Крейн, М. Г. и Рутман, М. А.: Линейные операторов, оставляющие инвариантным конус в пространстве банаха, Успехи Матем Наук, 3:1 (1948) 3—95.

[15] Любовин, В. Д. Успехи Матем наук 11:4 (1956) 138—142.

[16] McShane, E. J. Order-preserving maps and integration processes 1953.

[17] Пинскер, А. Г. ДАН 55 (1947), 303—6.

[18] —— ДАН 106:2 (1956), 195—198.

[19] Соболев, В. И.: Успехи Матем Наук: 7:4 (1952) 169—172.

[20] Соболев, В. И. ДАН 56 (1947), 237—239).

[21] Вулих, Б. З.: Произведение в линеймых полуупорядоченых пространствах и его примемение к теории операций, Матем сб. 22 (1948), 27—78, 267—317.

[22] Вулих, Б. З. Частичное упорядочение колеу ограниченных самесопряженных операторов, вестник Л. Г. У. 1957 по 13. 13—21.

[23] Riesz, F. Sur la décomposition des opérations fonctionnelles léneaires, Atti del Congresso Internazionale dei matemateci 1928, III. 143—148.

[24] Riesz F.: Sur quelques notions fondamentales dans la theorie générale des operations lineaires, Ann matk 41 (1940) 174—206.

[25] Hadwiger, H. и A. Kirsch: Zerlegungs invarianz des Integrals pnd absolute Integrierbarkeit. Port. Math. 11 (1952) 57—67.

[26] Kirsch, A. Über Zerlegungsgleichheit von Funktionen und Integration in abstrakten Raümen, math Ann. 124 (1952); 343—363.

[27] Hadwiger, H.: Drehungsäquivalenz und zerlegungsäquivalenz bei Funktionen in abstrakten Raumen und invariante Integration, Archiv d. math. 5 (1954) 115—122.

[28] Hadwiger H. und W. Nef: Zur axiomatischen Theoris der invarianten Integration in abstrakten Raumen, Math Zeitschr 60 (1954) 305—319.

[29] Nef W. Zerlegungsäquivalenz von Funktionen und invariante Integrateion Comm. math. Helv 28 (1954), 162—172.

[30] Nef W.: Zerlegungsäquivalenz von Mengen und invarianter Inhalt Math. Ann. 128 (1954) 204—227.

[31] Nef W.: Invariante Linearformen, math. Nachr.

[32] Mazur-Orlicz: Studia Math. 1934.

§5. 凸錐理論

設綫性空間E中有一序結構$\geqslant$，使

1) $x\geqslant y\Longrightarrow x+z\geqslant y+z \quad (x, y, z\in E)$;

2) $x\geqslant y, \lambda\geqslant 0\Longrightarrow \lambda x\geqslant \lambda y \quad (x, y\in E)$,

那末我們說序結構与E中的綫性結構相符，而这时E叫做半序綫性空間。設$P=\{x \ x\in E, x\geqslant\Theta\}$，那末，在有穷維空間$E$的情形，$P$構成一个錐形体。在一般情形，即無穷維綫性空間的情形，这样一个錐体的研究也是很有价値的。下面只介紹 М. Г. Крейн 与 М. А. Рутман 的这种凸錐理論的基础知識，并簡單提一下这理論对于积分方程理論的应用。更詳細的理論与应用請参看有关文献：Крейн и Рутман [4]，Красносельский [1]，等等。

定义 1. 賦准范綫性空間E中子集P叫做綫性半群，是指

1) $x\in P, \lambda\geqslant 0(\lambda\in R)\Longrightarrow \lambda x\in P$;

2) $x\in P, y\in P\Longrightarrow x+y\in P$。

例：1) 在任意賦准范綫性空間中，任意綫性子空間就是一个綫性半群。

2) 在任意賦准范 Riesz 空間E中，非負元全体$P=\{x|x\in E, x\geqslant\Theta\}$構成一个綫性半群。

定义 2. 賦准范綫性空間中綫性半群 P 叫做非不足道的，是指存在一元 $x\in P$, 使 $-x\notin P$。如果

$$x\in P,\ x\neq\Theta\Longrightarrow -x\notin P,$$

P 叫做錐性集 (ensemble conique)。P 叫做实心的，是指 $\mathring{P}\neq\phi$ (即 P 有內点)。

注: 1) 为了綫性半群 P 是非不足道的，必須且只須 P 不是綫性子空間。事实上，必要性是显然的，但如果 P 不是綫性子空間，而又有 $x\in R\Longrightarrow -x\in P$, 依定义 1 的 1)可知 $x\in P\Longrightarrow\lambda x\in P$ 对于每个 $\lambda\in R$ 成立，从而結合定义 1 的 2)可知 P 是綫性子空間，得出矛盾。

2) 設 P 是綫性半群，令 $x\geqslant y$ 表示 $x-y\in P$，$\geqslant$ 便是 E 上一个拟序，即 $x\geqslant\Theta\Longrightarrow\lambda x\geqslant\Theta(\lambda>0)$, $x\geqslant\Theta$, $y\geqslant\Theta\Longrightarrow x+y\geqslant\Theta$, $x\geqslant y$, $y\geqslant z\Longrightarrow x\geqslant z$。为了这个拟序是序，即为了 $x\geqslant y$, $y\geqslant x\Longrightarrow x=y$, 必須且只須 P 是錐性集。我們常用 $x\gg\Theta$ 表示 $x\in\mathring{P}$, $x\gg y$ 表示 $x-y\gg\Theta$。显然 $x\gg y\Longrightarrow x\geqslant y$。

例 1. 在 $C(\Omega)$ 中，令 P 表示 $C(\Omega)$ 中非負値函数的全体構成的一个錐性集，其中逼处等于 1 的函数是 P 中內点。

例 2. 可以証明 $L^1[0,1]$ 中由殆遍取非負値的函数全体構成一个綫性半群，但其中沒有內点。

定理 1. 設 P 是实心綫性半群，那末

$$u\gg\Theta,\ \lambda>0\Longrightarrow\lambda u\gg\Theta.$$

証: 既然 u 是 P 的內点，故存在 $\rho>0$, 使

$$\|x-u\|\leqslant\rho\Longrightarrow x\in P.$$

由于 $\lambda>0$, 可知

$$\|\lambda x-\lambda u\|\leqslant\lambda\rho\Longrightarrow\lambda x\in P,$$

即 $\bar{S}(\lambda u;\lambda\rho)\subset P$, 从而 $\lambda u\in\mathring{P}$。

定理 2. 如果 P 是实心綫性半群，而 $P\neq E$, 那末 P 是非不足道半群，并且 $u\gg\Theta\Longrightarrow -u\notin P$。

証: 設 $u\in\mathring{P}$, 卽存在 $\rho>0$, 使 $\bar{S}(u,\rho)\subset P$, 从而对于每个 $a\in P$, $\|x-u-a\|\leqslant\rho\Longrightarrow x-a\in P$, 于是 $x\in P$。因此, $S(u+a,\rho)\subset P$。設 $-u\in P$, 那末由上述知 $S(\Theta,\rho)\subset P$, 从而依定义 1 的条件 1) $E=P$, 与假定矛盾。

定理 3. 設在两关系 $x\geqslant z$, $y\geqslant z$ 中, 有一个$\geqslant$換成$\gg$, 那末 $x\gg z$。

証 設 $x\gg y$, $y\geqslant z$, 那末 $x-y\gg\Theta$, $y-z\geqslant\Theta$。依定理 2 的証, 对于每个 $a\in P$, $x-y+a\gg\Theta$, 卽 $x-y+y-z\gg\Theta$, $x\gg z$。

系: $x_1\gg y_1$, $x_2\gg y_2\Longrightarrow x_1+x_2\gg y_1+y_2$。

証明請讀者自己补足。

定理 4. 設 P 是实心綫性半群, 那末每个元 $x\in E$ 可以表示成 $x==u-v$, 这里 $u\geqslant\Theta$, $v\geqslant\Theta$。

証: 取 $u_1\in\mathring{P}$, 那末存在 $\rho_1>0$, 使 $\bar{S}(u_1,\rho_1)\subset P$。取实数 ρ, 使 $0<\rho<\rho_1$, 那末

$$u_1\pm\frac{\rho}{\|x\|}x\gg\Theta.$$

依定理 1,

$$\frac{\|x\|}{\rho}u_1\pm x\gg\Theta.$$

令

$$u=\frac{1}{2}\left(\frac{\|x\|}{\rho}u_1+x\right),$$

$$v=\frac{1}{2}\left(\frac{\|x\|}{\rho}u_1-x\right),$$

那末 $u\gg\Theta$, $v\gg\Theta$, $x=u-v$。

应該注意, 在定理 4 中 P 是实心的假定是非常重要的, 因为若 P 是非实心的話, 定理的結果一般不成立。事实上, 設 E 是二維欧几里得空間, 那末正半横軸是一綫性半群, 而显然平面上矢量一般不能表示成这个半群中兩个矢量之差。

定义 3. 設 E^* 是賦范綫性空間 E 的共軛空間。設 P 是 E 中綫性半群, 而令

$$P^* = \{f \mid f \in E^*,\ x \in P \Longrightarrow f(x) \geqslant 0\},$$

那末 P^* 叫做 P 的共軛半群。

注: 1) P^* 确是綫性半群,即

$$f \in P^*, \lambda \geqslant 0 \Longrightarrow \lambda f \in P^*;\quad f, g \in P^* \Longrightarrow f+g \in P^*.$$

又如果存在 $x_0 \in P$, 使 $f(x_0) > 0$, 那末 $-f \notin P^*$, 而这时 P^* 是非不足道的。

2) 应当注意, $f \in P^*$, $-f \in P^*$ 并不蘊涵 $f = \Theta$。例如取定理 4 下說明中的 P(平面上的正半横軸), 那末定义 $f((\xi, \eta)) = \eta$ 时, f 是有界綫性泛函数, 并且 $x \in P \Longrightarrow f(x) = 0$, 从而 $f \in P^*$, $-f \in P^*$, 但 $f \neq \Theta$。但如果 P 是实心的,依定理 4, 不难看出 $f \in P^*, -f \in P^* \Longrightarrow f = \Theta$。

3) P^*是弱閉的。事实上,令 $f_0 \in \overline{P^*}$, 那末对于每个 $\varepsilon > 0$, 及 $x_0 \in \in P$, 存在 $f \in P^*$, 使

$$|f(x_0) - f_0(x_0)| < \varepsilon,\quad \text{即}\quad f_0(x_0) \geqslant f(x_0) - \varepsilon.$$

因为 $\varepsilon > 0$ 是任意的,所以 $f_0(x_0) \geqslant 0$。$x_0 \in P$是任意的,故 $f_0 \in P^*$。因为弱閉集也是强閉的,所以 P^* 是閉集。

4) 如果 $x \in P \Longrightarrow f(x) \geqslant g(x)$, 我們就写成 $f \geqslant g$ $(f, g \in E^*)$。这个序恰是由 E^* 中綫性半群 P^* 定义的序。显然

$$f \geqslant \Theta,\quad x \geqslant y (x, y \in E, f \in E^*) \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y).$$

定理 5. 設 P 是实心綫性半群, f 是定义在 E 上的一个加法泛函数,而且 $x \in P \Longrightarrow f(x) > 0$, 那末 $f \in E^*$, 从而 $f \in P^*$。

証: 由加法性不难看出对于任意有理数 λ, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$。取 $u \in \mathring{P}$, 那末存在有理数 $\rho > 0$, 使 $\bar{S}(u, \rho) \subset P$。于是

$$\|e\| \leqslant 1 \Longrightarrow u \pm \rho e \in P,$$

从而
$$f(u) \pm \rho f(e) \geqslant 0,\quad \text{即}\quad |f(e)| \leqslant \frac{1}{\rho} f(u).$$

因此, f 在 E 的單位球上有界,从而是有界綫性泛函数,証完。

系: 如果 P 是实心綫性半群, $u \in \mathring{P}$, $f \geqslant \Theta$, $f \in E^*$, $\bar{S}(u, \rho) \subset P$,

那末

$$f(u)\geqslant\rho\|f\|.$$

証：依定理 5 的証，

$$f(u)\geqslant\rho\sup_{\|e\|\leqslant 1}|f(e)|=\rho\|f\|.$$

若系中$f\geqslant\Theta$，而$f\neq\Theta$，則对于每个严格正元u(即$u\gg\Theta$)，$f(u)>0$。事实上，$f\neq\Theta\Longrightarrow\|f\|>0$，从而

$$f(u)\geqslant\rho\|f\|>0.$$

定理 6.(正泛函数的延拓)：設P是$\neq E$的实心綫性半群，$M\subset E$是綫性子空間，使M至少含一个严格正元$u_0\gg\Theta$，那末定义在M上的任意正綫性泛函数$f(x)$必可以延拓成定义在整个E上的正綫性泛函数。

証：依假定，存在正数$\rho>0$，使$\bar{S}(u_0,\rho)\subset P$。設$y_0\in E\setminus M$。今証必有元$x',x''\in M$，使$x'\leqslant y_0\leqslant x''$。事实上，

$$u_0+\rho\frac{y_0}{\|y_0\|}\in P,\text{ 所以 }\frac{\|y_0\|}{\rho}u_0\pm y_0\geqslant\Theta.$$

这就是說

$$-\frac{\|y_0\|}{\rho}u_0\leqslant y_0\leqslant\frac{\|y_0\|}{\rho}u_0.$$

因此，$f(x')\leqslant f(x'')$，从而对于任意满足$x'\leqslant y_0\leqslant x''$的元$x',x''$，

$$\sup f(x')\leqslant\inf f(x'').$$

取一实数ξ，使

$$\sup f(x')\leqslant\xi\leqslant\inf f(x'').$$

令

$$M_0=\{x+\lambda y_0\,|\,x\in M,\lambda\in R\},$$

那末M_0是包含M的綫性子空間。对于$y=x+\lambda y_0\in M_0$，定义

$$\varphi(y)=f(x)+\lambda\xi.$$

那末φ是M_0上的加法泛函数，并且$x\in M\Longrightarrow\varphi(x)=f(x)$。今証$\varphi$是正泛函数。事实上，如果$x+\lambda y_0\geqslant\Theta$，那末

$$\lambda>0\Longrightarrow y_0\geqslant-\frac{x}{\lambda},\quad\lambda<0\Longrightarrow y_0\leqslant-\frac{x}{\lambda},$$

而既然 $x\in M$,

$$\lambda>0\Longrightarrow -\frac{f(x)}{\lambda}\leqslant\xi,\quad \lambda<0\Longrightarrow -\frac{1}{\lambda}f(x)\geqslant\xi.$$

無論如何 $$f(x)+\lambda\xi\geqslant 0.$$

仿 Hahn-Banach 定理的証明，用 Zorn 补助定理，就可完成証明。f 的有界性由定理 5 得出。

系：对于每个实心綫性半群 $P\neq E$，必有一个按它为正的非零有界綫性泛函数存在。

証：取 $u\in\overset{\circ}{P}$，依定理 2，$-u\notin P$。令 $M=\{\lambda u\,|\,\lambda\in R\}$，那末 M 是綫性子空間。$f(\lambda u)\equiv\lambda$ 是 M 上正綫性泛函数，因为 $\lambda u\geqslant\Theta\Longrightarrow\lambda\geqslant 0$。引用定理 6，証完。

定理 7. 設 P_1 是賦范綫性空間 E 中的实心綫性半群，$P_2\subset E$ 是任意綫性半群，$P_2\cap\overset{\circ}{P}_1=\phi$。那末 E 上必存在一个綫性有界泛函数 $f\neq\Theta$，使

$$x\in P_1\Longrightarrow f(x)\geqslant 0,\quad x\in P_2\Longrightarrow f(x)\leqslant 0.$$

証：令 $$P=\{x-y\,|\,x\in P_1,\ y\in P_2\},$$

那末 P 是綫性半群，并且显然 $P\supset P_1$，从而 P 也是实心的。今証 $P\neq E$。取 $x_0\in P_1\subset P$，并設 $x_0\in\overset{\circ}{P}_1$。那末 $-x_0\notin P$，因为否則 $-x_0\in P$，于是存在 $x_1\in P_1$, $y\in P_2$，使 $-x_0=x_1-y$，即 $y=x_0+x_1$。依定理 3 的系，$y\in\overset{\circ}{P}_1$，与假定 $P_2\cap\overset{\circ}{P}_1=\phi$ 矛盾。因此 P 是不等于 E 的实心綫性半群。依定理 6 的系，在 E 上存在一个非零綫性有界泛函数 f，使 $z\in P\Longrightarrow f(z)\geqslant 0$。这个 f 显然滿足定理的要求。

系：設 P 是不等于 E 的实心綫性半群，M 是 E 中綫性子空間，而 $M\cap\overset{\circ}{P}=\phi$，那末 E 上必存在一个綫性正泛函数 $f\neq\Theta$，使 $x\in M\Longrightarrow f(x)=0$。

証：用 M 代替定理 7 中的 P_2，用 P 代替 P_1，那末 E 上存在一个綫性泛函数 f, $f\neq\Theta$，使 f 按 P 为正的，并且 $f(x)\leqslant 0$ 对于每个 $x\in M$ 成

立。但如果 $x\in M$, 那末 $-x\in M$, 从而 $x\in M\Longrightarrow f(x)=0$。

定理 8. 設 P 是綫性半群, $x_0\in E$, 并且

$$\inf_{z\in P}\|x_0-z\|=d>0.$$

于是必存在一个 $f\in P^*, f\neq\Theta$, 使 $f(x_0)\leqslant -d\|f\|$。此外, 如果 P 是实心綫性半群,而 y_0 是 P 的界元 ①, 那末必存在非零正綫性泛函数 f, 使 $f(y_0)=0$。

証: 令

$$P_1=\{\lambda(x_0+u)\mid\lambda>0,\ \|u\|<d\}.$$

于是 P_1 是实心半群,因为 $S(x_0,d)\subset P_1$,

$$\lambda(x_0+u)+\mu(x_0+v)=(\lambda+\mu)\left(x_0+\frac{\lambda u+\mu v}{\lambda+\mu}\right),$$

$$\|\lambda u+\mu v\|<(\lambda+\mu)d.$$

又 $P_1\cap P=\{\Theta\}$, 因为

$$\lambda(x_0+u)\in P\Longrightarrow x_0+u\in P,\quad 所以\ \exists x\in P, x_0-x=-u,$$

从而 $\|x_0-x\|<d$, 与 d 的意义矛盾。依定理 7, 存在一个按 P 为正的綫性泛函数 f, 使

$$f(\lambda(x_0+u))\leqslant 0,\quad 即\ f(x_0)\leqslant -f(u),$$

从而
$$f(x_0)\leqslant\inf[-f(u)]=-\sup_{\|u\|<d}f(u)=-d\|f\|.$$

設 P 是实心綫性半群,而 y_0 是 P 的界元,令

$$P_2=\{\lambda y_0\mid\lambda\geqslant 0\},$$

依定理 1, $P_2\cap\mathring{P}=\phi$, 因此依定理 7, 存在一个按 P 为正的綫性泛函数 f, 使 $f(y_0)\leqslant 0$。但 $y_0\in P$, 所以 $f(y_0)\geqslant 0$, 从而 $f(y_0)=0$。

系 1. 設 P 是綫性半群,为了元 $x\in\overline{P}$, 必須且只須

$$f\in P^*\Longrightarrow f(x)\geqslant 0.$$

因此,若特别設 E 是自反 Banach 空間,而 P 是 E 中閉綫性半群时,

---

① 所謂 y_0 是 P 的界元, 即是説 $y_0\in P$, 但 y_0 的任一个鄰域都包有不屬于 P 的点。

据系知为了 $x\in P$, 必須且只須 $f\in P^*\Longrightarrow f(x)\geqslant 0$。又如果 P 是实 Hilbert 空間 E 中的一个閉綫性半群,而令

$$Q=\{x|x\in E, z\in P\Longrightarrow(x, z)\geqslant 0\},$$

那末,如果 $z\in E$, 而 $x\in Q\Longrightarrow(x, z)\geqslant 0$, 必然 $z\in P$。这就是 Тагамлицкий 的結果([10])。

系 2. 設 P 是实心綫性半群。为了 x 是严格正元,必須且只須对于每个正綫性泛函数 f, 使 $f(x)>0$。

不难看出此二系是定理 5 及定理 8 的直接后果。由于任意綫性半群 P 的閉包仍是綫性半群,依系 1,

$$(\overline{P})^*=P^*.$$

定理 9. 設 $P\subset E$ 是非不足道的閉綫性半群,而 $x_0\in P$, $-x_0\notin P$, 那末必存在正綫性泛函数 $f\in P^*$, 使 $f(x_0)>0$。

証: 因为 P 是閉的,而 $-x_0\notin P$, 所以

$$\inf_{z\in P}\|-x_0-z\|>0,$$

因此,存在 $f\in P^*$, 使 $f(-x_0)<0$。

下面將考察凸集的承托閉超平面。設 H 是 E 中由有界綫性泛函数 f 決定的一个閉超平面 $\{x|f(x)=\gamma\}$, 并設 H 是綫性半群 P 的承托超平面,这里,凸集 A 的承托超平面 H, 是指一超平面,使 A 在它的一側(即 $x\in A\Longrightarrow f(x)\geqslant\gamma$ (或 $\leqslant\gamma$)), 而 A 与 H 有公共点。無妨設 $x\in P\Longrightarrow f(x)\geqslant\gamma$, 因为否則用 $-f$, $-\gamma$ 代替 f 与 γ 就可以了。因 $\Theta\in P$, 所以 $0\geqslant\gamma$。又可知 $x\in P\Longrightarrow f(x)\geqslant 0$, 因为否則如有 $x_0\in P$, 使 $f(x_0)<0$, 那末取 λ 足够大,可使 $\lambda x_0\in P$, $\lambda f(x_0)<\gamma$, 得出矛盾。

于是 $y\in H\Longrightarrow f(y)=\gamma$, $x\in P\Longrightarrow f(x)\geqslant 0$, 所以

$$f(x-y)\geqslant-\gamma=|\gamma|.$$

但依承托超平面的定义,存在元 $x_0\in P$, 使 $x_0\in H$. 从而上述的 x 与 y 可以任意接近。于是 $\gamma=0$。

总結以上所述,綫性半群的每个閉承托超平面 $f(x)=\gamma$ 必可以表

示成形狀 $f(x)=0, f\in P^*$。反之，这样形狀的閉超平面必是 P 的承托超平面。

于是定理 9 可以改述如下：

定理 9'. 在賦范綫性空間 E 中，对于每个非不足道的閉綫性半群 P，必有一不含它的閉承托超平面。

系： 設 P 是实心綫性半群，且 $P\neq E$，而綫性子空間 M 与 $\mathring{P}$ 不相交，那末过 M 必可作 P 的一个閉承托超平面。

証： 这只是定理 7 下系的改述。

定理 10. (Ascoli, Mazur)：設 G 是賦范綫性空間 E 中的一个綫性簇，即 $G=M+a, a\in E$，M 是 E 中綫性子空間。設 A 是一个有內点的凸集，并且 $G\cap\mathring{A}=\phi$。那末必存在一个包含 G 的閉超平面 H，使 A 在 H 的一側(即 $f(x)-\gamma$ 对于一切 $x\in A$ 是不变符号的，这里 $f(x)=\gamma$ 表示 H 的定义方程)。

証： 必要时使用一个平移 $x'=x-a$，可設 G 是綫性子空間。令 $P=\{\lambda z\,|\,\lambda\geqslant 0, z\in\mathring{A}\}$。注意經平移后凸集仍变成凸集。$P$ 是綫性半群，因为定义 1 中的性質 1)是显然的，而如果 $z_1, z_2\in\mathring{A}, \lambda_1\geqslant 0, \lambda_2\geqslant 0$，那末

$$\lambda_1z_1+\lambda_2z_2=(\lambda_1+\lambda_2)\frac{\lambda_1z_1+\lambda_2z_2}{\lambda_1+\lambda_2};\quad \frac{\lambda_1z_1+\lambda_2z_2}{\lambda_1+\lambda_2}\in\mathring{A},$$

后者是因为如設 $S(z_1,\rho_1)\subset A, S(z_2,\rho_2)\subset A, \rho_1,\rho_2>0$，那末，令

$$x_0=\frac{\lambda_1z_1+\lambda_2z_2}{\lambda_1+\lambda_2},\quad \rho_0=\frac{\lambda_1\rho_1+\lambda_2\rho_2}{\lambda_1+\lambda_2},$$

則 $S(x_0,\rho_0)\subset A$。事实上，如果 $y-x_0=u, \|u\|\leqslant\rho_0$，令

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}=\mu_1,\qquad \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}=\mu_2,$$

則 $\mu_1+\mu_2=1$，$\rho_0=\mu_1\rho_1+\mu_2\rho_2$，$y=x_0+u=\mu_1z_1+\mu_2z_2+u=\mu_1\left(z_1+\right.$ $\left.+\frac{\rho_1}{\rho_0}u\right)+\mu_2\left(z_2+\frac{\rho_2}{\rho_0}u\right)$，$z_1+\frac{\rho_1}{\rho_0}u\in A$，$z_2+\frac{\rho_2}{\rho_0}x\in A$，所以 $y\in A$。这正是

說 $S(\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2;\rho_0(\lambda_1+\lambda_2))\subset P$, $\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2\in \overset{\circ}{P}$。显然 $\overset{\circ}{A}\subset P$, 从而如果能証 $P\neq E$, P 必是一个非不足道实心綫性半群。事实上,如果 $z=\lambda_1 x_1\in P$ $(\lambda_1>0)$, 那末 $-z\notin P$, 因为否則 $-z=\lambda_2 x_2$, $\lambda_2>0$, $x_2\in \overset{\circ}{A}$, 依上面所証, $\Theta=z-z=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2\in \overset{\circ}{P}$, 即 Θ 是 P 的内点。但 $G\ni\Theta$, 与假定矛盾。故 P 是非不足道实心綫性半群。

設 $z=\lambda x\in P$, $x\in \overset{\circ}{A}$, 又設 $z\in G$, 那末 $\lambda=0$, 因为否則 $x=\frac{z}{\lambda}\in G$, 而 G 包含 A 之内点,与所設矛盾。故 $\overset{\circ}{P}\cap G=\phi$。依定理 7 的系, $\exists f\in E^*$, $f\neq\Theta$, $x\in P\Longrightarrow f(x)>0$, 特别 $x\in A\Longrightarrow f(x)\geqslant 0$, $f(G)=0$。于是 $\{x\mid f(x)=0\}$ 就是所求的超平面。

定理 11. (**Eidelheit**): 設 A_1 是賦范綫性空間 E 中的凸体, 即具有内点的凸集, 而 A_2 是 E 中凸集, $A_2\cap \overset{\circ}{A}_1=\phi$。那末必存在一个超平面 $\{x\mid f(x)=\gamma\}$, 分离 A_1, A_2; 換句話說, 使

$$x\in A_1\Longrightarrow f(x)\geqslant\gamma,\quad x\in A_2\Longrightarrow f(x)\leqslant\gamma.$$

証: 令
$$A=\{x-y\mid x\in \overset{\circ}{A}_1,\ y\in A_2\},$$
那末 A 是有内点的凸集。事实上,設

$$z_1=x_1-y_1\in A,\quad z_2=x_2-y_2\in A,\quad x_1,x_2\in \overset{\circ}{A}_1,\quad y_1,y_2\in A_2,$$

幷令 λ 是一个数,且 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, 那末

$$\lambda z_1+(1-\lambda)z_2=[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]-[\lambda y_1+(1-\lambda)y_2]\in A,$$

因为依定理 10 的証明, $\overset{\circ}{A}_1$ 也是不空凸集。于是 A 是凸集。A 是不空开集,因为

$$A=\bigcup_{-z\in A_2}(\overset{\circ}{A}_1+z)$$

是不空开集的幷。又 $\Theta\notin A$, 因为否則存在 $x_0\in \overset{\circ}{A}_1$, $y_0\in A_2$, 使 $x_0-y_0=\Theta$, 即 $x_0=y_0$, 与假設 $\overset{\circ}{A}\cap A_2=\phi$ 矛盾。用 $\{\Theta\}$ 代替定理 10 中的 G, 用 A 代替那里的 A, 可知存在一个过 Θ 点的閉超平面 $H=\{x\mid f(x)=0\}$ $(f\in E^*)$, 使 $x\in A\Longrightarrow f(x)\geqslant 0$, 即

$$x\in \overset{\circ}{A}_1,\quad y\in A_2\Longrightarrow f(x)\geqslant f(y),$$

从而
$$f(x)\geqslant\sup_{y\in A_2}f(y).$$
但 $A_1\subset\overline{A_1}$, 而如果能証明 $\overline{A_1}=\overline{\mathring{A}_1}$, 于是由 f 的連續性可知
$$f(x)\geqslant\sup_{y\in A_2}f(y)$$
对于每个 $x\in A_1$ 成立，即
$$\inf_{x\in A_1}f(x)\geqslant\sup_{y\in A_2}f(y).$$
取一数 γ 介于上列不等式两边的数之間，于是
$$x\in A_1\Longrightarrow f(x)\geqslant\gamma,\quad x\in A_2\Longrightarrow f(x)\leqslant\gamma,$$
証明就完結了。

现在証明对于含内点的凸集 A_1, $\overline{\mathring{A}_1}=\overline{A_1}$。設 $x_0\in\mathring{A}_1$, $x_1\in\overline{A_1}$, 今証 $y=\lambda x_0+(1-\lambda)x_1$ $(0<\lambda<1)\Longrightarrow y\in\mathring{A}_1$。我們要証当 $\|z-y\|$ 足够小时，$z\in A_1$。但 A_1 是凸集，只要能証明 $z=\lambda w+(1-\lambda)u$, 而 $w, u\in A_1$ 就够了。注意
$$\|w-x_0\|=\left\|\frac{z}{\lambda}-\frac{(1-\lambda)}{\lambda}u-\frac{y}{\lambda}+\frac{(1-\lambda)}{\lambda}x_1\right\|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\lambda}\|z-y\|+\frac{1-\lambda}{\lambda}\|x_1-u\|,$$
取 $\|z-y\|\leqslant\frac{\lambda}{2}\rho$, 再取 $u\in A_1$, 使 $\|x_1-u\|\leqslant\frac{\lambda}{1-\lambda}\frac{\rho}{2}$, 后者可能，因为 $x_1\in\overline{A_1}$, 于是 $\|w-x_0\|\leqslant\rho$, 所以 $w\in A_1$。从而証完了 $y\in\mathring{A}_1$。

今設 $y_1\in\overline{A_1}$, $y_0\in\mathring{A}_1$, 那末依上述，$y=\lambda y_0+(1-\lambda)y\in\mathring{A}_1$。但 $y_1=$ $=y+\lambda(y_1-y_0)$, 取 λ 足够小，使 $\|\lambda(y_1-y_0)\|\leqslant\varepsilon$, 于是 $y\in S(y_1,\varepsilon)\cap\mathring{A}$。$\varepsilon$ 既是任意的，所以 $y_1\in\overline{\mathring{A}_1}$。这正是説 $\overline{A_1}\subset\overline{\mathring{A}_1}$。而 $\overline{\mathring{A}_1}\subset\overline{A_1}$ 是显然的，証完。

注： 定理 10 与 11 是凸集論中比較古典的定理。首先，Minkowski, H. (1864—1909) 証明在 n 維空間中凡有界閉凸集在它的每个界点处至少有一个承托超平面 [見他所著的 Theorie derKonvexen Kör-

per, insbesonders Begründung ihres Oberflächen-begriffs, ges. Abh. 2(1911), 131—229]。其后 Ascoli, G. 推广这一結果到可分賦范綫性空間上去[11]。S. Mazur証明在賦范綫性空間中，如果一个綫性簇 V 不含具有內点的閉凸集 A 的內点，那末必存在包含 V 的超平面，使 A 在这个超平面的一側(見[12])。定理 11 首先由 M. Eidelheit 对賦范綫性空間中兩个無公共內点的有內点凸集証明(見[13])。Eidelheit 的証明較繁，其后很多数学家曾簡化过他的証明，例如角谷靜夫[14]。这里的証明是根据 Шмульян 的(見[4])①。

定义 4. 閉的錐性集叫做錐体。

在前面定义 2 下注 2)中，我們談到了由綫性半群 P 决定的拟序是序的必要充分条件是 P 为錐性集。現在，据定义 4 又可进一步地了解到，为了那个序結構与賦范綫性空間的拓扑結構是相容的(即 $x_n \geqslant y_n$, $x_n \to x$, $y_n \to y \Longrightarrow x \geqslant y$)，必須且只須 P 是錐体。

定理 12. 設 E 是可分賦范綫性空間，而 P 是其中錐体，那末必有一个定义在 E 上的有界綫性泛函数 f 存在，使对于每个 $x \in P$, $x \neq \Theta \Longrightarrow f(x) > 0$。

証: 設 $\{x_n\}$ 是 E 中單位球 $S = \{x \mid x \in E, \|x\| \leqslant 1\}$ 中稠可数集。令 Σ 表示 E^* 中的單位球。令 $A = \Sigma \cap P^*$。在 A 中定义距离

$$\delta(f_1, f_2) = \sup_{1 \leqslant n < \infty} \frac{|f_1(x_n) - f_2(x_n)|}{n} \quad (f_1, f_2 \in E^*).$$

按照这个距离的收斂与 E^* 中弱收斂等价。事实上，

$$\delta(f_k, f_0) \to 0 \Longleftrightarrow \frac{|f_k(x_n) - f_0(x_n)|}{n} \to 0 \ (\text{每个 } n) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f_k(x_n) \to f_0(x_n) \ (\text{每个 } n) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f_k \to f_0 \ (\text{弱}),$$

① Eidelheit 于 1943 年三月被德國法西斯侵略者杀害。Шмульян 在苏联偉大衛国战争时在前綫牺牲。

因为在A中，諸$\|f\|$有界(見第三章§5)。如果E是可分的，Σ是弱列紧的(第三章§5)。A在Σ中是弱閉的(定义3下注3))，从而也是弱列紧的。也就是說，A按距离δ是自列紧的，从而是全有界的，因此是可分的。于是存在$(f_n)(f_n\in E^*)$，在A中按δ稠。令

$$f_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{2^n},$$

由于$\|f_n\|\leqslant 1$，可知$f_0\in E^*$。又因$f_n\in P^*$，所以$f_0\in P^*$，因为P^*是閉集(見定义3下注3))。今証f_0就是定理中所求的綫性泛函数。事实上，設存在$x_0\in P$，$f_0(x_0)=0$，那末$f_n(x_0)=0$对每个n成立，而因f_n在A中稠，必然

$$f\in A=\Sigma\cap P^*\Longrightarrow f(x_0)=0.$$

但$f\in P^*\Longrightarrow\frac{f}{\|f\|}\in A$，从而$f\in P^*\Longrightarrow f(x_0)=0$。依定理9，$x_0=\Theta$。

注意，如果不假定空間E可分，定理12不必成立。

反例：設Q是一个不可分的距离空間，$C(Q)$表示Q上一切有界連續实值函数的全体，賦以范数

$$\|x\|=\sup_{q\in Q}|x(q)|,$$

其中加，乘法等运算乃是平常函数的运算。設P是$C(Q)$中一切非負值函数的全体。那末P是一个錐体。旣然$C(Q)$中的單位球S是不可分的(否則整个空間也成为可分的了)，那末有不可数多个不相交的球$S(q_\alpha,\rho_\alpha)$存在，因为否則必存在可数多个球$S(q_n,\alpha_n)$，使任意其他球N必与这些球任意一族不相交球是可数的，从而S就成为可分的了①。今定义函数x_α如下：

$$x_\alpha(q)=\begin{cases}0 & \text{如果 } q\notin S(q_\alpha,\rho_\alpha),\\ 1-d(q,q_\alpha)\dfrac{1}{\rho_\alpha}, & \text{如果 } q\in S(q_\alpha,\rho_\alpha),\end{cases}$$

① 証明从略，讀者可取做練習，或參看例如 W. Sierpinski, general topology, 1952, 117 頁。

这里 d 表示 Q 中的距离。这样，$x_\alpha \in C(Q)$，并且 $\in P$。令

$$x_0(q)=\sum_\alpha x_\alpha(q),$$

那末 $x_0 \in C(Q)$，$x_0(q) \geqslant 0$。設存在一个有界綫性泛函数 $f(x)$ 使 f 在整个 P 上为正的，那末特別 $f(x_\alpha)>0$，$f(x_0)>0$，因此正数集 $(f(x_\alpha))$ 具有如下性質：

$$f(x_{\alpha_1})+f(x_{\alpha_2})+\cdots+f(x_{\alpha_n}) \leqslant f(x_0),$$

因为 $x_0-\sum_{i=1}^n x_{\alpha_i} \in P$。于是标号族 (α) 只能是可数的，矛盾。

下面考慮由一錐性集引起的序結構使空間成为 Riesz 空間的条件。

定理 13. 設 P 是綫性空間 E 中的錐性集。为了 P 引起的序結構使 E 成为 Riesz 空間，必須且只須 P 滿足下列兩条件：

1）如果 $P_x=\{u+x \mid u \in P\}$，那末对于任意 $x, y \in P$，$\exists z \in P$，使 $P_x \cap P_y=P_z$（滿足这样性質的錐性集叫做極小边的）；

2）P 生出 E 来，卽任意 $x \in E$，可以表示成 P 中兩元之差：

$$x=u-v, \quad u, v \in P.$$

証 1）設 E 是 Riesz 空間，那末对于任意的 $x, y \in P$，$x \vee y=z \in P$，而 $P_x \cap P_y=P_z$，因为这一性質等价于 $x \vee y=z$。由于 Riesz 空間中的 Jordan 分解，可知 $x=x_+-x_-$，$x_+, x_- \in P$，从而 1), 2) 都得証。

2）設 P 是極小边的，且 P 生出 E 来。設 $x, y \in E$ 是任意兩元。令 $x=u_1-v_1$，$y=u_2-v_2$，$u_1, u_2, v_1, v_2 \in P$。于是

$$x+v_1+v_2=u_1+v_2 \in P,$$

$$y+v_1+v_2=u_2+v_1 \in P,$$

从而由 P 的極小边性及 1）中所述，

$$(x+v_1+v_2) \vee (y+v_1+v_2)$$

存在。从这元減去 v_1+v_2，不难看出 $x \vee y$ 存在。由此，E 是 Riesz 空

間。

注　由前几节我們已知在 Riesz 空間中的 Jordan 分解是極小边，即

$$x=u-v,\ u\geqslant\Theta,\ v\geqslant\Theta\Longrightarrow u\geqslant x_{+},\ v\geqslant x_{-}.$$

定理 14. 設 P 是賦范綫性空間 E 中的一个極小边实心錐体。那末 P^* 也是極小边錐体。

証　由定义 3 下的注 3) 已知 P^* 是閉綫性半群。設 $u\in\mathring{P}$。依定理 5 系下之說明，$f\neq\Theta,\ f\in P^*\Longrightarrow f(u)>0$；所以 $-f(u)<0$，即 $-f\notin P^*$。由此 P^* 是錐体。現在要証明 P^* 是極小边的。

設 $f_1, f_2\in P^*$，对于每个 $x\in P$，令

$$f(x)=\sup\{f_1(u)+f_2(v)\mid u+v=x,\ u,\ v\in P\},$$

从而 $x\in P\Longrightarrow f(x)\geqslant 0$。因 $x=x+\Theta=\Theta+x$，可知

$$f(x)\geqslant f_1(x),\quad f(x)\geqslant f_2(x).$$

如果 $f_0\in E^*,\ f_0\geqslant f_1,\ f_0\geqslant f_2$，那末对于每个 $x\in P$，

$$f(x)\leqslant\sup(f_1(u)+f_2(v))\leqslant f_0(x).$$

我們証明 $f\in E^*$。事实上，如果 $x, y\in P$，那末

$$\begin{aligned}f(x)+f(y)=&\sup\{f_1(u_1)+f_2(v_1)\mid u_1+v_1=x,\ u_1,\ v_1\in P\}+\\&+\sup\{f_1(u_2)+f_2(v_2)\mid u_2+v_2=y,\ u_2,\ v_2\in P\}=\\&=\sup_{\substack{u_1+v_1=x\\u_1,v_1\in P}}\ \sup_{\substack{u_2+v_2=y\\u_2,v_2\in P}}\{f_1(u_1+u_2)+f_2(v_1+v_2)\}\leqslant\\&\leqslant\sup_{\substack{u+v=x+y,\\u,v\in P}}\{f_1(u)+f_2(v)\}=f(x+y).\end{aligned}$$

但对于任意 $u+v=x+y(u,\ v,x,\ y\in P)$，必存在 $u_1,\ u_2,\ v_1,\ v_2\in P$，使 $u_1+v_1=x,\ u_2+v_2=y,\ u_1+u_2=u,\ v_1+v_2=v$。事实上，只須令 $x\wedge u=u_1$，$x-u_1=v_1,\ u-u_1=u_2$，那末 $u_1,\ v_1,\ u_2\in P$。令 $v_2=y-u_2\equiv v-v_1$，于是

$$v_1\wedge u_2=(x-u_1)\wedge(u-u_1)=(x\wedge u)-u_1=\Theta,$$

$$v+u_2=x+y-u_1=v_1+y,$$

所以 $u_2\leqslant v_1+y$，即

$$u_2=u_2\wedge(v_1+y)\leqslant(u_2\wedge v_1)+(u_2\wedge y)=u_2\wedge y,$$

从而 $y\geqslant v_2$, 即 $v_2\geqslant\Theta$。在上面不等式 $f(x)+f(y)\leqslant f(x+y)$ 中，$\leqslant$ 实际上是 $=$。設 $x, y\in E$ 是任意的，依定理 13 与定理 4 可知 $x=x_+-x_-$, $y=y_+-y_-$。今定义 $f(x)=f(x_+)-f(x_-)$, 如果 $x=u-v$, $u, v\in P$, 那末 $u=x_++z$, $v=x_-+z$, $z\in P$, 从而

$$f(u)-f(v)=f(x_++z)-f(x_-+z)=$$
$$=f(x_+)+f(z)-f(x_-)-f(z)=f(x),$$

从而

$$f(x+y)=f(x_++y_+-x_--y_-)=f(x_++y_+)-f(x_-+y_-)=$$
$$=f(x_+)+f(y_+)-f(x_-)-f(y_-)=f(x)-f(y).$$

所以 f 是 E 上的非負加法泛函数。依定理 5, $f\in P^*$, 証完。

定理 14 自然地引导我們去思考一个有趣的問題：在定理 14 的条件下 P^* 是否生出 E^* 来？即 E^* 是否一定是 Riesz 空間？下面將証明一般情形幷非如此。为此，我們引入下列定义。

定义 5. 在賦范綫性空間 E 中，錐性集 P 叫做正規的，是指存在正数 $\delta>0$, 使

$$e_1\in P,\quad e_2\in P,\quad \|e_1\|=\|e_2\|=1\Longrightarrow\|e_1+e_2\|\geqslant\delta.$$

其实，定义的条件乃是說，P 中兩矢量之間的夾角不能任意地接近 π。

定理 15. 設 E 是賦范綫性空間。为了錐性集 P 是正規的，必須且只須下列的条件之一成立：

1) $x_n+y_n\to\Theta$, $x_n, y_n\in P\Longrightarrow x_n\to\Theta$;

2) 对于 P 中任意兩元 x_1, x_2,

$$\|x_1+x_2\|\geqslant\frac{\delta}{2}\max(\|x_1\|, \|x_2\|),\tag{1}$$

这里的 δ 即是定义 5 中的 δ。

証 1) 設 P 是正規的，我們来証明 2) 成立。在此，無妨設 $\|x_1\|=$ $=1$, $\|x_2\|\leqslant 1$, 因为 (1) 的齐性，可以用 $\frac{x_1}{\alpha}$, $\frac{x_2}{\alpha}$ 代替 x_1, x_2, 这里 $\alpha=$

$=\max(\|x_1\|,\|x_2\|)$。这时

$$\|x_1+x_2\|+\|x_2\|\geqslant\|x_1\|=1,$$

而

$$\|x_1+x_2\|=\left\|x_1+\frac{x_2}{\|x_2\|}-\frac{1-\|x_2\|}{\|x_2\|}x_2\right\|\geqslant$$

$$\geqslant\left\|x_1+\frac{x_2}{\|x_2\|}\right\|-(1-\|x_2\|)\geqslant\delta-1+\|x_2\|.$$

由此

$$2\|x_1+x_2\|=\|x_1+x_2\|+\|x_1+x_2\|\geqslant 1-\|x_2\|+(\delta-1+\|x_2\|)=\delta,$$

就是説

$$\|x_1+x_2\|\geqslant\frac{\delta}{2},$$

这正是 2)。

2) 今証 2)$\Longrightarrow$1)。事实上，如果 $x_n, y_n\in P$, $x_n+y_n\to\Theta$, 对于任意 $\varepsilon>0$, $\exists n=n(\varepsilon)$, 使

$$P\geqslant n\Longrightarrow\|x_p+y_p\|<\varepsilon\frac{\delta}{2},$$

从而依 2),

$$\|x_p\|\leqslant\max(\|x_p\|,\|y_p\|)\leqslant\frac{2}{\delta}\|x_p+y_p\|<\varepsilon,$$

即

$$x_p\to\Theta.$$

3) 最后証明由 1) 导出 P 的正規性。事实上，設 1) 成立而 P 不是正規的，依定义，对于每个自然数 n, 必有一对元 e_n, e_n', 使 $e_n, e_n'\in P$, $\|e_n\|=\|e_n'\|=1$, 但 $\|e_n+e_n'\|<\frac{1}{n}$。于是 $e_n+e_n'\to\Theta$, 但 $e_n\not\to\Theta$。矛盾。

定理 16 (Д. Мильман). 設 P 是賦范綫性空間 E 中一个包含内点 u 的錐性集。为了 P 是正規的，必須且只須集

$$I_u\equiv\{x\mid x\in E,\ -u\leqslant x\leqslant u\}$$

是按范数有界的。

証　1) 必要性：設 P 是正規的。如果 $-u\leqslant x\leqslant u$, 那末 $\pm x+u\in P$。令

$$y_1=\frac{u+x}{2},\quad y_2=\frac{u-x}{2},$$

那末 $y_1, y_2 \in P$。依定理 15

$$\|u\| = \|y_1 + y_2\| \geqslant \frac{\delta}{2} \max(\|y_1\|, \|y_2\|).$$

但 $x = y_1 - y_2$, 所以

$$\|x\| \leqslant \|y_1\| + \|y_2\| \leqslant 2\max(\|y_1\|, \|y_2\|) \leqslant \frac{4}{\delta}\|u\|,$$

而这式对任意 $x \in I_u$ 成立。所以 I_u 按范数有界。

2) 充分性：設取正数 ρ, 使 $\bar{S}(u, \rho) \subset P$。那末

$$x \neq \Theta \Longrightarrow u \pm \frac{x}{\|x\|}\rho \in P, \quad 即 \quad \frac{-\|x\|}{\rho}u \leqslant x \leqslant \frac{\|x\|}{\rho}u.$$

令 $e_1, e_2 \in P$, $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$, $\|e_1 + e_2\| = \mu$, 那末

$$-\frac{u}{\rho} \leqslant \frac{-e_1 - e_2}{\mu} \leqslant \frac{e_1}{\mu} \leqslant \frac{e_1 + e_2}{\mu} \leqslant \frac{u}{\rho},$$

即
$$-u \leqslant \frac{\rho}{\mu} e_1 \leqslant u, \quad 从而 \quad \frac{\rho}{\mu} e_1 \in I_u.$$

依假定，存在正数 α, 使

$$\frac{\rho}{\mu} = \frac{\rho}{\mu}\|e_1\| \leqslant \alpha, \quad 即 \quad \mu \geqslant \frac{\rho}{\alpha} > 0.$$

这就是説，

$$e_1, e_2 \in P, \ \|e_1\| = \|e_2\| = 1 \Longrightarrow \|e_1 + e_2\| \geqslant \frac{\rho}{M},$$

从而 P 是正規的。

注 設 P 是正規錐性集。对于每个 $x \in E$, 定义

$$\|x\|_u = \inf\{\alpha \mid -\alpha u \leqslant x \leqslant \alpha u\},$$

那末，因为 $u \in \overset{\circ}{P}$, 依前定理的証明，存在 $\rho > 0$, 使

$$\frac{-\|x\|}{\rho}u \leqslant x \leqslant \frac{\|x\|}{\rho}u,$$

即
$$\|x\|_u \leqslant \frac{1}{\rho}\|x\|.$$

特别对于任意 $x \in E$, $\|x\|_u$ 有定义。不难証明

$$\|\lambda x\|_u=|\lambda|\,\|x\|_u,\ \|x+y\|_u\leqslant\|x\|_u+\|y\|_u.$$

依前定理，I_u 有界，即存在正数 α，使 $x\in I_u\Longrightarrow\|x\|\leqslant\alpha$。

但 $I_u=\{x\mid\|x\|_u\leqslant 1\}$，从而

$$\left\|\frac{x}{\|x\|_u}\right\|\leqslant\alpha,\ \text{即}\ \|x\|\leqslant\alpha\|x\|_u\ \ (x\in E).$$

于是对于每个 $x\in E$，

$$\rho\|x\|_u\leqslant\|x\|\leqslant\alpha\|x\|_u,$$

即 $\|x\|_u$ 是与 $\|x\|$ 等价的范数。

定理 17(M. Г. Крейн)．設 P 是賦范綫性空間 E 中一个实心錐性集，而 $u\in\mathring{P}$。为了 $f\in E^*$ 可以表示成 $f=g-h$ 的形狀，这里 $g,h\in P^*$，必須且只須 f 在 $I_u=\{x\mid x\in E,\ -u\leqslant x\leqslant u\}$ 上有界。

証 1）必要性；設 $f=g-h,\ g,h\in P^*$。于是

$$-u\leqslant x\leqslant u\Longrightarrow -g(u)\leqslant g(x)\leqslant g(u),\ -h(u)\leqslant h(x)\leqslant h(u).$$

即
$$x\in I_u\Longrightarrow|g(x)|\leqslant g(u),\ |h(x)|\leqslant h(u).$$

于是
$$x\in I_u\Longrightarrow|f(x)|\leqslant|g(x)-h(x)|\leqslant g(u)+h(u),$$

即 f 在 I_u 上有界。

2）充分性：設 $f\in E^*$，且 f 在 I_u 上有界，即設存在正数 μ，使

$$x\in I_u\Longrightarrow|f(x)|\leqslant\mu=\sup_{x\in I_u}|f(x)|.$$

既然 $u\in\mathring{P},\ \lambda>0\Longrightarrow\lambda u\in\mathring{P}$，無妨設 $\|u\|=1$。定义

$$p(x)=\sup_{\Theta\leqslant y\leqslant x}f(y).$$

因为 $u\in\mathring{P}$，存在 $\rho>0$，使 $\overline{S}(u,\rho)\subset P$，从而

$$u\pm\frac{x}{\|x\|}\rho\in P,\ \text{即}\ -u\leqslant\frac{\rho}{\|x\|}x\leqslant u.$$

于是
$$\left|f\left(\frac{\rho}{\|x\|}x\right)\right|\leqslant M,\ \text{或}\ |f(x)|\leqslant\frac{M}{\rho}\|x\|.$$

但 $\Theta\leqslant y\leqslant x\Longrightarrow\frac{\rho}{\|x\|}y\leqslant\frac{\rho}{\|x\|}x\leqslant u$，所以

$$|f(y)|\leqslant\frac{M}{\rho}\|x\|.$$

所以 $p(x)$ 对于一切 $x\in P$ 有定义。不难看出 $p(x)\geqslant 0$, $p(x)\geqslant f(x)$ $(x\in P)$, 并且 $p(\lambda x)=\lambda p(x)(\lambda\leqslant 0)$。又如 $x, y\in P$,

$$p(x)+p(y)=\sup_{\Theta\leqslant z_1\leqslant x} f(z_1)+\sup_{\Theta\leqslant z_2\leqslant y} f(z_2)=$$

$$=\sup_{\substack{\Theta\leqslant z_1\leqslant x\\ \Theta\leqslant z_2\leqslant y}} f(z_1+z_2)\leqslant \sup_{\Theta\leqslant z\leqslant x+y} f(z)=p(x+y).$$

今証
$$p(u)=\frac{M+f(u)}{2}.$$

事实上,

$$2p(u)-f(u)=2\sup_{\Theta\leqslant x\leqslant u} f(x)-f(u)=\sup_{\Theta\leqslant x\leqslant u} f(2x-u).$$

但 $\Theta\leqslant x\leqslant u\Longrightarrow -u\leqslant 2x-u\leqslant u$, 而反之, $-u\leqslant y\leqslant u\Longrightarrow y=2\left[\frac{y+u}{2}\right]-$ $-u$, 而 $\Theta\leqslant\frac{y+u}{2}\leqslant u$. 所以

$$2p(x)-f(u)=\sup_{y\in I_u} f(y)=M,$$

这正是上面所要証的。

令
$$g_0(\lambda u)=\lambda\frac{M+f(u)}{2}\quad(\lambda\in R).$$

那末 g_0 是 E 中綫性子空間 $L_0=\{\lambda u|\lambda\in R\}$ 上的非負綫性泛函数, 并且 $g_0(x)\geqslant p(x)$ 对每个 $x\in P\cap L_0$ 成立。設 L 是 E 的綫性子空間, 并且 $L\supset L_0$, 并設 g_0 已經延拓到 L 上成为非負綫性泛函数, 使 $g(x)\geqslant p(x)$ $(x\in P\cap L)$。取 $x_0\notin L$, 令

$$L_1=\{x+\lambda x_0|x\in L, \lambda\in R\},$$

那末 L_1 中每元可以一意表示成 $x+\lambda x_0$ 的形狀, 既然 $u\in L_0\subset L$, 并且

$$\frac{-\|x_0\|}{\rho}u\leqslant x_0\leqslant\frac{\|x_0\|}{\rho}u$$

必存在 $y, z\in L$, 使 $z+x_0, y-x_0\in P$。于是

$$y+z=(y-x_0)+(z+x_0)\in P,$$

所以 $y+z\in P\cap L$, 并且

$$g(y)+g(z)=g(y+z)\geqslant p(y+z).$$

但　　$p(y+z)=p((y-x_0)+(z+x_0))\geqslant p(y-x_0)+p(z+x_0)$,

所以　　$p(z+x_0)-g(z)\leqslant -p(y-x_0)+g(y)$,

而这式对于 L 中一切滿足 $-z\leqslant x_0\leqslant y$ 的元 y, z 成立。令

$$\alpha_1=\sup_{\substack{z+x_0\in P\\ z\in L}}[p(z+x_0)-g(z)],\quad \alpha_2=\inf_{\substack{y+x_0\in P\\ y\in L}}[-p(y-x_0)+g(z)],$$

于是 $\alpha_1\leqslant\alpha_2$。取实数 γ_0，使 $\alpha_1\leqslant\gamma_0\leqslant\alpha_2$。对于每个 $w=x+\lambda x_0\in L_1$，定义 $g_1(w)=g(x)+\lambda\gamma_0\ (x\in L)$。显然 $g_1(w)$ 是加法齐性泛函数，并且它是 g 在 L_1 上的延拓。今証 g_1 在 L_1 上是非負值的。事实上，如果 $w=$ $=x+\lambda x_0\in P$，那末

$$\lambda>0\Longrightarrow\frac{x}{\lambda}+x_0\in P,\quad 所以\ p\left(\frac{x}{\lambda}+x_0\right)-g\left(\frac{x}{\lambda}\right)\leqslant\alpha_1\leqslant\gamma_0,$$

$$p(x+\lambda x_0)-g(x)\leqslant\gamma_0;$$

$$\lambda<0\Longrightarrow-\frac{x}{\lambda}-x_0\in P,\quad 所以\ p\left(\frac{-x}{\lambda}-x_0\right)+g\left(-\frac{x}{\lambda}\right)\geqslant\alpha_2\geqslant\gamma_0,$$

$$p(x+\lambda x_0)-g(x)\leqslant\lambda\gamma_0.$$

無論如何，对于 $w\in L_1$，恒有 $p(w)\leqslant g_1(w)$。特别 $g_1(w)\geqslant 0$，即 g_1 是非負的，从而在 L_1 上是連續的。又特别

$$w\in L_1\Longrightarrow g_1(w)\geqslant f(w).$$

用 Zorn 輔助定理可証 $g_1(x)$ 可以延拓到全 E 上成为非負綫性泛函数 $g(x)$，并且

$$g(x)\geqslant p(x)\geqslant f(x)\quad (x\in E).$$

特别 $g\in P^*$，而如

$$h(x)\equiv g(x)-f(x),$$

那末 $h\in P^*$，而

$$f=g-h,$$

証完。

注　由定理 5 的系可知 $g(u)\geqslant\rho\|g\|$, $h(u)\geqslant\rho\|h\|$。所以

$$\|g\|+\|h\|=g(u)+h(u)=\alpha g(u)-f(u)=M=\sup_{x\in I_u}|f(x)|.$$

設P是正規实心錐性集，依定理16，I_u有界，卽存在正数α，使$x\in I_u\Longrightarrow\|x\|\leqslant\alpha$，从而

$$\|g\|+\|h\|\leqslant\sup_{\|x\|\leqslant\alpha}|f(x)|=\alpha\|f\|.$$

下面考慮使一綫性半群不变的算子，叫做正算子。

定义 6. 設P是賦范綫性空間E中的綫性半群。由E到E中的算子T叫做正的，是指$TP\subset P$，换句話說，是指$x\geqslant\Theta\Longrightarrow Tx\geqslant\Theta$。

由定义可知为了使有界綫性算子T是正的，必須且只須

$$x\geqslant y\Longrightarrow Tx\geqslant Ty.$$

但对于非綫性算子，这兩定义不等价。对于有界綫性算子T，$TP\subset P\Longrightarrow T\bar{P}\subset\bar{P}$，$\bar{P}$表示$P$的閉包。

下面常設$\bar{P}\neq E$，这时可以保証P^*至少含一不等于Θ的元。

定理 18. 設$\bar{P}\neq E$，T是有界綫性算子，$TP\subset P$，那末$T^*P^*\subset P^*$。反之，如果P是閉的，那末$T^*P^*\subset P^*\Longrightarrow TP\subset P$。

証 設$f\in P^*$，那末$x\in P\Longrightarrow f(x)\geqslant 0$，从而

$$(T^*f)(x)=f(Tx)\geqslant 0\quad(x\in P),$$

卽$T^*f\in P^*$。

如果$\bar{P}=P$，$T^*P^*\subset P^*$，而$TP\not\subset P$，必存在$x_0\in P$，使$Tx_0\notin P$。依定理8系1，存在$f\in P^*$，使$f(Tx_0)<0$，卽

$(T^*f)(x_0)<0$，从而$\|T^*f\|\notin P^*$，与假定矛盾。

定理 19. 設P是实心綫性半群，而T是有界綫性算子，$TP\subset P$。設$x_0\in E$，$Tx_0\gg\Theta$，那末$u\gg\Theta\Longrightarrow Tu\gg\Theta$。

証 因$Tx_0\gg\Theta$，$u\gg\Theta$，所以存在正数$\delta=\delta(u)$，使$u\geqslant\delta x_0$，从而$Tu\geqslant\delta Tx_0\gg\Theta$。

定理 20. 設P是实綫性半群，而$\mathfrak{T}=\{T\}$是把P映到它自己之中的一簇綫性有界算子，并且$\mathfrak{T}$中任意兩二算子是可变换的。設$\mathfrak{T}$中算

子有一屬于$\overset{\circ}{P}$的公共不动点，即存在 $v\gg\Theta$，使

$$Tv=v \quad (T\in\mathfrak{T}). \tag{2}$$

那末諸 $T^*(T\in\mathfrak{T})$ 也有一屬于 P^* 的公共不动点，即存在 $\psi\in P^*$，使

$$T^*\psi=\psi \quad (T\in\mathfrak{T}).$$

証 对于(2)中的 v，令

$$\|x\|_v=\inf\{\lambda\mid -\lambda v\leqslant x\leqslant \lambda v\}.$$

仿定理 16 下的注不难驗明 $\|x\|_v$ 是一拟范数［即除 $\|x\|_v=0\Longrightarrow x=\Theta$ 外，与范数具有相同的性質］。注意

$$-\lambda Tv=-\lambda v\leqslant Tx\leqslant \lambda v=\lambda Tv,$$

可知

$$\|Tx\|_v\leqslant\|x\|_v \quad (x\in E,\ T\in\mathfrak{T}). \tag{3}$$

令

$$G=\left\{\sum_{i=1}^{n}(T_ix_i-x_i)\,\middle|\, x_i\in E,\ T_i\in\mathfrak{T},\ 1\leqslant i\leqslant n,\ n\in N\right\},$$

这里 N 表示自然数的全体。不难看出 G 是綫性子空間。今証 $G\cap\overset{\circ}{P}=\phi$。否則設有一元 $y\in G$, $y\gg\Theta$，那末存在 $\rho>0$，使 $y\geqslant\rho v$。設 m 是一自然数，令

$$m^nB_m=\sum_{k_1,\cdots,k_n}^{1\cdots m}T_1^{k_1}T_2^{k_2}\cdots T_n^{k_n}.$$

不难看出 $B_mP\subset P$, $B_mv=v$，并且依定理 19（注意 $v\in\overset{\circ}{P}$, $Tv=v$），

$$B_my\geqslant\rho B_mv=\rho v,$$

$$\|B_my\|_v\geqslant\rho.$$

依(3)，对于任意自然数 $k_1,\cdots k_v$，

$$\|T_1^{k_1}\cdots T_n^{k_n}x_j\|_v\leqslant\|x_j\|_v \quad (1\leqslant j\leqslant n),$$

但 m^nB_my 可以表示成 $2nm^{n-1}$ 項形如 $T_1^{k_1}\cdots T_n^{k_n}x_j$ 的元之和，因为把 T_i 的同次幂的項合幷，在

$$\sum_{k_1\cdots k_n}\sum_i T_1^{k_1}\cdots T_n^{k_n}(T_ix_i-x_i)$$

的展开式中，$2nm^n$ 項并成 $2nm^{n-1}$ 項。于是

$$\|B_m y\|_v \leqslant \frac{2n}{m} \max(\|x_1\|_v, \cdots, \|x_n\|_v).$$

当 m 足够大时，与前面所得的 $\|B_m y\|_v \geqslant \rho$ 矛盾。

由此 $G \cap \overset{\circ}{p} = \phi$。于是依定理 7 的系，存在 $\psi \in p^*$，使 $x \in G \Longrightarrow \psi(x) = 0$。特別是 $\psi(Tx - x) = 0\ (x \in E, T \in \mathfrak{T})$，即

$$(T^*\psi)(x) = \psi(x)\ \ (x \in E) \text{或} T^*\psi = \psi(T \in \mathfrak{T}).$$

証完。

定理 21. 設 P 是賦范綫性空間 E 中的錐体，并且 P 生成 E，即 E 的任意元可以表示成 P 中兩元的差。設 A 是 E 中全連續綫性算子，$AP \subset P$。設 A 有一异于 0 的固有值，那末 A 必有一正固有值 ρ，它的絕对值不小于任意其他固有值的絕对值，而与 ρ 相应的，至少有 A 的一个固有元 $v \in P$：$Av = \rho v$，同时存在 A^* 的一个固有元 $\varphi \in p^*$：$A^*\varphi = \rho\varphi$。

証 証明分三步。

1) 設 A 的諸固有值中依絕对值最大的，有一个是正的，表示成 λ_0。我們要証明有一元 $v \in P$ 及 $\psi \in P^*$，使 $Av = \lambda_0 v$，$A^*\psi = \lambda_0\psi$。

設 $R_\lambda = R(\lambda; A)$ 是 A 的豫解算子，那末 R_λ 在 $\lambda = \lambda_0$ 的鄰近有一展开式：

$$R_\lambda = \sum_{k=-n}^{\infty} C_k(\lambda - \lambda_0)^k, \quad C_{-n} \neq 0, \tag{4}$$

C_k 是綫性有界点子，而这展开式的收斂，是指在 $\mathfrak{E}(E)$ 中收斂。

取 $u \in p$，使 $C_{-n}u \neq \Theta$，这是可能的，因为 $C_{-n}P = \{\Theta\} \Longrightarrow C_{-n}E = \{\Theta\}$（因为 p 生成 E）$\Longrightarrow C_{-n} = 0$。显然

$$C_{-n}u = \lim_{\lambda \to \lambda_0} (\lambda - \lambda_0)^n R_\lambda u. \tag{5}$$

既然 λ_0 是 A 的按絕对值最大的固有值，那末当 $\lambda > \lambda_0$ 时，

$$R_\lambda u = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} u.$$

因为 $A^n u\in P$, 所以当 $\lambda>\lambda_0$ 时, $-R_\lambda u\in P$, 从而依(5), 令 $\lambda\to\lambda_0+0$, 得 $v=-C_{-n}u\in P$。既然 $(A-\lambda I)R_\lambda=I$, 所以 $AR_\lambda=\lambda R_\lambda+I$, 而

$$AR_\lambda u=\lambda R_\lambda u+u.$$

把上式双方乘$(\lambda-\lambda_0)^n$, 并令 $\lambda\to\lambda_0+0$, 得出

$$Av=\lambda_0 v.$$

上面的 u 是滿足 $C_{-n}u\neq\Theta$ 的任意元, 而由此导出 $v=-C_{-n}u\in P$, 因此得知 $-C_{-n}p\subset P$。

取 $\varphi\in P^{**}$, 使 $\varphi(u)>0$。这样的 φ 存在, 因为否则依定理 8 的系 1, $x\in P$, $-x\in P$。由于 P 是錐体, 必然 $x=\Theta$。令

$$\psi=-C^*_{-n}\varphi.$$

如果 $x\in P$, 那末

$$\psi(x)=(-C^*_{-n}\varphi)(x)=-\varphi(C_{-n}x)=\varphi(-C_{-n}x)\geqslant 0,$$

从而 $\psi\in P^*$。引用(4)的共軛式, 用同样推理可得 $A^*\psi=\lambda_0\psi$。

2) 設 A 的按絕对值最大的諸固有值之中有一个是正数的正数次方根:

$$Au=\lambda_0 u,\ \lambda_0^n>0.$$

于是 A^n 有固有値 $\lambda_0^n>0$, 而 λ_0^n 也是 A^n 的諸固有值之中按絕对値最大的, 因为依第三章, A^n 的固有值必作 λ^n 的形狀, 这里 λ 是 A 的固有值, 因为 $P^nP\subset P$, 依 1)的証, 存在 $v\in P$, $v\neq\Theta$,

$$A^n v=\lambda_0^n v.$$

令
$$v'=|\lambda_0|^{n-1}v+|\lambda_0|^{n-2}Av+\cdots+|\lambda_0|A^{n-2}v+A^{n-1}v. \tag{6}$$

那末 $v'\in P$, $v'\neq\Theta$, 事实上, 如果 $v'=\Theta$, 必然

$$|\lambda_0|^{n-1}v=-(|\lambda_0|^{n-2}Av+\cdots+A^{n-1}v),$$

而既然 $AP\subset P$, 并且 P 是錐性集, $\lambda_0\neq 0$, 只能有 $v=\Theta$, 与前面所設矛盾。把(6)两边乘 A, 那末

$$\begin{aligned}Av'&=|\lambda_0|^{n-1}Av+|\lambda_0|^{n-2}A^2v+\cdots+|\lambda_0|A^{n-1}v+A^nv=\\&=|\lambda_0|^{n-1}Av+|\lambda_0|^{n-2}A^2v+\cdots+|\lambda_0|A^{n-1}v+\lambda_0^nv=|\lambda_0|v',\end{aligned}$$

因为 $\lambda_0^n>0$, 即 $|\lambda_0|^n=\lambda_0^n$。同理可以作出 A^* 在 P^* 中的一个固有元。

3) 設 A 的按絕对值最大的諸固有值中沒有一个是正数的正次方根。如果这些按絕对值相等的数有几个，我們就考察实数部分最大的那个，表示成 λ_0。設 $Au=\lambda_0 u$, $u\neq\Theta$。令

$$\lambda_0=\rho(\cos\vartheta_0+\sin\vartheta_0),$$

那末角 ϑ_0 与 2π 不可通約。今考察算子

$$A_\varepsilon=A+\varepsilon A^2,$$

这里 ε 是一个小正数。我們知道，任意多項式 $P(A)$的譜$=\{P(\lambda)|\lambda\in\sigma(A)\}$($\sigma(A)$是 A 的譜)。因此 A_ε 的譜是数集

$$\{\lambda_j+\varepsilon\lambda_j^2\,|\,\lambda_j\in\sigma(A)\}.$$

依假定，諸 λ_j 都位于以 ρ 为半徑以 0 为中心的圓內，如果有一λ_j使 $|\lambda_j|<\rho$, 那末当 ε 足够小时，$|\lambda_j+\varepsilon\lambda_j^2|<\rho$.

今設 $|\lambda_j|=\rho$, 那末

$$\lambda_j=\rho(\cos\vartheta_j+i\sin\vartheta_j),$$

而

$$\lambda_j+\varepsilon\lambda_j^2=\rho(\cos\vartheta_j+i\sin\vartheta_j)+\varepsilon\rho^2(\cos 2\vartheta_j+i\sin 2\vartheta_j)=$$

$$=(\rho\cos\vartheta_j+\varepsilon\rho^2\cos 2\vartheta_j)+i(\rho\sin\vartheta_j+\varepsilon\rho^2\sin 2\vartheta_j),$$

$$|\lambda_j\bar{+}\varepsilon\lambda_j^2|=\rho\{1+\varepsilon^2\rho^2+2\varepsilon\rho\cos\vartheta_j\}^{\frac{1}{2}}.$$

既然假定对于每个 j, $\cos\vartheta_j<\cos\vartheta_0$, 所以 $\lambda_0+\varepsilon\lambda_0^2$ 与 $\bar{\lambda}_0+\varepsilon\bar{\lambda}_0^2$ 是 A_ε 的按絕对值最大的固有値，取 ε, 使 $\lambda_0+\varepsilon\lambda_0^2$ 的幅角与 2π 可通約，依 2), $|\lambda_0+\varepsilon\lambda_0^2|$是 A_ε 的最大正固有值，既然 $\cos\vartheta_j<\cos\vartheta_0$, 所以 $\lambda_0+\varepsilon\lambda_0^2$ 是 A_ε 的最大正固有值。取 ε 足够小，可知 $\lambda_0>0$。

定理 22. 設 A 是全連續綫性算子，P 是生成 E 的錐体，并且

1) $AP\subset P$;

2) $\exists u\in P$, $\|u\|=1$, 并且存在正数 γ, 及自然数 p, 使

$$A^p u\geqslant\gamma u. \tag{7}$$

那末 A 必有一个非零的固有值，而在其按絕对值最大的諸固有値之中

至少有一个是正的，不小于$\sqrt[p]{\gamma}$，設表示成$\rho(>0)$，那末A有一个与ρ相应的正固有元v：

$$Av=\rho v,\ v\in p,\ v\neq\Theta,$$

并且A^*有一固有元ψ：

$$A^*\psi=\rho\psi(\psi\in p^*,\ \psi\neq\Theta).$$

証 依定理21，只須証A有一固有值，它的絕对值$\geqslant\sqrt[p]{\gamma}$。依(7)，

$$A^{np}u\geqslant\gamma^n u,$$

从而
$$f\in P^*\Longrightarrow f(A^{np}u)\geqslant f(\gamma_u^n).$$

于是
$$\|f\|\|A^{np}u\|\geqslant\gamma^n f(u),$$

即
$$\|f\|\|A^{np}\|\geqslant\gamma^n f(u),\ \|A^{np}\|\geqslant\frac{\gamma^n f(u)}{\|f\|}.$$

如取$f\in P^*$，使$f(u)\neq 0$，那末

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}\geqslant\sqrt[p]{\gamma}.$$

既然$\sigma(A)$是閉集并且

$$\sup_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|=\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

定义 7. 設A是綫性有界算子，P是实心錐体，$AP\subset P$。A叫做按P强正的，是指对于P的每个界元$x\neq\Theta$，必存在自然数$n=n(x)$，使$A^n x\gg\Theta$。

注 由于$A^n x=A(A^{n-1}x)$，所以对于强正算子A，必有一元$u(=A^{n-1}x)$，使$u\in P$，$Au\gg\Theta$。于是依定理19，$v\gg\Theta\Longrightarrow Av\gg\Theta$。

定理 23. 設P是实心錐体，$AP\subset P$，A是綫性有界算子，而$v\gg\Theta$，使$Av=\rho v$，$\rho>0$。那末对于任意元$x\gg\Theta$，元列$\{\rho^{-p}A^p x\}$与P的界之間的距离>0。

証 因为$x\gg\Theta$，存在$\delta>0$，使$x\geqslant\delta v$。把算子A^p作用在上述不等式的兩端，得

$$\rho^{-p}A^p x\geqslant\delta v(p=0,1,2,\cdots).$$

取 $\alpha>0$, 使 $S(\delta v, \alpha)\subset p$, 于是

$$S(\rho^{-v}A^{v}x, \alpha)=\rho^{-v}A^{v}x-\delta v+S(\delta v, \alpha)\subset P.$$

定理 24. 設 A 是全連續綫性算子，P 是实心錐体，A 是按 P 强正的。那末 A 具有下列性質:

1) A 在 P 中恰有一个固有元 v, 使 $\|v\|=1$:

$$Av=\rho v, \rho>0, v\gg\Theta;$$

2) 共軛算子 A^* 在 P^* 中恰有一个固有元 ψ, 使 $\|\psi\|=1$:

$$A^*\psi=\rho\psi,$$

而 ψ 是严格正的泛函数，即 $x\in P, x\neq\Theta\Longrightarrow\psi(x)>0$;

3) 与这些固有元相应的固有值 ρ 是簡單的(即它的秩 $=1$)，并且按絕对値超过 A 的任意其他固有値。

反之，如果 A 是全連續綫性算子，$AP\subset P$, 并且 A 具有性質 1)—3), 那末 A 按 P 是强正的。

証 設 A 是强正的，那末如果 $u\gg\Theta$, 依定义 7 下的注，只須取 γ 足够小，便可使 $Au\geqslant\gamma u$。于是定理 22 适用。由此，存在数 $\rho>0$, 使 ρ 按絕对値不小于 A 的任何其他固有値，并且

$$\exists\ \psi\in P^*,\ \exists\ v\in P,\ 使\ Av=\rho v,\quad A^*\psi=\rho\psi.$$

注意强正算子 A 不能有屬于 P 的界的固有元，因为如果 u 是 P 的界元 $Au=\lambda u$, 那末 $A^n u=\lambda^n u$, 从而 $u=\lambda^{-n}A^n u\gg\Theta(n=n(u))$, 得出矛盾。因此 $v\gg\Theta$。

又 ψ 是严格正的，因为如設 $x\in P$, $x\neq\Theta$, 那末依定理 5 的系，

$$\psi(x)=\rho^{-n}(A^{*n}\psi)(x)=\rho^{-n}\psi(A^n x)>0(n=n(x)),$$

設有一元 $x_0\neq\Theta$, 使存在自然数 m, 滿足

$$(A-\rho I)^m x_0=\Theta. \tag{8}$$

現在証 $x_0=\gamma v$。事实上，設 m 是滿足(8)的最小自然数，那末令

$$y_0=(A-\rho I)^{m-1}x_0(\neq\Theta),$$

得 $Ay_0=\rho y_0$。依假定，y_0 与 v 共綫，因为否則 A 必有形狀如 $v+\lambda y_0$ 的

固有元在 P 的界上[因为 y_0 与 $-y_0$ 至少有一个不在 P 中，从而 $\lambda y+v_0$ 必与 P 的界相遇]，与上面已証的部分冲突，于是存在数 $\gamma\neq 0$，使 $y_0=$ $=\gamma v$。但这样必有

$$\gamma\psi(v)=\psi[(A-\rho I)^{m-1}x_0]=[(A^*-\rho I)^{m-1}\psi](x_0)=0,$$

这不可能。从而 ρ 是簡單的。

現表証明 v 是 A 的含在 P 内的唯一固有元，其范数为 1，因为說 $Av_1=\rho_1 v_1$, $\rho_1<\rho$, 那末

$$\rho^{-n}A^n v_1=\rho^{-n}\rho^n_1 v_1\to\Theta \quad 当 \quad n\to\infty$$

与定理 23 冲突，同理得知 ψ 是 A^* 的含在 P^* 中的唯一固有元。事实上，設 $A^*\psi_1=\rho_1\psi_1$, 依 ρ 的簡單性，可知 $\rho_1<\rho$, 从而

$$\rho\psi_1(v)=\psi_1(\rho v)=\psi_1(Av)=A^*\psi_1(v)=\rho_1\psi_1(v),$$

所以 $\psi_1(v)=0$, 但上面已經証明了 ψ 是严格正的，得出矛盾。

現在証 ρ 大于任何其他固有値的絕对値。設

$$Ax_0=\lambda_0 x_0,\ \lambda_0\neq 0,\ x_0\neq\Theta.$$

設 $$|\lambda_0|=\rho,\ \lambda_0=\rho e^{i\vartheta},\ x_0=x_1+ix_2(x_1,\ x_2\in E),$$

$$既然\ A^p x_0=\lambda_0^p x_0,$$

所以 $$\rho^{-p}A^p x_1=x_1\cos p\vartheta-x_2\sin p\vartheta,$$

$$\rho^{-p}A^p x_2=x_1\sin p\vartheta+x_2\cos p\vartheta.$$

从而 $$\rho^{-p}A^p(v+\gamma_1 x_1+\gamma_2 x_2)=v+\gamma_1^{(p)}x_1+\gamma_2^{(p)}x_2,$$

这里

$$\gamma_1^{(p)}=\gamma_1\cos p\vartheta+\gamma_2\sin p\vartheta,\ \gamma_2^{(p)}=-\gamma_1\sin p\vartheta+\gamma_2\cos p\vartheta,$$

取 γ_1, γ_2 使 $x=v+\gamma_1 x_1+\gamma_2 x_2$ 屬于 P 的界，这是可能的，因为二維空間 $\{\gamma_1 x_1+\gamma_2 x_2\}$ 与 P 沒有 Θ 以外公共点。取自然数 $p_v\uparrow$, 使 $e^{ip_v\vartheta}\to$ $\to 1(p_1>n(x))$，那末 $\rho^{-p_v}A^{p_v}x\to x(v\to\infty)$。但这不可能，因为 $\rho^{-n(x)}$ $A^{n(x)}\gg\Theta$。

依定理 23, 序列 $\rho^{-p_v}A^{p_v}x$ 对 P 的距离是正的 1。

現在証明逆命題。設 1)—3) 成立。既然 $v\gg\Theta$, 可知 $\psi(v)>0$。

把 ψ 規格化，使 $\psi(v)=1$。作算子 A_1 如下：

$$A_1x=Ax-\rho\psi(x)v \quad (x\in E).$$

A_1 与 A 有同样的固有值，但 ρ 除外。事实上，設 $Ay=\lambda y(y\neq\Theta)$，$\lambda\neq 0$，$\lambda\neq\rho)$，那末 $\psi(y)=0$，因为

$$\lambda\psi(y)=\psi(Ay)=(A^*\psi)(y)=\rho\psi(y).$$

所以 $$A_1y=Ay-\rho\psi(y)v=Ay=\lambda y.$$

反之，設 $A_1y=\lambda y(y\neq\Theta,\lambda\neq 0)$，那末

$$\lambda\psi(y)=\psi(A_1y)=\psi(Ay-\rho\psi(y)v)=\psi(Ay)-\rho\psi(y)=$$
$$=(A^*\psi)(y)-\rho\psi(y)=0,$$

从而 $$Ay=A_1y+\rho\psi(y)v=\lambda y,$$

而 $\lambda\neq\rho$，因为否則按性質 2)，$y=\gamma v$，所以

$$A_1y=Ay-\rho\psi(y)v=\gamma\rho v-\rho\gamma v=\Theta,$$

矛盾。所以 A_1 的固有值位于圓 $|x|\leqslant\rho$ 之内部，即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A_1^n\|}=\rho_1<\rho. \tag{9}$$

因为

$$\psi(A_1x)=\psi(Ax-\rho\psi(x)v)=(A^*\psi)(x)-\rho\psi(x)\psi(v)=0, \ (x\in E),$$

所以 $$A^nx=\rho^n\psi(x)v+A_1^nx.$$

事实上， $$Ax=A_1x+\rho\psi(x)v \ (x\in E),$$

所以 $$A^2x=A(Ax)=A_1Ax+\rho\psi(Ax)v.$$

但 $\psi(Ax)=\psi(A_1x)+\rho\psi(x)\psi(v)=\rho\psi(x)$，因为 $\psi(A_1x)=0$.

所以 $$A^2x=A_1Ax+\rho^2\psi(x)v.$$

$$A_1v=Av-\rho\psi(v)v=\Theta.$$

$$AA_1x=A^2x-\rho\psi(x)Av=A^2x-\rho^2\psi(x)v,$$

从而 $$AA_1x=A_1Ax,$$

所以 $A^2x=A_1(A_1x+\rho\psi(x)v)+\rho\psi(x)Av=A_1^2x+\rho^2\psi(x)$.

依(9)， $$\|\rho^{-n}A^nx-\psi(x)v\|=\|\rho^{-n}A_1^nx\|\to 0,$$

如果 $x\in\gamma$，$x\neq\Theta$，那末 $\psi(x)>0$，于是 $\psi(x)v\gg\Theta$，所以当 n 足够大时，

$\rho^{-n}A^n x \gg \Theta$, 卽 $A^n x \gg \Theta$, 証完。

例 1. (Perron(1907)定理): 設 A 是一个 n 行方陣; $A=(\alpha_{ij})$, 其中一切元是正的: $\alpha_{ij}>0(1\leqslant i, j\leqslant n)$, 那末 A 恰有一个按絕对值最大的固有值,这个固有值是單的(卽是特征方程的單根),其相应固有元也是正的(卽一矢,它的一切分量是正的)。

事实上,如果 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2>0$, $\xi_i\geqslant 0(1\leqslant i\leqslant n)$, $\alpha_{ij}>0(1\leqslant i, j\leqslant n)$, 那末

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i>0 \quad (1\leqslant i\leqslant n),$$

从而 $Ax\gg\Theta$, 这里取

$$P=\{x \mid x=(\xi_1, \cdots, \xi_n), \xi_i\geqslant 0, (1\leqslant i\leqslant n)\}.$$

于是不难看出 A 是强正的(在有穷距离空間, 它必是全連續的), 从而由定理 24, 直接导出 Perron 定理。

例 2 (Jentsch 定理): 考察 Fredholm 型积分方程

$$x(s)=\mu\int_a^b K(s, t)x(t)dt, \tag{10}$$

$K(s, t)$ 是在正方形 $a\leqslant s, t\leqslant b$ 中非負連續函数, 考察 Banach 空間 $C[a, b]$中的全連續性算子

$$Ax\equiv\int_a^b K(s, t)x(t)dt,$$

那末方程(10)可以改写成如下形式:

$$Ax=\lambda x\left(\lambda\equiv\frac{1}{\mu}\right).$$

設 P 表示 $C[a, b]$中一切非負値函数的全体, P 必是实心錐体, 而 A 把 P 映入它自己之中。于是前面的一些結果适用。

非負値的核 $K(s, t)$ 叫做正型的, 是指对于每个 $x\in P$, $x\neq\Theta$, 有

$-K(s,t)$的叠代核 $K^{(k)}(s,t)$使

$$\int_a^b K^{(k)}(s,t)x(t)dt>0, \quad (a\leqslant s\leqslant b),$$

这里

$$K^{(2)}(s,t)=\int_a^b K(s,v)K(v,t)dv,$$

$$K^{(m)}(s,t)=\int_a^b K^{(m-1)}(s,u)K(u,t)du.$$

这时相应的算子 A 是强正的。

由定理 24 立刻得出下列命題：設 $K(s,t)$是連續的正型核，那末方程(10)有唯一的正基本函数(即滿足(10)并且$\|x\|=1$的元 x)，其相应特征値 μ 是 Fredholm 行列式的單根，并且这个單根按絕对値小于一切其他根，这就是 Jentsch 定理。

实际上，如果不用空間 $C[a,b]$，而用 $L^1[a,b]$，还可以得出条件更弱的結果。詳見[4]。

本节大部分結果容易推广到更一般的拓扑綫性空間上去。

参 考 文 献

[1] Красносельский, М. А.: Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, 1956.

[2] Крейн, М. Г.: Propriétés fondamentales des emsembles coniques normaux dans l'espace de Banach, ДАН СССР 28 (1940), 13—17.

[3] Крейн, М. Г.: Sur la décomposition minimale d'une fonctionnelle linéaire en composantes positives, ДАН СССР 28 (1940), 18—22.

[4] Крейн, М. Г. и Рутман, М. А.: Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, Успехи Матем, наук, 3 (1948), 3—9.

[5] Гросберг, И. И. и Крейн, М. Г.: Sur la décomposition des fonictionnelles en composantes positives, ДАН СССР 25 (1939), 723—726.
[6] Weston, J. H.: The decomposition of a continuous linear functional into non-negative components, Math. Scand. 5 (1957), 54—56.
[7] Heinz Bauer: Sur le prolongement des formes lineaires positives dans un espace vectoriel ordonné, C. R. Paris 245 (1957), 289—292.
[8] Nef, W.: Monotone linearformen auf teilgeordneten Vektorräumen, Monatsh. Math. 60 (1956), 190—197.
[9] Гантмахер, Ф. Р. и Крейн, М. Г.: Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания Механических систем 1950.
[10] Тагамлицкий, Я. А.: Обобщение одной теоремы Минковского, Успехи Матем. Наук, 7:2 (1952), 180—183.
[11] Ascoli, G.: Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari, Ann. di Mat. 10 (1932), 33—81, 203—232.
[12] Mazur, S.: Über konvexe. Mengen in linearen normierten Räumen, Studia Math. 4 (1932), 70—84.
[13] Eidelheit, M.: Zur Theorie der konvexen Mengen in linearen normierten Räumen, Studia Math. 6 (1936), 104—111.
[14] 角谷静夫 (Kakutani, S.): Ein Beweis des Satzes von M. Eidelheit über konvexen Mengen, Proc. Imp. Ac. Tokyo 13 (1937), 93—94.

附 录

測度与积分

本附录的目的是为了泛函分析的需要，对测度理論和积分理論作一个比較系統而又簡單扼要的介紹。

§1. σ 环与測度

在本节中將要討論环，σ 环，测度及一些相关問題的抽象理論，其具体化將在 §2 中討論。

在本章內，我們討論的集合永远是指某一給定集合 X 的子集，特別 X 本身和空集 Φ 看作 X 的子集，由 X 的一些子集組成的集合，叫做 X 上的一个集族，簡称集族，为簡便計，X 叫做空間，其子集就叫做集。

定义 1. 非空集族 Ω 叫做环，如果它滿足下列条件:

r_1）若 $A, B\in\Omega$ 則 $A\cup B\in\Omega$,

r_2）若 $A, B\in\Omega$ 則 $A\setminus B\in\Omega$。

任意环 Ω 必具有下列性質:

1. $\phi\in\Omega$,

因 Ω 非空，$\exists A\in\Omega$, 所以 $A\setminus A=\phi\in\Omega$.

2. 若 $A, B\in\Omega$ 則 $A\cap B\in\Omega$.

因 $A\cap B=A\setminus(A\setminus B)$.

3. 由归納法易知，假如 $A_1, \cdots, A_k\in\Omega$, 則

$$\bigcup_{n=1}^{k} A_n\in\Omega,\qquad \bigcap_{n=1}^{k} A_n\in\Omega.$$

定理 1. 設 Ω 为任意集族，則存在唯一的环 Ω^r, 使得:

1) $\Omega\subset\Omega^r$,

2) 若 Ω_1 为任一环，$\Omega\subset\Omega_1$, 則 $\Omega^r\subset\Omega_1$。Ω^r 就是含集族 Ω 的最小的环,叫做集族 Ω 的拓展环。

証 X 的一切子集組成的集族就是一个含 Ω 的环,又因任意多个含 Ω 的环的交显然还是一个含 Ω 的环，今取 Ω^r 为所有含 Ω 的环的交,它就滿足定理之要求。

定义 2. 非空集族 Ω 叫做 σ-环,如果它滿足下列条件。

σ_1) 若 $A_n\in\Omega(n=1, 2, \cdots)$則，$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\in\Omega$.

σ_2) 若 $A, B\in\Omega$, 則 $A\setminus B\in\Omega$.

任意 σ-环一定是环,并具有以下性質:

σ_3) 若 $A_n\in\Omega(n=1, 2, \cdots)$, 則 $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\in\Omega$.

因 $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=A\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\setminus A_n)$ $\left(其中 A=\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$, 集列 $A_n(n=1, 2, \cdots)$的上極限界定为由所有的点 x 組成的集合, x 具有性質:

$x\in A_{n_k}$ [$(n_1, n_2, \cdots)$为$(1, 2, 3, \cdots)$之子列] 以 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 記之

集列 $A_n(n=1, 2, \cdots)$的下極限,界定为由所有的点 x 組成的集合, x 具有性質: $x\in A_n$, $n\geqslant n_0$, (n_0 依賴于 x), 以 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 記之。

显然 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n\subset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$。若二者相等則称集列 A_n 收斂，記作

$\lim\limits_{n\to\infty} A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$。

容易証明:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

例如，我們来証第一个等式若 $x \in \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$，則由定义知 $x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$。对一切正整数 n 成立，于是 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$。反之若 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ 則 $x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k (n=1, 2, \cdots)$ 于是 x 屬于集列 A_n 的一个無旁子列 A_{n_k} 的每一集內，卽 $x \in \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$，第二个等式也可用类似方法証明。所以 σ 环还具有以下性質。

(σ_4) 若 $A_n \in \Omega (n=1, 2, \cdots)$ 則 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$, $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \in \Omega$.

显然在定理 1 中將环換成 σ- 环，定理仍然成立，因此有对于任意集族 Ω，必有唯一的一个含 Ω 的最小 σ- 环 Ω^σ 存在，Ω^σ 称为 Ω 的拓展 σ 环。

我們以 Ω^∞ 記由 X 的一切子集所組成的集族。

定理 2. 設 Ω 为任意一集族，而 $A \in \Omega^\infty$，則

$$\Omega^\sigma \cap A = (\Omega \cap A)^\sigma,$$

其中 $\Omega \cap A$ 表示由所有集合 $E \cap A (E \in \Omega)$ 所組成的集族。

証 設 Ω_1 是由所有形如 $B \cup (C \setminus A)$ 的集合組成，其中

$$B \in (\Omega \cap A)^\sigma, \quad C \in \Omega^\sigma,$$

只要注意 B 是 A 的子集这一点就容易証 Ω_1 是一个 σ- 环。

若 $E\in\Omega$ 則 $E\in\Omega_1$，事实上因 $E=(E\cap A)\cup(E\setminus A)$，而 $E\cap A\in\in\Omega\cap A\subset(\Omega\cap A)^\sigma$，因此 $\Omega\subset\Omega_1$。由拓展 σ- 环的定义得 $\Omega^\sigma\subset\Omega_1$ 于是 $\Omega^\sigma\cap A\subset\Omega_1\cap A$。由 $B\cup(C\setminus A)\cap A=B\cap A=B$ 可見 $\Omega_1\cap A==(\Omega\cap A)^\sigma$，因而有 $\Omega^\sigma\cap A\subset(\Omega\cap A)^\sigma$，又因 $\Omega^\sigma\cap A$ 是 σ 环而 $\Omega\cap A\subset\Omega^\sigma\cap A$，故亦有 $(\Omega\cap A)^\sigma\subset\Omega^\sigma\cap A$，定理証完。

σ- 环是个重要的概念，它是測度論的基础。本节的中心問題就是要在 σ- 环上建立測度。但 σ- 环的結構一般是很复杂的，至今还沒有一个普遍的方法，能从一个任意集族 Ω 構造地作出它的拓展 σ- 环来。下面关于單調族的概念和定理对我們掌握任意集族 Ω 的拓展 σ- 环 Ω^σ 是頗有帮助的。

集合序列 $A_n(n=1,2,\cdots)$ 如有 $A_n\subset A_{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 則称为遞增的；如有 $A_{n+1}\subset A_n(n=1,2,\cdots)$ 則称为遞减的，遞增和遞减的集合序列，都叫做單調序列，容易看出單調序列 $A_n(n=1,2,\cdots)$ 必定收斂，且

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n \qquad \text{当 } A_n \text{ 遞增},$$

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n \qquad \text{当 } A_n \text{ 遞减}。$$

定义 3. 非空集族 Ω 叫做單調的，如果 $A_n\in\Omega(n=1,2,\cdots)$ 是一个單調序列，則 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n\in\Omega$。

对于單調族也有与定理 1 类似的事实，卽对于任意集族 Ω 必有唯一的 Ω 的拓展單調族存在，以 Ω^m 表之。

引理 1. 环 Ω 是 σ- 环的充要条件是 Ω 是一个單調族。

証 必要性显然，現証充分性，只需証 Ω 对可数并是封閉的，設

$A_n \in \Omega(n=1, 2, \cdots)$則对于任意 n, $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \Omega$, 但 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k(n=1, 2, \cdots)$ 是 Ω 的一个單調序列。故

$$\lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Omega,\text{因此 } \Omega \text{ 是 } \sigma-\text{环。}$$

定理 3. 設 Ω 是一环，則 $\Omega^m = \Omega^\sigma$

証 由引理 1, Ω^σ 是單調族，所以 $\Omega^m \subset \Omega^\sigma$，現証 $\Omega^\sigma \subset \Omega^m$，为此只需証 Ω^m 是一个 $\sigma-$环，但由引理 1 我們只要証 Ω^m 是环就行了。

对任意集合 F，可構造一个集族 Δ_F，它由所有的集合 E 組成，E 具有性質：$E\setminus F$, $F\setminus E$ 和 $E\cup F$ 都 $\in \Omega^m$。下面指出，如 Δ_F 非空則它必是單調族。事实上，設 $A_n(n=1, 2, \cdots)$是 Δ_F 的一个單調序列，則

$$\lim_{n\to\infty} A_n \setminus F = \lim_{n\to\infty} (A_n \setminus F) \in \Omega^m,$$

$$F \setminus \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} (F \setminus A_n) \in \Omega^m,$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n \cup F = \lim_{n\to\infty} (A_n \cup F) \in \Omega^m.$$

因而 $\lim_{n\to\infty} A_n \in \Delta_F$，今特别取 $F \in \Omega$，則对任意 $E \in \Omega$ 均有 $E \in \Delta_F$（因 Ω 是环）。故 $\Omega \subset \Delta_F$ 且由拓展單調族的定义得 $\Omega^m \subset \Delta_F$ 这就是說，对任意 $F \in \Omega$ 和 $E \in \Omega^m$ 都有 $E \in \Delta_F$，由 Δ_F 定义中 E 和 F 之对称性，知在同样情况下有 $F \in \Delta_E$，因而有 $\Omega \subset \Delta_E$，从而 $\Omega^m \subset \Delta_E$，这就表示 Ω^m 是环，定理証畢。

确定在一个集族上的函数叫做集合函数。以下我們要考虑取实值（也可取 $\pm\infty$）的集合函数。为了避免誤解，对 $\pm\infty$ 所作各种运算的意义，特規定如下：

$$a+(\pm\infty)=(\pm\infty)+a=\pm\infty, \qquad (a \neq \mp\infty)$$

$$(+\infty)+(-\infty)=(-\infty)+(+\infty)=(\pm\infty)-(\pm\infty)=0,$$

$$a(\pm\infty)=(\pm\infty)a=\begin{cases}\pm\infty & a>0\\ 0 & a=0\\ \mp\infty & a<0\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}a/\pm\infty=0\\ a/0=+\infty\end{array}\right\}-\infty<a<+\infty.$$

定义 4. 定义在环 Ω 上的集合函数，μ 叫做测度，如它满足以下条件：

(μ_1) 若 $A\in\Omega$ 则 $0\leqslant\mu(A)\leqslant\infty$， （非負性）

(μ_2) $\mu(\phi)=0$,

(μ_3) 若 $A_n\in\Omega(n=1,2,\cdots)$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\Omega$, $A_i\cap A_j=\phi(i\neq j)$, 則

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)。 \quad（可数加性）$$

定义在环 Ω 上的測度 μ 叫做 σ-有穷，如果存在集合序列 $A_n\in$

$\in\Omega(n=1,2,\cdots)$; $\mu(A_n)<\infty(n=1,2,\cdots)$使 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$。

定义在环 Ω 上的測度 μ 叫做完备的，如果它具有下面的性質 $A\in$ $\in\Omega$, $\mu(A)=0$, $B\subset A$, 蘊涵 $B\in\Omega$。

环上的測度具有下列基本性質：

(μ_4) 若 $A,B\in\Omega$, $A\subset B$ 則 $\mu(A)\leqslant\mu(B)$。 （單調性）

証 因 $A\cup(B\setminus A)=B$, 所以 $\mu(A)+\mu(B\setminus A)=\mu(B)$。

由 μ 的非負性得，$\mu(A)\leqslant\mu(B)$。

(μ_5) 若 $A,B\in\Omega$, $A\subset B$, $\mu(A)<\infty$, 則 $\mu(B/A)=\mu(B)-\mu(A)$。証明是显然的。

(μ_6) 若 $A,A_n\in\Omega(n=1,2,\cdots)$, $A\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, 則 $\mu(A)\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$。

證 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2 \setminus A_1) \cup \cdots = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, 此处 $B_n = A_n \setminus A_{n-1} \setminus \cdots \setminus A_1$ $(n=2, 3, \cdots)$, $B_1 = A_1$ 显見 $B_n \in \Omega(n=1, 2, \cdots)$, $B_i \cap B_j = \phi(i \neq j)$, 且 $B_n \subset A_n (n=1, 2, \cdots)$。

因
$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

所以
$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap A)$$

于是
$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap A)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \cap A)) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

(μ_7) 若 $A, A_n \in \Omega(n=1, 2, \cdots)$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset A$, $A_i \cap A_j = \phi(i \neq j)$ 則 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leqslant \mu(A)$。

證 $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \mu(A)$, 对所有正整数 n 成立，因而得，$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leqslant \mu(A)$。

(μ_8) 若 $A_n \in \Omega(n=1, 2, \cdots)$遞增，$\lim\limits_{n \to \infty} A_n \in \Omega$, 則
$$\mu(\lim_{n \to \infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

証 設 $A_0=\phi$, 則 $\mu(\lim\limits_{n\to\infty}A_n)=\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k\right)=$

$$=\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k\setminus A_{k-1})\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k\setminus A_{k-1})=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k\setminus A_{k-1})=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n}(A_k\setminus A_{k-1})\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)。$$

(μ_9) 若 $A_n\in\Omega$, $(n=1,2,\cdots)$遞減, $\lim\limits_{n\to\infty}A_n\in\Omega$, 且至少有一个集 A_j 使 $\mu(A_j)<\infty$, 則 $\mu(\lim\limits_{n\to\infty}A_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)$。

証 設 $\mu(A_j)<\infty$, 則 $\mu(A_n)\leqslant\mu(A_j)<\infty$ $n\geqslant j$, 故 $\mu(\lim\limits_{n\to\infty}A_n)<$ $<\infty$, 我們注意 $A_j\setminus A_n(n=j,j+1,\cdots)$是遞增的,因而有

$$\mu(A_j)-\mu(\lim_{n\to\infty}A_n)=\mu(A_j\setminus\lim_{n\to\infty}A_n)=$$

$$=\mu(\lim_{n\to\infty}(A_j\setminus A_n))=\lim_{n\to\infty}\mu(A_j\setminus A_n)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\mu(A_j)-\mu(A_n))=\mu(A_j)-\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$$

二边减去 $\mu(A_j)$ 得 $\mu(\lim\limits_{n\to\infty}A_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)$。

定理 4. 定义在环 Ω 上的有穷集合函数 μ 为有穷测度的充要条件为:

(μf_1) 若 $A\in\Omega$ 則 $0\leqslant\mu(A)<\infty$,

(μf_2) 若 $A,B\in\Omega$, $A\cap B=\phi$ 則 $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$,

(μf_3) 若 $A_n\in\Omega$ $n=1,2,\cdots$ 遞減, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\phi$,

則 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)=0$。

証 必要性显然，現証充分性，只須証μ具有可数加性就行了，今設 $A_k\in\Omega$, $k=1,2,\cdots$, $A_i\cap A_j=\phi$, $i\neq j$, $A=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k\in\Omega$, $B_n=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$, $C_n=A\setminus B_n$, 則 B_n, $C_n\in\Omega$, $(n=1,2,\cdots)$ 且 $\mu(B_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\mu(A_k)$, 因 $C_n(n=1,2,\cdots)$遞减，且 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}C_n=\phi$, 故由 μ_{f_3})有，$\mu(A)=\sum\limits_{k=1}^{n}\mu(A_k)+$ $+\mu(C_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\mu(A_k)+\lim\limits_{n\to\infty}\mu(C_n)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)$, 定理証完。

前面已經提过，测度論的主要任务就在于σ-环上構成测度，然后即有在此σ-环上的 Lebesgue 积方理論，由于σ-环結構复杂，要在其上定义测度不是一件容易的事，因此通常总是先在較簡單的集族，如环(或更簡單的集族)上定义测度(或更簡單的集合函数)，然后設法將环Ω拓展为某个含Ω的σ-环，同时將环Ω上定义的测度也拓展为此σ-环上的测度，Carathéodory 的外测度理論可以完成这一任务。

定义 5. 設μ为空間X上的一个环Ω上的σ-有穷测度，今对任意$E\in\Omega^{\infty}(E\subset X)$，定义，

$$\mu^*(E)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\,\middle|\,E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,\ A_n\in\Omega(n=1,\cdots,n)\right\},$$

由于μ的σ-有穷性，因此对任意$E\in\Omega^{\infty}$，$\mu^*(E)$是唯一确定的，我們把它叫做集E的由测度μ导来的外测度。

外测度具有下面的性質。

(μ_1^*) 若 $E\in\Omega^{\infty}$ 則 $0\leqslant\mu^*(E)\leqslant\infty$

(μ_2^*) $\mu^*(\phi)=0$

(μ_3^*) 若 $E_n \in \Omega^\infty$, $(n=1,2,\cdots)$则$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$.

(μ_4^*) 若 $E \in \Omega$, 則 $\mu^*(E)=\mu(E)$.

(μ_5^*) 若 $E, F \in \Omega^\infty$, $E \subset F$, 則 $\mu^*(E) \leqslant \mu^*(F)$ （單調性)。

証 (μ_1^*)与(μ_2^*)显然，

为了証明(μ_3^*)不妨設$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)<\infty$。任給 $\varepsilon>0$, 由外測度定义，对任一 E_n, 可找到$E_{nj} \in \Omega (j=1,2,\cdots)$, $E_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{nj}$使$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_{nj}) < \mu^*(E_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}$, 故 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{nj}$ 且$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_{nj}) < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)+\varepsilon$, 故 $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)+\varepsilon$。因 ε 任意所以(μ_3^*)成立。

(μ_4^*)由$E \in \Omega$, 立卽有$\mu^*(E) \leqslant \mu(E)$,另一方面,从$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 可得 $\mu(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$, 故亦有 $\mu(E) \leqslant \mu^*(E)$, 从而 μ_4^* 成立。

(μ_5^*)可由測度μ的單調性和 μ^* 的定义立刻推出。

一般地，确定在一个可傳 σ- 环 Ω(卽 Ω 具有性質:若 $E \in \Omega$, $F \subset E \Longrightarrow F \in \Omega$)上的可取 $+\infty$ 的实値函数 μ^*, 如它滿足(μ_2^*), (μ_3^*)和(μ_5^*)則 μ^* 称为 Ω 上的一个外測度,若X是(T_2)型拓扑空間，Ω 是X的子集組成的可傳 σ- 环，如果 Ω 上的外測度 μ^* 更滿足 $\bar{A} \cap B=\phi$, $A, B, \in \Omega \Longrightarrow \mu^*(A \cup B)=\mu^*(A)+\mu^*(B)$，則称 μ^* 为一个 Carathéodory 外測度。由此可見，我們已經把定义在环 Ω 上的測度，拓展

为最大 σ- 环 Ω^{∞} 上的集合函数，外测度 μ^*，但 μ^* 一般并非测度，因此我們必須从 Ω^{∞} 退至較小的范圍，使得 μ^* 成为其上的一个测度，下面的定理和定义解决了这个問題。

定义 6. 集 $E\in\Omega^{\infty}$，叫做 μ^* 可测，如果对任意 $F\in\Omega^{\infty}$ 都有 $\mu^*(F)=\mu^*(F\cap E)+\mu^*(F\setminus E)$ 由一切 μ^* 可测集組成的集族，命为 Ω^{μ^*}。

定理 5. 設 μ 是环 Ω 上的 σ- 有穷测度，則

(1) Ω^{μ^*} 为 σ- 环

(2) $\Omega^{\sigma}\subset\Omega^{\mu^*}$

(3) μ^* 为 Ω^{μ^*} 上的 σ 有穷完备测度。

因此以后 Ω^{μ^*}, Ω^{σ}, Ω 内集合的外测度 μ^* 就可以写成 μ。

証 (1) 設 $E, F\in\Omega^{\mu^*}$, $A\in\Omega^{\infty}$, 則

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\setminus E), \qquad \text{(a)}$$

$$\mu^*(A\cap E)=\mu^*(A\cap E\cap F)+\mu^*((A\cap E)\setminus F), \qquad \text{(b)}$$

$$\mu^*(A\setminus E)=\mu^*((A\setminus E)\cap F)+\mu^*((A\setminus E)\setminus F)) \qquad \text{(c)}$$

把 (b), (c) 代入 (a) 得，

$$\mu^*(A)=\mu^*(E\cap F\cap A)+\mu^*((A\cap E)\setminus F)+ +\mu^*((A\setminus E)\cap F)+\mu^*((A\setminus F) \qquad \text{(d)}$$

在(d)中，以 $A\cap(E\cup F)$ 代 A 得

$$\mu^*(A\cap(E\cup F))=\mu^*(A\cap E\cap F)+ +\mu^*((A\cap E)\setminus F)+\mu^*((A\setminus E)\cap F) \qquad \text{(e)}$$

以(e)代入(d)得

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap(E\cup F))+\mu^*(A\setminus(E\cup F)) \qquad \text{(f)}$$

故 $(E\cup F)\in\Omega^{\mu^*}$，同样如以 $A\setminus(E\setminus F)$ 代(d)中之 A 即得

$$\mu^*(A\setminus(E\setminus F))=\mu^*(A\cap E\cap F)+ +\mu^*((A\setminus E)\cap F)+\mu^*((A\setminus E)\setminus F). \qquad \text{(g)}$$

以(g)代入(d)即得，

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap(E\setminus F))+\mu^*(A\setminus(E\setminus F)),\qquad\text{(h)}$$

故 $E\setminus F\in\Omega^{\mu^*}$,已証 Ω^{μ^*}为环,現証,如 $E_n\in\Omega^{\mu^*}$ $n=1,2,\cdots,E_i\cap E_j=$ $=\phi,i\neq j$, 則 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in\Omega^{\mu^*}$, 今以 E_1, E_2, 代(e)中之 E 和 F 且利用 $E_1\cap E_2=\phi$ 即得 $\mu^*(A\cap(E_1\cap E_2))=\mu^*(A\cap E_1)+\mu^*(A\cap E_2)$。由数学归納法可得

$$\mu^*\left(A\cap\bigcup_{k=1}^{n}E_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\mu^*(A\cap E_k),\text{ 对一切正整数 } n \text{ 成立。}$$

設 $F_n=\bigcup_{k=1}^{n}E_k$, 因 $F_n\in\Omega^{\mu^*}$, 故

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap F_n)+\mu^*(A\setminus F_n)\geqslant\sum_{k=1}^{n}\mu^*(A\cap E_k)+\mu^*(A\setminus E)。$$

因上式对于所有 n 皆成立,于是有

$$\mu^*(A)\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(A\cap E_k)+\mu^*(A\setminus E)\geqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\setminus E),$$

但显然有 $\mu^*(A)\leqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\setminus E)$, 故 $E\in\Omega^{\mu^*}$, 这就是說, Ω^{μ^*} 是 σ-环。由

$$\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\setminus E)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A\cap E_n)+\mu^*(A\setminus E)$$

在其中以 $A\cap E$ 代 A, 于是附帶得到

$$\mu^*(A\cap E)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A\cap E_n).\qquad(*)$$

(2)設 $E\in\Omega$, $A\in\Omega^{\infty}$, 由外测度定义, 任給 $\varepsilon>0$, $\exists E_n\in\Omega(n=1,2,\cdots)$使 $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$, 且 $\mu^*(A)+\varepsilon\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(\mu(E_n\cap E)+$

$+\mu(E_s\setminus E))\geqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\setminus E)$，因 ε 是任意的，故

$\mu^*(A)\geqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\setminus E)$，故 $E\in\Omega^{\mu^*}$，从而 $\Omega\subset\Omega^{\mu^*}$，因 Ω^{μ^*} 是 σ- 环 故 $\Omega^\sigma\subset\Omega^{\mu^*}$。

(3)μ^* 在 Ω^{μ^*} 上的可数加性，可从等式(*)中以 E 代 A 而得，其次，如 $E\in\Omega^\infty$，$\mu^*(E)=0$，则 $E\in\Omega^{\mu^*}$，事实上，对任意 $A\in\Omega^\infty$，有 $\mu^*(A)=$ $=\mu^*(A)+\mu^*(E)\geqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\setminus E)$。由此立刻可以推出 μ^* 在 Ω^{μ^*} 上的完备性，因若 $E\in\Omega^{\mu^*}$，$\mu^*(E)=0$，$F\subset E$ 则 $\mu^*(F)=0$，最后由 μ 的 σ- 有穷性立即得到 μ^* 的 σ- 有穷性，定理全部証畢。

外測度及其相应的 μ^* 可測集的概念，乍看比較复杂，它的意义可从用它而达到的成就来說明，利用这个技巧使我們把环 Ω 上的測度，拓展为一个含 Ω 的 σ- 环 Ω^{μ^*} 上的測度，不仅如此，从下面的定理可以看到，这个特殊的方法实际上蘊函着普遍的意义。

定理 6. 設 μ 为环 Ω 上的 σ- 有穷測度，則它必可唯一地拓展为 Ω^σ 上的一个 σ- 有穷測度 μ，且在 Ω^σ 上 $\mu=\mu^*$。

証 这种拓展的存在性，已由定理 5 解決了，現在証明唯一性，設 μ_1 和 μ_2 是二个在 Ω^σ 上由 μ 拓展而得之 σ-有穷測度。因而当 $E\in\Omega$ 时，$\mu_1(E)=\mu_2(E)$，今設 Ω_1 是 Ω^σ 的最大子集，使对 $E\in\Omega_1$，$\mu_1(E)=$ $=\mu_2(E)$，先假定 μ_1(或 μ_2)在 Ω^σ 上是有穷的，我們指出 Ω_1 是單調族，事实上，如 $E_n\in\Omega_1(n=1,2,\cdots)$是一个單調序列，則由($\mu_8$)，($\mu_9$)知，

$$\mu_i(\lim_{k\to\infty}E_n)=\lim_{n\to\infty}\mu_i(E_n)\qquad(i=1,2)$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}E_n\in\Omega_1$，显然 $\Omega\subset\Omega_1$，由定理 3 得 $\Omega_1=\Omega^\sigma$。在一般情形下，取 $A\in\Omega$，使 $\mu_1(A)=\mu_2(A)$为有穷，$\Omega\cap A$ 是环，且由定理 2，$(\Omega\cap$ $\cap A)^\sigma=\Omega^\sigma\cap A$，因此，对 $E\in\Omega^\sigma\cap A$ 有 $\mu_1(E)=\mu_2(E)$，由 μ_1，μ_2 之 σ- 有穷性，对于 $E\in\Omega^\sigma$，有 $\mu_1(E)=\mu_2(E)$。定理得証。

假若，我們首先在 Ω^∞ 上給出了一个外測度 μ^*，那末它在所有 μ^* 可測集所組成的 σ 环上引出一个測度 $\overline{\mu}$，再考慮 $\overline{\mu}$ 所导出的外測度

μ^*，一般說来这兩个外测度是不相同的，当它們相同时，外测度 μ^* 叫做正则的。由以下定理不难看出由环 Ω 上的测度导出的外测度是正则的。

定理 7. 設 μ 是环 Ω 上的 σ-有穷测度(于是它可以拓展为 Ω^{μ^*} 上的 σ 有穷测度，仍記作 μ)。$E\in\Omega^{\infty}$，則

$$\mu^*(E)=\inf\{\mu(F)\,|\,E\subset F,\ F\in\Omega^{\mu^*}\}=\inf\{\mu(F)\,|\,E\subset F,\ F\in\Omega^{\sigma}\}$$

証 由定义

$$\mu^*(E)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)\,\middle|\,E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,\ E_n\in\Omega(n=1,2,\cdots)\right\}\geqslant$$

$$\geqslant\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)\,\middle|\,E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,\ E_n\in\Omega^{\sigma}(n=1,2,\cdots)\right\}$$

由于对任意 $E_n\in\Omega^{\sigma}(n=1,2,\cdots)$ 有 $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n$，其中

$D_n(\in\Omega^{\sigma})$ $D_1=E_1, D_n=E_n\setminus\bigcup_{i=1}^{n-1}E_i(n=2,3,\cdots)$，$D_i\cap D_j=\phi(i\neq j)$

且 $\mu(D_n)\leqslant\mu(E_n)$ 因而有 $\mu^*(E)\geqslant\inf\{\mu(E)\,|\,E\subset F,\ F\in\Omega^{\sigma}\}\geqslant$ $\geqslant\inf\{\mu(F)\,|\,E\subset F,\ F\in\Omega^{\mu^*}\}\geqslant\mu^*(E)$。定理証畢。

定理 8. 設 μ 是环 Ω 上的 σ-有穷测度，(于是它唯一地拓展为 Ω^{σ} 上的 σ-有穷测度 μ)$E\in\Omega^{\infty}$，則 $\exists F\in\Omega^{\sigma}$ 滿足，$E\subset F$，$\mu^*(E)=\mu(F)$，且对每一 $G\in\Omega^{\sigma}$ 如果 $G\subset F\setminus E$，則 $\mu(G)=0$。这样的集合 F 叫做 E 的一个可测遮盖。

証 先設 $\mu^*(E)<\infty$，由定理 7。$\exists E_n\in\Omega^{\sigma}$，$n=1,2,\cdots$ 使 $E\subset F_n$，

$\mu(F_n)<\mu^*(E)+\frac{1}{n}$，取 $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$，則 $F\in\Omega^{\sigma}$ 且 $E\subset F$ 故 $\mu^*(E)\leqslant$

$\leqslant\mu(F)\leqslant\mu(F_n)<\mu^*(E)+\frac{1}{n}$，因 n 任意的，故 $\mu^*(E)=\mu(F)$，其次

如 $G\in\Omega^\sigma$, $G\subset F\setminus E$, 則 $E\subset F\setminus G$, 故有

$$\mu(F)=\mu^*(E)\leqslant\mu(F\setminus G)=\mu(F)-\mu(G)\leqslant\mu(F).$$

因 $\mu(F)<\infty$, 故 $\mu(G)=0$。当 $\mu^*(E)=\infty$, 則 $E\subset F$, $F\in\Omega^\sigma$ 显然有 $\mu(F)=\infty$, 由 μ 的 σ 有穷性容易把它归結为已經証明过的情形。事实上因有 $E_n\in\Omega(n=1,2,\cdots)$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n=X$, $\mu(E_n)<\infty$, $E_i\cap E_j=\phi$, $i\neq j$, 故 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E\cap E_n$, 因 $\mu^*(E\cap E_n)<\infty$, 故对 $E\cap E_n$ 可找到它的可測遮盖 F_n, 今取 $F=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$, 則 $E\subset F$, $F\in\Omega^\sigma$ 如果 $G\in\Omega^\sigma$, $G\subset F\setminus E$, 故 $E\subset F\setminus G$, 令 $G_n=G\cap F_n$, 从而 $E\cap F_n\subset F_n\setminus G_n$, 对所有 n 成立，因此由 $\mu(G_n)=0$ 卽得 $\mu(G)=0$, 这样的 F 就是我們所要求的，定理証完。

定理 9. 設 μ 是环 Ω 上的 σ 有穷測度，(于是它可唯一地拓展为 Ω^σ 上的 σ-有穷測度 μ), 任給 $E\in\Omega^\sigma$, $\mu(E)<\infty$, 和 $\varepsilon>0$, 必可找到 $E_0\in\Omega$, 使

$$\mu((E\setminus E_0)\cup(E_0\setminus E))\leqslant\varepsilon.$$

証 $\mu^*(E)=\mu(E)=\inf\left\{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)\,\middle|\,E\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k,\ E_k\in\Omega,\ k=1,2,\cdots\right\}$ 故可找到 $E_k\in\Omega$, $k=1,2,\cdots$, 使 $E\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$, $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k\right)\leqslant\mu(E)+\frac{\varepsilon}{2}$, 又因 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n}E_k\right)=\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k\right)$。故存在某一 n_0, 使 $E_0=\bigcup\limits_{k=1}^{n_0}E_k$ 有

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)\leqslant\mu(E_0)+\frac{\varepsilon}{2}, \text{ 显然 } E_0\in\Omega, \text{ 且有不等式}$$

$$\mu(E\setminus E_0)\leqslant\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\setminus E_0\right)=\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)-\mu(E_0)\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\mu(E_0\setminus E)\leqslant\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\setminus E\right)=\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)-\mu(E)\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

相加以上兩不等式卽得定理。

設 Ω 为 σ-环，μ 为 Ω 上的測度，我們有一般的作法，可以將 Ω 拓展为一个 σ-环 Ω^u，同时把 μ 拓展为 Ω^u 上的一个完备測度 μ^c，下面的定理說明这个完备化的方法，以及它和外測度的关系。

定理 10. 設 Ω 为 σ-环，μ 为 Ω 上的測度，定义集族

$$\Omega^u=\{E\cup N \mid E\in\Omega,\ N\subset A\in\Omega,\ \mu(A)=0\}$$

則 Ω^u 为 σ-环，$\Omega\subset\Omega^u$，在 Ω^u 上定义集合函数 $\mu^c(E\cup N)=\mu(E)$，則 μ^c 为 Ω^u 上的完备測度。更設 μ 为 Ω 上的 σ-有穷測度，則

$$\Omega^u=\Omega^{\mu^*}, \text{ 且 } \mu^*=\mu^c.$$

証 先証第一部分，显然 $\Omega\subset\Omega^u$，我們有

(1)設 $E_n\in\Omega$, $N_n\subset A_n$, $A_n\in\Omega$, $\mu(A_n)=0$，則

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\cup N_n)\in\Omega^u, \text{(利用 } \Omega \text{ 为 } \sigma\text{-环卽得)}.$$

(2)若 $E\in\Omega$, $N\subset A$, $A\in\Omega$, $\mu(A)=0$，則 $E\setminus N\in\Omega^u$，因找到 $A\in\Omega$, $N\subset A$ 故 $E\setminus N=(E\setminus A)\cup((A\setminus N)\cap E)$，而 $E\setminus A\in\Omega$，$(A\setminus N)\cap E\subset A$，故 $E\setminus N\in\Omega^u$。

(3)若 $E_i\in\Omega$, $i=1,2$, $N_i\subset A_i$, $A_i\in\Omega$, $\mu(A_i)=0$, $i=1,2$，則 $(E_1\cup N_1)\setminus(E_2\cup N_2)\in\Omega^u$。因 $(E_1\cup N_1)\setminus(E_2\cup N_2)=[E_1\setminus(E_2\cup N_2)]\cup$

$\bigcup[N_1\setminus(E_2\bigcup N_2)]=[(E_1\setminus E_2)\setminus N_2]\bigcup[N_1\setminus(E_2\bigcup N_2)]$ 由 (2) 得 (3)。由(1)与(3)得 Ω^μ 为一σ-环，其次指出，$E\in\Omega^\mu$, $\mu^c(E)$ 是唯一确定的，为此只需証: 若 $E_i\bigcup N_i\in\Omega^\mu(i=1,2)$ $E_1\bigcup N_1=E_2\bigcup N_2$ 則必有 $\mu(E_1)=\mu(E_2)$。事实上因找到 $N_1\subset A_1$, $N_2\subset A_2$, A_1, $A_2\subset\Omega$ 且 $\mu(A_1)=$ $=\mu(A_2)=0$, 由 $E_1\bigcup N_1=E_2\bigcup N_2$ 得 $E_1\subset E_2\bigcup A_2$, 故$\mu(E_1)\leqslant\mu(E_2)$同理有 $\mu(E_2)\leqslant\mu(E_1)$,因此 $\mu(E_1)=\mu(E_2)$, 利用 μ 是σ-环Ω上的测度，容易驗証 μ^c 是 Ω^μ 上的测度。最后設 $F\subset E\bigcup N$, $\mu^c(E\bigcup N)=0$, 于是 $\mu(E)=0$, 又 $N\subset A$, $A\in\Omega$, $\mu(A)=0$, 故$F\subset E\bigcup A$, 且 $\mu(E\bigcup A)=0$, 这也就是說 $F\in\Omega^\mu$, 至此第一部分証完。

順便指出:

$$(\mathrm{I})\Omega^\mu=\{E\setminus N\,|\,E\in\Omega,N\subset A,A\in\Omega,\mu(A)=0\}=$$
$$=\{(E\setminus N)\bigcup(N\setminus E)\,|\,E\in\Omega,N\subset A,A\in\Omega,\mu(A)=0\},$$

由下列关系式,即可得証:

$$E\setminus N=(E\setminus A)\bigcup((A\setminus N)\bigcap E),$$
$$E\bigcup N=(E\bigcup A)\setminus(A\setminus(E\bigcup N)).$$
$$E\bigcup N=((E\setminus A)\setminus(A\bigcap(E\bigcup N)))\bigcup((A\bigcap(E\bigcup N))\setminus(E\setminus A))$$
$$(E\setminus N)\bigcup(N\setminus E)=(E\setminus A)\bigcup[A\bigcap((E\setminus N)\bigcup(N\setminus E))]$$

(II)$\mu^c(E\setminus N)=\mu^c((E\setminus N)\bigcup(N\setminus E))=\mu^c(E\bigcup N)=\mu(E)$, 这个等式不难从 μ^c 之定义和上面四个关系式，并注意到 $\mu(E)=$ $=\mu(E\bigcup A)=\mu(E\setminus A)$而得。

現在来証定理的第二部分。因 μ^* 在 $\Omega^{\mu^*}\supset\Omega^c$ (此处 $\Omega^c=\Omega$) 上是完备测度，因此 $\Omega^\mu\subset\Omega^{\mu^*}$, 且在 Ω^μ 上有 $\mu^*=\mu^c$, 因此問題归結到証明 $\Omega^{\mu^*}\subset\Omega_\mu$, 由于 μ 的σ-有穷性，我們只要証，如 $E\in\Omega^{\mu^*}$, $\mu^*(E)<\infty$, 則 $E\in\Omega^\mu$ 就行了，由定理 8, 可找到 E 的一个可测遮盖 F, 使 $\mu^*(E)=$ $=\mu(F)$因 μ^* 是 Ω^μ 上的测度，故$\mu^*(F\setminus E)=0$, 再应用定理 8, 可找到 $F\setminus E$ 的一个可测遮盖 G, 故 $\mu(G)=\mu^*(F\setminus E)=0$, 因 $E=F\setminus G\bigcup(E\bigcap$ $\bigcap G)$, $F\setminus G\in\Omega^c$, $E\bigcap G\subset G\in\Omega^c$, $\mu(G)=0$, 故$E\in\Omega^\mu$, 定理全部証完。

§2. Lebesgue-Stieltjes 測度

在这一节里，我們来討論 n 維欧几里得空間 $X=R^n$ 中的測度，先引进簡写記号如下：

x, a, b 等表示 R^n 中之点。$x=(x_1, \cdots, x_n)$, $a=(a_1, \cdots, a_n)$.

$a<b$ 表示 $a_1<b_1, \cdots, a_n<b_n$.

$a\leqslant b$ 表示 $a_1\leqslant b_1, \cdots, a_n\leqslant b_n$.

(a, b), $[a, b]$ $(a, b]$ 分别表示开，閉，左开右閉区間，即

$$(a, b)=\{x \mid a_i<x_i<b_i, i=1, \cdots, n\},$$

$$[a, b]=\{x \mid a_i\leqslant x_i\leqslant b_i, i=1, \cdots, n\},$$

$$(a, b]=\{x \mid a_i<x_i\leqslant b_i, i=1, \cdots, n\},$$

$a\pm b$ 表示点 $(a_1\pm b_1, \cdots, a_n\pm b_n)$.

$x\to a$ 表示 $x_i\to a_i, i=1, \cdots, n$.

定义 1 包含空間 R^n 內一切开集的最小 σ 环 Λ 叫做 R^n 的 Borel σ 环，Λ 內的元叫做 Borel 集，任意定义在 Borel σ 环上的对有界 Bore 集只取有穷值的測度叫做 Lebesgue-Stieltjes 測度。

定理 1. Borel σ 环 Λ 等于包含 R^n 內一切閉集的最小 σ 环，也等于包含 R^n 內一切左开右閉区間的最小 σ 环。

証 今后將用 Γ 表示一切由左开右閉区間所組成的集族。

又命 $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}$ 分别表示由一切开，閉集組成的集族，因 $R^n\in\mathfrak{G}^\sigma, \mathfrak{F}^\sigma, \Gamma^\sigma$，故 σ 环 $\mathfrak{G}^\sigma, \mathfrak{F}^\sigma, \Gamma^\sigma$ 均对补集运算为封閉的，因开集与閉集互补，故 $\Lambda=\mathfrak{G}^\sigma=\mathfrak{F}^\sigma$，又因当 $a<b$, $h^{(j)}=\left\{\frac{1}{j}, \cdots, \frac{1}{j}\right\}$ 时

$$(a, b]=\lim_j (a, b+h^{(j)}) \tag{1}$$

$$(a, b)=\lim_j (a, b-h^{(j)}]. \tag{2}$$

所以 $\Lambda=\mathfrak{G}^\sigma=\Gamma^\sigma$.

定理 2. 由一切左开右閉区間組成的集族 Γ 具有下列性質：

1) $\phi\in\Gamma$

2) $A, B\in\Gamma\Longrightarrow A\cap B\in\Gamma$

3) 設 $A, B\in\Gamma, A\subset B$ 則 $\exists C_1, \cdots, C_m\in\Gamma$ 使得

$$B\setminus A=\bigcup_{k=1}^{m}C_k,\ C_i\cap C_j=\phi(i\neq j)$$

4) $A_i\in\Gamma, i=1, 2, \cdots, m$, 則 $\exists B_j\in\Gamma, j=1, \cdots, p$,

$B_i\cap B_j=\phi(i\neq j)$使得每一个 A_i 是一些 B_j 之并集，

5) 集族 Γ 的拓展环 Γ^r 是由一切有穷多个兩兩不相交的 $A\in\Gamma$ 的并集所組成。

証 1)与2)都为显然。

3) 当空間維数 $n=1$ 时，$A, B\in\Gamma, A\subset B$ 显然有 $B\setminus A=\phi$ 或 C_1 或 $C_1\cup C_2$，此处 $C_1, C_2\in\Gamma$, $C_1\cap C_2=\phi$, 卽命題成立。在一般情形下利用坐标投影卽可看出命題也成立。

4) 当 $m=2$ 时由 $A_1=(A_1\cap A_2)\cup(A_1\setminus(A_1\cap A_2))$, $A_2=(A_1\cap A_2)\cup(A_2\setminus(A_1\cap A_2))$卽得。当 $m=3$ 时，因命題对于 $m=2$ 时成立，故对 A_1, A_2 可找到不相交的 $C_i\in\Gamma, i=1, \cdots, k$ 使 A_1, A_2 表为一些 C_i 之并。然后取 $C_i\cap A_3, i=1,\cdots,k, C_i\setminus(C_i\cap A_3), i=1,\cdots,k$, 及 $A_3\setminus(C_1\cap\cap A_3)\setminus\cdots\setminus(C_k\cap A_3)$, 因

$$C_i=(C_i\cap A_3)\cup(C_i\setminus(C_i\cap A_3)),$$

$$A_3=\bigcup_{i=1}^{k}(C_i\cap A_3)\cup[A_3\setminus(C_1\cap A_3)\setminus\cdots\setminus(C_k\cap A_3)]$$

所以命題成立。用归納法得到一般的証明。

5) 拓展环 Γ^r 显然易証为由一切有穷多个 $A\in\Gamma$ 的并所組成。由 4) 可知有穷多个 $A\in\Gamma$ 的并可以表为有穷多个兩兩不相交的 $B\in\Gamma$ 的并。証完。

要从开集族 $\mathfrak{G}$ 或閉集族 $\mathfrak{F}$ 上構成集合函数再拓展为 Borel σ-环

$\Lambda=\mathfrak{G}^{\sigma}=\mathfrak{F}^{\sigma}$ 上的测度是比較难的。 但要在集族 Γ 或环 Γ^{r} 上構成集合函数或测度并拓展为 Λ 上的测度則比較容易。事实上，設在环 Γ^{r} 上定义了有穷测度 μ, 則按 §1 定理 6 它可以唯一地拓为 $\Lambda=(\Gamma^{r})^{\sigma}$ 上的 σ-有穷测度，显然它对有界 Borel 集只取有穷值，因此是一个 Lebesgue-Stieltjes 测度。反之 Λ 上的 Lebesgue-Stieltjes 测度局限于 Γ^{r} 上必为有穷测度。因此在 Λ 上决定 Lebesgue-Stieltjes 测度的問題簡化为在 Γ^{r} 上决定有穷测度的問題。环 Γ^{r} 上的有穷测度也叫做 Lebesgue-Stieltjes 测度。

又因 Λ 上的 Lebesgue-Stieltjes 测度恒为 σ-有穷,故按 §1 定理 10 知 μ 与 Λ 的外测度拓展与完备化拓展一致，即 $\Lambda^{\mu*}=\Lambda^{\mu}$, $\mu^{c}=\mu^{*}$。故將只采用符号 Λ^{μ}, 在 Λ^{μ} 上的拓展测度仍以 μ 表示，并且也叫做 Lebesgue-Stieltjes 测度，Λ^{μ} 内的元叫做 μ 可测集。

今对任意 m 元函数 $f(x)=f(x_1, \cdots, x_m)$ 界定对变数 x_i 的差分运算

$$\Delta^{x_i}_{a_i,b_i} f=f(x_1, \cdots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \cdots, x_m)-f(x_1, \cdots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \cdots, x_m),$$

它把 1 元函数变为数，把 $n(n>1)$ 元函数变为 $(n-1)$ 元函数，容易驗証

$$\Delta^{x_i}_{a_i,b_i}\ \Delta^{x_j}_{a_j,b_j}=\Delta^{x_j}_{a_j,b_j}\ \Delta^{x_i}_{a_i,b_i} \tag{3}$$

$$\Delta^{x_i}_{a_i,b_i}+\Delta^{x_i}_{b_i,c_i}=\Delta^{x_i}_{a_i,c_i} \tag{4}$$

設 $f(x)=f(x_1, \cdots, x_m)$ 界定在 R^n 上，$a=(a_1, \cdots, a_n)$, $b=(b_1, \cdots, b_n)$ 于是界定 n 阶差分运算

$$\Delta_{a,b}f=\Delta^{x_1}_{a_1,b_1}\ \Delta^{x_2}_{a_2,b_2}\cdots\Delta^{x_n}_{a_n,b_n}f \tag{5}$$

它是一个完全确定的数。根据(3)知將式(5)右边一阶差分算子的次序任意顛倒后值仍不变，由(4)不难驗証

$$\Delta_{a,b}f+\Delta_{c,d}f=\Delta_{a,d}f. \tag{6}$$

如果有 $b_i=c_i$; $b_k=d_k$, $a_k=c_k(k\neq i)$,

应用数学归納法不难驗証

$$\Delta_{a,b}f=f(b_1,\cdots,b_n)-f(a_1,b_2,\cdots,b_n)-\cdots-f(b_1,\cdots,b_{n-1},a_n)+$$
$$+f(a_1,a_2,b_3,\cdots,b_n)+\cdots+f(b_1,\cdots b_{n-2},a_{n-1},a_n)-\cdots+$$
$$+(-1)^n f(a_1,\cdots,a_n)\cdots \qquad (7)$$

定义 2 确定在 R^n 上的函数 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)$ 叫做分布函数，如果滿足下列条件：

1) $-\infty<f(x)<+\infty,\ x\in R^n$

2) 对任意 $a,b\in R^n,\ a\leqslant b$ 而言

$$\Delta_{a,b}f=\Delta^{x_1}_{a_1,b_1}\cdots\Delta^{x_n}_{a_n b_n}f\geqslant 0$$

3) 对每一个变元 x_i 而言为右連續，即

$$\lim_{\substack{n>0\\ n\to 0}} f(x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+n},x_{k+1},\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\cdots,x_n).$$

定理 3 設 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)$为分布函数。今对任意 $A=(a,b]\in\Gamma$ 界定

$$\mu_f(A)=\mu_f(a,b]=\Delta_{a,b}f, \qquad (8)$$

更对任意 $E\in\Gamma^r$ 界定

$$\mu_f(E)=\sum_{i=1}^{k}\mu_f(A_i), \qquad (9)$$

此处

$$E=\bigcup_{i=1}^{k}A_i,\ A_i\in\Gamma,\ A_i\cap A_j=\phi(i\neq j)$$

于是 μ_f 为环 Γ^r 上的一个 Lebesgue-Stieltjes 測度

証 我們將 μ_f 簡写为 μ，并分段証明如下。

1°) 設 $A, A_i\in\Gamma(i=1,2,\cdots,k),\ A_i\cap A_j=\phi(i\neq j)$則由

$$A=\bigcup_{i=1}^{k}A_i \text{ 得 } \mu(A)=\sum_{i=1}^{k}\mu(A_i).$$

先設 $k=2$, $A=A_1\cup A_2$, 于是 A_1, A_2 必为"相鄰"区間，故必可表为 $A_1=$ $=(a,b]$, $A_2=(c,d]$, $A=(a,d]$, 此处有一个指标 i 使得 $b_i=c_i$, 而 $a_k=$ $=c_k$, $b_k=d_k(k\neq i)$, 故由(6)知 $\mu(A)=\mu(A_1)+\mu(A_2)$。設 $k>2$, 則必可对 $A_1,\cdots,A_k$ 中某些区間作适当的分割，使所得的区間組 $\{B_k\}$ 可分成 r 組($r<k$), 每組含有的区間数 $n_i<k(i=1,2,\cdots r)$, 且 $\bigcup\limits_{\substack{n=1\\(i=1,2,\cdots\nu)}}^{n_i} B_n\in\Gamma$ 于是利用剛才証明了的以及归納法可知命題成立。

2°) 設 $E\in\Gamma^r$, 則定义(9)是一意的,并且 $0\leqslant\mu(E)<\infty$, 为此只須証明:

設 $A_i, B_j\in\Gamma, i=1,\cdots,p, j=1,\cdots,q, A_i\cap A_{j'},=\phi, B_j\cap B_{j'}=\phi$ 則由 $\bigcup\limits_{i=1}^{p} A_i=\bigcup\limits_{j=1}^{q} B_j$ 得 $\sum\limits_1^p\mu(A_i)=\sum\limits_1^q\mu(B_j)$.

由定理 2 知有 $C_k\in\Gamma, k=1,\cdots,r$, $C_k\cap C_{k'}=\phi$ 使得 A_i, B_j 各为一些 C_k 的并集,而每一个 C_k 必含于某 A_i 或 B_j, 根据 1°)易知 $\sum\limits_1^p\mu(A_i)=$ $=\sum\limits_1^r\mu(C_k)=\sum\limits_1^q\mu(B_j)$, 由分布函数的条件知 $0\leqslant\mu(E)<\infty$。

3°) 設 $E, E_j\in\Gamma^r$, $j=1,2,\cdots$, $E_i\cap E_i=\phi(i\neq j)$則由 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_j$ 得 $\mu(E)=\sum\limits_1^{\infty}\mu(E_j)$。

E 可表为有穷个兩兩不相交 $A_i\in\Gamma$ 之并，每个 E_j 可以表为有穷个兩兩不相交 $B_j\in\Gamma$ 之并,对任意 $m>0$, 显然有 $E\supset\bigcup\limits_{j=1}^{m}E_j$, 即

$$E=\bigcup_{i=1}^{p}A_i\supset\bigcup_{j=1}^{q}B_j=\bigcup_{j=1}^{m}E_j.$$

又由定理 2 知有 $C_k\in\Gamma, k=1,\cdots,r, C_k\cap C_{k'}=\phi$，使得 $A_i(i=1,2,\cdots,p)$；$B_j(j=1,2,\cdots q)$ 各为一些 C_k 之并。因此 $E_j(j=1,\cdots,m)$ 也是一些 C_k 之并，因此

$$\mu(E)=\Sigma\mu(C_k),\ \sum_{j=1}^{m}\mu(E_j)=\Sigma'\mu(C_k).$$

显然每个 $\mu(C_k)$ 在和 Σ 及 Σ' 都至多出現一次，并且如果出现于 Σ' 则必也出現于 Σ。因此对任意 m 而言

$$\mu(E)\geqslant\sum_{j=1}^{m}\mu(E_k),$$

故 $\sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_j)\leqslant\mu(E)<\infty$。

另一方面

$$E=\bigcup_{i=1}^{p}A_i=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j=\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j,$$

因每个 $\mu(E_j)$ 为一些 $\mu(B_j)$ 之和，而每个 $\mu(B_j)$ 必进入唯一的 $\mu(E_j)$ 的定义和，所以

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mu(B_j)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_j)<\infty.$$

因对任意 $(a,b]\in\Gamma$ 应用分布函数的每一度数的右連續性于展式即可得

$$\lim_{\substack{h\geqslant0\\h\to0}}\mu(a+h,b]=\mu(a,b]=\lim_{\substack{h\geqslant0\\h\to0}}\mu(a,b+h).$$

故对任意 $\varepsilon>0$ 及每个 A_i 必有 $A_i'\in\Gamma$ 使得

$$\overline{A_i'}\subset A_i,\ \mu(A_i)-\varepsilon\leqslant\mu(A_i'),\ i=1,2,\cdots,p;$$

而对每个 B_j，必有 $B_j'\in\Gamma$ 使得

$$B_j\subset\operatorname{int}B_j'\subset B_j',\ \mu(B_j')\leqslant\mu(B_j)+\frac{\varepsilon}{2^j},\ j=1,2,\cdots$$

因 $\bigcup\limits_{i=1}^{p}\overline{A_i'}\subset\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\operatorname{int}B_j'$，故由 Heine–Borel 定理知有有穷个 j(不妨設为头 s 个)使得

$$\bigcup_{i=1}^{p}A_i'\subset\bigcup_{i=1}^{p}\overline{A_i'}\subset\bigcup_{j=1}^{s}\operatorname{int}B_j'\subset\bigcup_{j=1}^{s}B_j'.$$

利用定理 2 及上面几次用过的技巧易証

$$\sum_{i=1}^{p}\mu(A_i')\leqslant\sum_{j=1}^{s}\mu(B_j').$$

因此

$$\sum_{i=1}^{p}\mu(A_i)-p\varepsilon\leqslant\sum_{j=1}^{s}\mu(B_j)+\varepsilon\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{2^j}<\sum_{j=1}^{\infty}\mu(B_j)+\varepsilon$$

故

$$\mu(E)<\sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_j)+(p+1)\varepsilon\quad(\text{对任意 }\varepsilon>0)$$

即

$$\mu(E)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_j)$$

4°) $\mu(\phi)=0$.

因空集 ϕ 可表为 $\phi=(a,a]$，故 $\mu(\phi)=\mu(a,a]=\Delta_{a,a}f=0$.

綜上述各点知 $\mu=\mu_f$ 为 Γ^r 上的 Lebesgue–Stieltjes 測度。証完。

这个定理的逆也成立，我們不加証明引述如下：

定理 4. 設 μ 为 Γ^r 上的 Lebesgue–Stieltjes 測度，則必存在分布

函数 $f(x)$(不是唯一的)使得它按定理 3 所产生的测度 $\mu_f=\mu$。

兩个分布函数 f,g 叫做等价，如果它們产生同一 Lebesgue-Stieltjes 測度，即 $\mu_f=\mu_g$。我們不拟对此加予討論，在一維($n=1$)的时候很容易驗証：分布函数 f,g 等价的充要条件为 $f=g+c$, c 为常数。

定理 3, 4 把 Lebesgue-Stieltjes 測度的構成問題，进一步化簡为分布函数構成的問題，这样就提供了大量的实例。

下面我們举出几个簡單而重要的实例，其詳細証明留給讀者作为習題。

实例(一)

設 $f_k(x_k)(k=1,\cdots,n)$为一元，單調增，右連續，有穷函数，則函数

$f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{k=1}^{n} f_k(x_k)$显然是分布函数，而且

$$\Delta_{a,b}f=\Delta_{a,b}f_k=\prod_{k=1}^{n}(\Delta_{a_k,b_k}^{x_k}f)=\prod_{k=1}^{n}(f_k(b_k)-f_k(a_k)).$$

它界定測度 $$\mu(a,b]=\prod_{k=1}^{n}(f_k(b_k)-f_k(a_k)).$$

特别設 $f(x)=x_1\cdots x_n$，則相应的測度为

$$\mu(a,b]=\prod_{k=1}^{n}(b_k-a_k)$$

这个特殊的，也是一切測度中最基本最重要的測度叫做 Lebesgue 測度。根据分布函数的連續性知 Lebesgue 測度(以及一切具有連續分布函数的 Lebesgue-Stieltjes 測度)具有下列性質。

1) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}\mu(x,y]=\mu(a,b]$.

2) $\mu(a, b]=\mu(a, b)=\mu[a, b]$.

3) R^n 内任意可数集的測度为 0。

实例(二)

設 $f_k(x_k)$为 Heaviside 函数,即

$$f_k(x_k)=\begin{cases}0 & x_k<0\\ 1 & x_k\geqslant 0\end{cases} \quad k=1, \cdots, n.$$

則分布函数 $f=\Pi f_k$ 产生一最簡單的測度 μ, 对此 μ 而言不难証明 $\Lambda^\mu=\Lambda^\infty$, 并且对任意 $A\in R^n$ 有

$$\mu(A)=\begin{cases}0 & (\text{原点 } 0\notin A)\\ 1 & (\text{原点 } 0\in A)\end{cases}$$

类似于此一維空間 R^1 内取分布函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & (x<0)\\ [x], & (x\geqslant 0)\end{cases}$$

則也有 $\Lambda^\mu=\Lambda^\infty$, 并且对任意 $A\subset k^1$有

$\mu(A)=$集 A 所含有正整数点的个数。

一般地确定在一个 σ-环 Ω 上的測度 μ 称为非原子的,如果对于任意 $\varepsilon>0$, $\exists E\in\Omega$ 使 $0<\mu(E)<\varepsilon$, 在相反情形下,μ 称为原子的,容易看出,最后兩个例中的測度都是原子的。 Lebesgue 測度是非原子的。

Lebesgue 測度 μ 系定于 Borel σ-环 Λ 上,而后者导源于 R^n 中的开集和閉集, 因此可以設想 μ 可測集可以用开集及閉集按測度来逼近。我們有

定理 5. 設 μ 为 Lebesgue-Stieltjes 測度。則对任意 $E\in\Lambda^\mu$, $\varepsilon>0$, 必有开集 G, 閉集 F 使得 $F\subset E\subset G$, $\mu(G\setminus E)<\varepsilon$, $\mu(E\setminus F)<\varepsilon$。

証 1°) $E\in\Gamma$ 的情形: 命 $E=(a, b]$, 根据定理 I 証明中式(1)得 $\mu(a, b]=\lim\limits_{j}\mu(a, b+h^{(j)})$故对于任意 $\varepsilon>0$ 有开集 $G\supset E$, $\mu(G/E)<\varepsilon$.

2°) $E\in\Lambda^\mu$, $\mu(E)<\infty$ 的情形: 我們有

$$\mu(E)=\mu^*(E)=\inf\left\{\sum_1^\infty \mu(E_n)\middle| E\subset \bigcup_1^\infty E_n, E_n\in\Gamma^r, n=1,2,\cdots\right\}=$$

$$=\inf\left\{\sum_1^\infty \mu(E_n)\middle| E\subset \bigcup_1^\infty E_n, E_n\in\Gamma^r, (n=1,2,\cdots),\right.$$

$$\left.E_i\cap E_j=\phi, (i\neq j)\right\}=\inf\left\{\sum_1^\infty \mu(E_n)\middle| E\subset \bigcup_1^\infty E_n,\right.$$

$$\left.E_n\in\Gamma, (n=1,2,\cdots), E_i\cap E_j=\phi, (i\neq j)\right\}.$$

因此对任給 $\varepsilon>0$ 必有 $E_n\in\Gamma$ $n=1,2,\cdots$, $E_i\cap E_j=\phi(i\neq j)$

使得 $$E\subset \bigcup_1^\infty E_n,\quad \sum_1^\infty \mu(E_n)<\mu(E)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

由 1° 知有开集 $G_n\supset E_n$, $\mu(G_n)<\mu(E_n)+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$,

因此 $$E\subset \bigcup_1^\infty E_n\subset \bigcup_1^\infty G_n=G(\text{开集})。$$

$$\mu(G)\leqslant \sum_1^\infty \mu(G_n)<\sum_1^\infty \mu(E_n)+\frac{\varepsilon}{2}<\mu(E)+\varepsilon,$$

但 $\mu(E)<\infty$, 故有

$$\mu(G\setminus E)=\mu(G)\setminus\mu(E)<\varepsilon.$$

3°) $E\in\Lambda^u$, $\mu(E)=\infty$的情形: 因 Lelesgue-Stieltjes 測度恒为 σ-有穷,故有 $E_n\in\Lambda^u$, $\mu(E_n)<\infty$, $E=\bigcup\limits_1^\infty E_n$, 由 2° 知有开集 $G_n\supset E_n$, $\mu(G_n\setminus E_n)<\frac{\varepsilon}{2^n}$ 于是开集 $G=\bigcup\limits_1^\infty G_n\supset E$ 而 $G\setminus E\subset \bigcup\limits_1^\infty$

$(G_m \setminus E_n)$，故 $\mu(G \setminus E) < \varepsilon$。

4°）注意到空間 $R^n \in \Lambda^*$，故設 $E \in \Lambda^*$ 則 $R^n \setminus E \in \Lambda^*$。因此由 3° 知有开集 $G_1 \supset R^n \setminus E$，$\mu(G_1 \setminus (R^n \setminus E)) < \varepsilon$。命 $F = R^n \setminus G_1$，于是 $F \subset E$ 而 $\mu(E \setminus F) = \mu(E \setminus (R^n \setminus G_1)) = \mu(E \cap G_1) = \mu(G_1 \setminus (R^n \setminus E)) < \varepsilon$ 証完。

§3. 可測函数

若在空間 X 上，給定了一个由 X 的子集組成的 σ-环 Ω，且 $X \in \Omega$，則 X 称为一个可測空間，有时为了明确起見，我們用記号 (X, Ω) 代替 X，通常 Ω 的元就称为可測集，但必須注意，这里的可測集概念与 §1 中的 μ^* 可測集概念有所不同。因在这里，σ 环 Ω 上可以根本不定义測度，因此它可以和測度不發生联系。

如果 $f(x)$ 是定义在 X 上的实函数（可取 $\pm\infty$），我們以記号 $(f \cdots)$ 表示由 X 的所有使 f 滿足某种关系的点 x 組成的集合，例如 $(f > a)$ 就表示由 X 的所有使 $f(x) > a$ 的点 x 組成的集合。

定义 1. 設 $f(x)$ 是定义在可測空間 (X, Ω) 上的实函数（可取 $\pm\infty$），如果对一切有限数 a，$(f > a)$ 是可測集，則 $f(x)$ 称为可測函数。

以后，如不作特別声明，我們永远假定可測函数是可以取 $\pm\infty$ 的。为了簡短起見，下面在不致發生混淆的情况下，將函数 $f(x)$，$g(x)$ 写成 f，g。

可測函数有下列性質：

1. 設 f 可測，則 $(f \geqslant a)$，$(f < a)$，$(f \leqslant a)$，$(f = a)$，a 为任意有限数，$(f = \infty)$，$(f = -\infty)$，$(f > -\infty)$，$(f < \infty)$，$(a < f < b)$，$(a \leqslant f < b)$，$(a < f \leqslant b)$，$(a \leqslant f \leqslant b)$，$a$，$b$ 有限或無限，皆为可測集。

2. 設 f, g 可測，a, b 为实常数，則 $af + bg$ 亦可測。

3. 設 f 可測，a 为实常数，則 $|f|^a$ 亦可測。

4. 設 f, g 可測，則 $f \cdot g$ 可測。

5. 設 $f_n, n=1,2,\cdots$, 可測，則 $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n$ 和 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n$ 皆可測。

証: 1. 由 $(f\geqslant a)=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(f>a-\frac{1}{n}\right)$, $(f<a)=X\setminus(f\geqslant a)$,

$(f\leqslant a)=X\setminus(f>a)$, $(f=a)=(f\geqslant a)\cap(f\leqslant a)$, $(f=\infty)=\prod\limits_{n=1}^{\infty}(f>n)$

得$(f\geqslant a)$, $(f<a)$, $(f\leqslant a)$, $(f=a)$, $(f=\infty)$皆为可測集，其他的可用类似方法証明。

从 1 的証明中，我們看到$(f>a)$, $(f<a)$, $(f\geqslant a)$, $(f\leqslant a)$中只要有一个对一切有限数 a 可測，則其他三个亦必对一切有限数 a 可測。因此可測函数可用这四个中任意一个对一切有限数 a 是可測集来定义。今后我們將随意应用，不再声明。

2. 首先容易由定义直接看出，若 f 可測，a 为实常数，則 $f+a$, af 亦可測，其次証明 $(f>g)$ 为可測集。事实上$(f>g)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(f>\gamma_n)\cap(g<\gamma_n)$, 其中 $\gamma_n, n=1,2,\cdots$, 为有理数全体，由此即推出$(f\geqslant g)$, $(f==g)$亦可測。

現在我們只要証 $f+g$ 可測就行了。令$E_0=[(f=\infty)\cap(g=-\infty)]\cup[(f=-\infty)\cap(g=\infty)]$, $E_1=X\setminus E_0$, 因此 E_0, E_1 皆可測，且 $f+g$ 在 E_0 上为零，于是 $E_1\cap(f+g>a)=E_1\cap(f>a-g)$ 可測。因此由

$$(f+g>a)=E_1\cap(f+g>a)\cup E_0 \quad (a<0),$$
$$(f+g>a)=E_1\cap(f+g>a) \qquad (a\geqslant 0)$$

故 $f+g$ 可測。

3. 当 $\alpha=0$ 时显然成立，今証 $\alpha\neq 0$ 的情形。当 $\alpha>0$,

$$(|f|^{\alpha}<a)=\begin{cases}(-a^{\frac{1}{\alpha}}<f<a^{\frac{1}{\alpha}}), & a>0\\ 0, & a\leqslant 0\end{cases}$$

当 $\alpha<0$, $(|f|^{\alpha}<a)=\begin{cases}(|f|^{-\alpha}>a^{-1}), & a>0\\ 0, & a\leqslant 0\end{cases}$

皆为可测集,故 $|f|^{\alpha}$ 可测。

4. 設 $A_1=(f=+\infty)\cap(0<g<\infty)$,

$A_2=(f=+\infty)\cap(-\infty<g<0)$,

$A_3=(f=-\infty)\cap(0<g<\infty)$,

$A_4=(f=-\infty)\cap(-\infty<g<0)$,

$A_5=(g=+\infty)\cap(0<f<\infty)$,

$A_6=(g=+\infty)\cap(-\infty<f<0)$,

$A_7=(g=-\infty)\cap(0<f<\infty)$,

$A_8=(g=-\infty)\cap(-\infty<f<0)$.

取 $E_0=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$, $E_1=X\setminus E_0$, 則 E_0, E_1 皆可測,且在 E_1 上有 $f\cdot g=[(f+g)^2-(f-g)^2]/4$, 因此 $E_1\cap(f\cdot g>a)$ 可测(对任意有限数 a)。但 $(f\cdot g>a)=[E_1\cap(f\cdot g>a)]\cup A_1\cup A_4\cup A_5\cup A_8$, 因此 $f\cdot g$ 可测。

5. 由 $(\inf\limits_{n} f_n<a)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(f_n<a)$,

$\sup\limits_{n} f_n=-\inf\limits_{n}(-f_n)$,

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n=\sup\limits_{n}(\inf\limits_{k\geqslant n} f_k)$,

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n=-\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-f_n)$

即得。

定义 2. $f(x)$ 定义在可测空間 (X,Ω) 上,如果只取有限个值 a_i $(i=1,2,\cdots,n)$,且 $(f(x)=a_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 皆为可测集,則 $f(x)$ 叫做一个單函数。

例如,任意一个可测集 A 的特征函数 $\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\in X\setminus A\end{cases}$ 就是

一个單函数的例子。于是凡單函数都可表成 $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x)$的形式，其中 A_i, $i=1, 2, \cdots, n$, 是互不相交的可測集，$\bigcup A_i = X$。

由定义可知，單函数必是可測函数。

定理 1. 如果 $f(x)$ 可測，非負，則 $f(x)$ 是一个遞增的非負有穷單函数序列的極限。

証： 作函数列

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{i-1}{2^n}, & \left(\dfrac{i-1}{2^n}\leqslant f<\dfrac{i}{2^n}\right) \ (i=1, 2, \cdots, n2^n) \\ n, & (f\geqslant n). \end{cases}$$

容易驗証这样的 $f_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$滿足定理要求。

这一定理在积分論中起着很重要的作用。

定理 2. $f(x)$ 为可測函数必須且只須 $f(x)$ 是一單函数序列的極限。

在許多書上，这个条件被当作可測函数的定义。

証　充分性： 由單函数必可測及可測函数的性質 5 即得。

必要性： 取函数序列：

$$f_n(x)=\begin{cases} \dfrac{i-1}{2^n}, & \left(\dfrac{i-1}{2^n}\leqslant f<\dfrac{i}{2^n}\right) \ (i=-n2^n+1, \cdots, n2^n) \\ n, & (f\geqslant n) \\ -n, & (f<n). \end{cases}$$

則 f_n 是單函数，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$。于是定理得証。

函数 $f(x)$ 叫做在空間 X 的可測子集 E 上可測，如果对任意有限数 a, $(f<a)x\in E$ (这表示由一切使 $f(x)>a$ 的 E 中的元 x 組成的集合)是可測集。因此若 f 可測，則它也在一切可測集上可測。显然，可測函数的一切性質与定理对于在可測集 E 上的可測函数也成立。

設(X, Ω)是一个可測空間，如果在 σ 环 Ω 上已經引入了測度 μ, 則

称为測度空間，更表示为(X, Ω, μ)。例如(X, Ω^*)就是一个測度空間的例子。

設(X, Ω, μ)是一測度空間，如果某一关系在$X\setminus E$, $E\in\Omega$, $\mu(E)=0$,上成立，則称此关系殆遍成立。例如f与g殆遍相等就是在X上除了一个零測度集合以外$f=g$。又如f叫做殆遍可測就表示$\exists E\in\Omega$, $\mu(E)=0$, 使f在$X\setminus E$上可測，这就等价于存在一个可測函数g, 使f与g殆遍相等。

如果f是測度空間(X, Ω^*)上的可測函数，則f也叫做μ可測函数。

我們可以証明下面的事实，如果f是μ可測函数，則存在測度空間(X, Ω, μ)上的一个可測函数g, 使f与g殆遍相等。事实上，因$(f>r_n)=E_n\in\Omega^*$, 其中r_n, $n=1, 2, \cdots$, 是有理数全体，因此由§1定理10, $E_n=F_n\cup N_n$, $F_n\in\Omega$, $N_n\subset A_n\in\Omega$, $\mu(A_n)=0$, $n=1, 2, \cdots$。取$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, 則$\bigcup_{n=1}^{\infty}N_n\subset A$, 且$\mu(A)=0$。今作函数

$$g(x)=\begin{cases}0, & x\in A,\\ f(x), & x\in X\setminus A,\end{cases}$$

由于$(g>r_n)$, $n=1, 2, \cdots$, 是可測集，且任意有限数a是一个遞減有理数序列的極限，因此g是可測函数，由此可見，μ可測函数是殆遍可測函数。反之，殆遍可測函数必是μ可測函数。借助这一点，我們可以断言关于可測函数的一切性質和定理可以搬到μ可測函数上去而得到相应的性質和定理。

下面要証明兩个極为重要的定理。

定理 3. (Егоров) 設μ为σ-环Ω上的測度，$E\in\Omega$, $\mu(E)<\infty$, f, f_n, $n=1, 2, \cdots$, 为E上的殆遍有穷可測函数，$f_n\to f$殆遍于E, 于是对任意$\varepsilon>0$, 必有$A\in\Omega$, 使得$\mu(E\setminus A)<\varepsilon$, 而$f_n\to f$一致于$A$。

証： 显然，E有子集$E_0\in\Omega$, $\mu(E\setminus E_0)=0$, 而f, f_n, $n=1, 2, \cdots$,

在 E_0 上有界，且 $f_n\to f$。命

$$E_n^m=\bigcup_{i=n}^{\infty}\left(|f_i(x)-f(x)|<\frac{1}{m}\right)x\in E(n,\ m=1,2,\cdots),$$

于是
$$E_n^m\subset E_{n+1}^m\ (n,m=1,2,\cdots),$$
因 $f_n\to f$ 于 E_0，所以

$$E_0\subset\lim_n E_n^m=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n^m\ (m=1,2,\cdots),$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_0\setminus E_n^m)=0$。

于是对任意 m，有 $n(m)$，使得

$$\mu(E_0\setminus E_{n(m)}^m)<\varepsilon/2^m.$$

令
$$A=E_0\cap(\bigcap_{m=1}^{\infty}E_{n(m)}^m),$$

于是当 $x\in A$ 时必有 $x\in E_n^m$(对任意 $m,n\geqslant n(m)$)，即对任意 m，有与 x 無关的 $n(m)$，使当 $i\geqslant n(m)$ 时有

$$|f_i(x)-f(x)|<\frac{1}{m},$$

即 $f_n\to f$ 一致于 A。另一方面，

$$E\setminus A=(E\setminus E_0)\cup(\bigcup_{m=1}^{\infty}(E_0\setminus E_{n(m)}^m),$$

$$\mu(E\setminus A)\leqslant\mu(E\setminus E_0)+\sum_{m=1}^{\infty}\mu(E_0\setminus E_{n(m)}^m)<\varepsilon,$$

定理証畢。

在欧几里得空間 R^n 的 Lebesque-Stieltjes 測度的特例下，Егоров 定理結合了可測函数的單函数逼近定理，还可引出連續函数的逼近定理。

定理 4.(Лузин) 設 μ 为 R^n 的 Borel σ-环 Λ 上的一个 Lebesgue-

Stieltjes 測度，$E\in\Lambda$，$f(x)$ 为E上的有穷可測函数，于是对任意 $\varepsilon>0$ 而言，存在閉集 $F\subset E$，使得 $\mu(E\setminus F)<\varepsilon$，而 $f(x)$ 在閉集F上連續。

証：設有穷函数 f 可測于 E，$\varepsilon>0$，

1° 設 f 为E上的單函数，于是 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{m}E_i$，$E_i\cap E_j=0$，$i\neq j$，$E_i\in\in\Lambda$，而$f$在 E_i 上为常数。由§2定理5知，有閉集 $F_i\subset E_i$，$i=1,2,\cdots,m$，滿足 $\mu(E_i\setminus F_i)<\frac{\varepsilon}{m}$，显然有 $F_i\cap F_j=0$，$i\neq j$，f 在 $F=\bigcup\limits_{i=1}^{m}F_i$ 上为連續而 $\mu(E\setminus F)<\varepsilon$。

2° 設 $\mu(E)<\infty$，根据定理 2 知有有穷單函数序列 $f_n\to f$ 于 E，由 Егоров 定理知，有 $F_0\subset E$，$\mu(E\setminus F_0)<\frac{\varepsilon}{2}$，而 $f_n\to f$ 一致于 F_0。根据§2定理5，可設 F_0 为閉集，由 1° 知对每个單函数 f_n，有閉集 F_n，使 $\mu(E\setminus F_n)<\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$，而 f_n 在 F_n 上連續，作用集 $F=\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}F_n$，$\mu(E\setminus F)=\mu\left(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}(E\setminus F_n)\right)\leqslant\sum\limits_{n=0}^{\infty}\mu(E\setminus F_n)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，$f_n$ 在 F 上連續而一致$\to f$，故 f 在F上連續。

3° 設 $\mu(E)=\infty$，在 R^n 上作心为原点半徑为 i 的閉球 S_i，$i=1,2,\cdots$，S_0为空集，于是 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$，$E_i=E\cap(S_i\setminus S_{i-1})$，$E_i\cap E_j=0$，$i\neq j$，显然 f 在 E_i 上可測，而 $\mu(E_i)<\infty$，故由 2° 得閉集 $F_i\subset E_i$，$\mu(E_i\setminus F_i)<\frac{\varepsilon}{2^i}$，$f$ 在 F_i 上連續，令 $F=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}F_i$，$\mu(E\setminus F)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(E_i\setminus F_i)<\varepsilon$。不难驗証$F$为閉集，而$f$連續于 F。

設 $f(x)$ 是 x 的复函数，我們說 $f(x)=g(x)+ih(x)$ 是可測函数，如果 $g(x)$ 和 $f(x)$ 皆为实可測函数。

显然，前面講过的所有关于实可測函数的性質与定理，都适用于复

可測函数。

§4. 积分

在这一节里，我們要在給定的測度空間(X, Ω, μ)上建立一般可測函数的积分理論。我們采用構造性的方法，分成下面三个步驟进行。

I. 非負單函数的积分。

定义 1. 設 $f(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}(x)$ 为一非負單函数，$f(x)$ 在空間 X 上的积分，記作 $\int_X f(x)d\mu$（以后在不致發生混乱时簡称$f(x)$的积分），界定为

$$\int_X f(x)d\mu=\sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A_i).$$

若 $\int_X f(x)d\mu<\infty$，則 $f(x)$ 称为是可积的。

显然，按照这样的定义，任意單函数的积分一定存在，剩下还要証明它是唯一确定的。事实上，如 $f(x)$ 有另一表达式为 $f(x)=$
$=\sum_{j=1}^{m} b_j\chi_{B_j}(x)$，則在 $A_i\cap B_j$, $a_i=b_j$。因而有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i\mu(A_i\cap B_j)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_j\mu(A_i\cap B_j)=\sum_{j=1}^{m} b_j\mu(B_j),$$

这就証明了任意單函数的积分是唯一确定的。

对 $A\in\Omega$，單函数 $f(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}(x)$ 在集合 A 上的积分，記作

$\int_A f(x)\,d\mu$，界定为

$$\int_A f(x)\,d\mu=\sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A_i\cap A)=\int_X f(x)\chi_A(x)\,d\mu.$$

以后在不發生混乱的情况下，$\int_X f(x)\,d\mu$ 簡写为 $\int f$，$\int_A f(x)\,d\mu$ 簡写为 $\int_A f$ 等。

定理 1. 非負單函数的积分具有下列基本性質：

1) 設 f, g 为非負單函数，则

(a) $\int (f+g)=\int f+\int g$ （可加性）；

(b) $\int_{A\cup B} f=\int_A f+\int_B f,\ A\cap B=0$；

(c) $\int Cf=C\int f,\ C\geqslant 0.$

2) (a) $f\geqslant 0 \Longrightarrow \int f\geqslant 0$；

(b) $f\geqslant g \Longrightarrow \int f\geqslant \int g$；

(c) $f=g$ 殆遍 $\Longrightarrow \int f=\int g.$

3) (a) f 可积 $\Longleftrightarrow |f|$ 可积 $\Longrightarrow f$ 殆遍有穷；

(b) 若 $|f|\leqslant g$，而 g 可积 $\Longrightarrow f$ 可积；

(c) f, g 可积 $\Longrightarrow f+g$ 可积。

証 1) (a): $\int (f+g)=\sum_{i,j}(a_i+b_j)\mu(A_i\cap B_j)=$

$$=\sum_{i,j} a_i\mu(A_i\cap B_j)+\sum_{i,j} b_j\mu(A_i\cap B_j)=$$

$$=\sum_i a_i\mu(A_i)+\sum_j b_j\mu(B_j)=\int f+\int g.$$

1) (b): $\int\limits_{A\cup B} f=\int f(\chi_A+\chi_B)=\int f\chi_A+\int f\chi_B=$

$$=\int\limits_A f+\int\limits_B f.$$

1)(c), 2)(a), 2)(c)由积分的定义直接推出,

2) (b): 令 $f=g+h$, 故 $h\geqslant 0$。利用 1)(a)和 2)(a) 即得。3)(a)的前半部不用証，后半部利用定义由反証法即得。3)(b)由 2)(b)即得。3)(c)由 1)(a)即得。定理証完。

II. 非負可測函数的积分。

定义 1′. 設 $f(x)$ 为一非負可測函数，由 §3 定理 1，存在遞增的非負單函数序列 f_n, $f_n\to f$, f 的积分界定为

$$\int f=\lim_{n\to\infty}\int f_n,$$

由定理 1 知 $\int f_n\geqslant 0$, $\int f_n$ 遞增，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n$ 存在，也就是說，按照这样定义，任意非負可測函数的积分是存在的。为了使我們的定义有意义，还須証明 $\int f$ 唯一确定。为此要証，若 $f_n\uparrow f$(表示 f_n 遞增且 $f_n\to$ $\to f$), $g_n\uparrow f$ 是二个非負單函数的遞增序列，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n=\lim\limits_{n\to\infty}\int g_n$. 这个命題又可化簡为如下的。

引理 1. 若 $0\leqslant f_n\uparrow f$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n\geqslant g$, f_n, g 为非負單函数，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n\geqslant\int g$。

事实上，如果上述引理已經証明，則对任意正整数 p, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n\geqslant$ $\geqslant\int g_p$, $\lim\limits_{n\to\infty}\int g_n\geqslant\int f_p$。因此，令 $p\to\infty$ 即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\int g_n$。

現在我們来証明上述引理，首先假定：$\mu(X)<\infty$, $\max g(x)=M<<\infty$, $\min g(x)=m>0$。任給 ε: $0<\varepsilon<m$, 令 $A_n=(f_n>g-\varepsilon)$, 因 $f_n\uparrow\lim\limits_{n\to\infty}f_n\geqslant g$, 故 $A_n\uparrow X$,

$$\int f_n\geqslant\int_{A_n}f_n>\int_{A_n}(g-\varepsilon)>\int g-M\mu(X\setminus A_n)-\varepsilon\mu(A_n),$$

先令 $n\to\infty$, 再讓 $\varepsilon\to 0$, 卽得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n\geqslant\int g$。

下面我們来解脫剛才所作的那些假定。

1) 設 $\mu(X)=\infty$, 則

$$\int f_n\geqslant\int_{A_n}f_n>\int_{A_n}(m-\varepsilon)=(m-\varepsilon)\mu(A_n)\to\infty\quad(n\to\infty).$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\int f_n=\infty\geqslant\int g.$$

2) 設 $\max g(x)=M=\infty$。無妨設 $\mu(g=\infty)>0$, 因在相反情形下，由定理 1 2)(c)卽化为証过的情形。令

$$g_1(x)=\begin{cases}g(x), & x\in\{x\mid g(x)<\infty\}\\ c, & x\in\{x\mid g(x)=\infty\},\quad 0<c<\infty.\end{cases}$$

于是由前面証过的情形得：$\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n\geqslant\int g_1=\int\limits_{(g<\infty)}g+c\mu((g=\infty))$

对一切 $c>0$ 成立。令 $c\to\infty$ 卽得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n=\infty\geqslant\int g$。

3) 設 $\min g(x)=m=0$。显然有

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\geqslant\lim_{n\to\infty}\int_{(g>0)}f_n\geqslant\int_{(g>0)}g=\int g.$$

引理証完。

因此，$\int f$ 是唯一确定的。

定理 1′. 对于非負可測函数的积分亦有定理 1 所列各性質。

証 1)(a): 因若$f_n\to f$, $g_n\to g$, 則 $f_n+g_n\to f+g$。但$\int(f_n+g_n)=$ $=\int f_n+\int g_n$。令 $n\to\infty$ 得 $\int(f+g)=\int f+\int g$。

由积分定义与可加性,其他性質亦易証明,讀者可以自补之。

III. 一般可测函数的积分。

定义 1″. 設$f(x)$可測,令

$$f^+=\begin{cases} f, & x\in(f\geqslant 0)\\ 0, & x\in(f<0),\end{cases}$$

$$f^-=\begin{cases} -f, & x\in(f\leqslant 0)\\ 0, & x\in(f>0),\end{cases}$$

于是f^+,f^-都是非負可測函数,且$f=f^+-f^-$。f之积分界定为

$$\int f=\int f^+-\int f^-\quad(\infty-\infty\text{ 看作沒有意义})。$$

若积分$\int f^+$, $\int f^-$中至少有一个有穷,则$\int f$存在。

显然, f可积$\Longleftrightarrow\int f^+$, $\int f^-$皆为有穷。由于f^+,f^-由f唯一确定。因此$\int f$是唯一确定的。若f殆遍确定,殆遍可测,故存在可测函数g,使$f=g$殆遍,若$\int g$存在,則f的积分仍有意义,定义为$\int f=\int g$。

定理 1″. 对于一般可测函数的积分亦具有定理1所列各性質(在1)(c)中允許$c<0$)。

証 1)(a)必須假定$\int f$, $\int g$与$\int f+\int g$都存在。若$\int g=\int f=$ $=\int(f+g)=\pm\infty$, 則1)(a)显然成立。因此無妨假定其中一个积分有穷,如$\int g$有穷,即g可积,故g殆遍有穷。从而$f+g$殆遍确定。在可能不确定处,即$(g=\pm\infty)$上,令$g=0$(不影响积分的值),然后把

X分为六个集合：$X=\bigcup_{i=1}^{6}A_i$，使在每个集合上 $f,g,f+g$ 都不变号，即令

$$A_1=(f\geqslant 0)\cap(g\geqslant 0),\quad A_2=(f<0)\cap(g<0),$$
$$A_3=(f\geqslant 0)\cap(g<0)\cap(f+g\geqslant 0),$$
$$A_4=(f\geqslant 0)\cap(g<0)\cap(f+g<0),$$
$$A_5=(f<0)\cap(g\geqslant 0)\cap(f+g\geqslant 0),$$
$$A_6=(f<0)\cap(g\geqslant 0)\cap(f+g<0).$$

在每个 A_i 上可加性成立。如在 A_3，利用定理 1'，

$$\int_{A_3} f=\int_{A_3}(f+g)+\int_{A_3}(-g)=\int_{A_3}(f+g)-\int_{A_3}g,$$

故 $\int_{A_3} g$ 有穷，所以 $\int_{A_3}(f+g)=\int_{A_3}f+\int_{A_3}g$。將所得六个等式相加，利用定理 1' 及积分定义即得 1)(a)。这样，其他性質的証明就变得很容易了。

以下考虑的函数都是可测函数。

定理 2.（單調收斂定理） 設 $0\leqslant f_n\uparrow f$，則 $\int f_n\uparrow\int f$。

証 由定理 1'，知 $\int f_n\uparrow$，由 §3 定理 1，存在非負單函数的遞增序列 $f_{nk}\to f_n(k\to\infty)$，令

$$g_k=\max_{n\leqslant k} f_{nk},$$

$g_k\uparrow$，为單函数。当 $n\leqslant k$，

$$f_{nk}\leqslant g_k\leqslant f_k,\quad \int f_{nk}\leqslant\int g_k\leqslant\int f_k.$$

令 $k\to\infty$，得

$$f_n\leqslant\lim_{k\to\infty} g_k\leqslant f,\quad \int f_n\leqslant\int\lim_{k\to\infty} g_k\leqslant\lim_{k\to\infty}\int f_k,$$

再讓 $n\to\infty$, 得

$$f\leqslant \lim_{k\to\infty} g_k\leqslant f,\ \lim_{n\to\infty}\int f_n\leqslant \int \lim_{k\to\infty} g_k\leqslant \lim_{k\to\infty}\int f_k.$$

故
$$\lim_{k\to\infty} g_k=f,\ \lim_{n\to\infty}\int f_n=\int f_{\circ}$$
定理証畢。

系 1. 若 $f_n\geqslant 0$, 則 $\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n=\sum_{n=1}^{\infty}\int f_n$.

証 因

$$0\leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k\uparrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k,$$

故由定理 2 及积分的可加性即得。

系 2. 若 f 可积,則 $\int_A |f|\to 0\ (\mu(A)\to 0)$.

証 設

$$f_n=\begin{cases} f, & (|f|\leqslant n)\\ n, & (|f|>n),\end{cases}$$

于是 $|f_n|\uparrow|f|$。由定理 2, $\int |f_n|\uparrow\int |f|$。故任給 $\varepsilon>0$, $\exists\, n_0$, 使 $\int |f|<\int |f_{n_0}|+\frac{\varepsilon}{2}$, 取 $\mu(A)<\frac{\varepsilon}{2n_0}$,則

$$\int_A |f|=\int_A |f_{n_0}|+\int_A (|f|-|f_{n_0}|)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

此即要証的。

定理 3. (Fatou) 設 h, g 可积,則

$$f_n\geqslant h\Longrightarrow \int \varliminf_{n\to\infty} f_n\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int f_n, \tag{1}$$

$$f_n \leqslant g \Longrightarrow \varlimsup_{n\to\infty} \int f_n \leqslant \int \varlimsup_{n\to\infty} f_n. \qquad (2)$$

又若 $h \leqslant f_n \uparrow f$ 或 $h \leqslant f_n \leqslant g$, $f_n \to f$ 殆遍，則 $\int f_n \to \int f$。

証 設 $f_n \geqslant 0$。令 $g_n = \inf\limits_{k \geqslant n} f_k$, 故 $g_n \uparrow \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n$, $f_n \geqslant g_n$。由定理 2,

$$\varliminf_{n\to\infty} \int f_n \geqslant \lim_{n\to\infty} \int g_n = \int \varliminf_{n\to\infty} f_n.$$

在一般情况下，只要考慮 $f_n - h \geqslant 0$, 卽得(1)。又考慮 $g - f_n \geqslant 0$, 由(1)并注意到 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n = -\left(\varliminf\limits_{n\to\infty} (-f_n)\right)$, 卽得(2)。利用(1),(2)不難証明(3)。

定义 2. f_n 称为按測度 μ 收斂于 f, 記作 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 都有

$$\mu(|f - f_n| \geqslant \varepsilon) \to 0 \ (n \to \infty).$$

对于按測度收斂有下列命題：若 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 則一定存在 f_n 的一个子序列 $f_{n_k} \to f$ 殆遍。

定理 4. (控制收斂定理) 設 g 可积，$|f_n| \leqslant g$ 殆遍，且 $f_n \to f$ 殆遍或 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 則 $\int f_n \to \int f$。

証 因 $\left|\int f - \int f_n\right| \leqslant \int |f - f_n|$, 故只須証 $\int |f - f_n| \to 0$。令 $g_n = |f - f_n|$; 故 $g_n \leqslant 2g$ 殆遍。因此問題化为証明若 g 可积，$0 \leqslant g_n \leqslant \leqslant g$, 且 $g_n \to 0$ 殆遍或 $g_n \xrightarrow{\mu} 0$, 則 $\int g_n \to 0$。若 $g_n \to 0$ 殆遍，則由定理 3 卽得 $\int g_n \to 0$。今設 $g_n \xrightarrow{\mu} 0$, 于是存在 g_n 的子序列 g_{n_k}, 使 $\int g_{n_k} \to \varlimsup\limits_{n\to\infty} \int g_n$。显然，$g_{n_k} \xrightarrow{\mu} 0$, 故可找到 g_{n_k} 的一个子序列 $g_{n_{k_i}} \to 0$ 殆遍。因此

$\int g_{n_{k_i}}\to 0$，故 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\int g_n=0$。用同样方法可証 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\int g_n=0$。于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\int g_n=0$。証畢。

注 I. 在上面証明的定理中，参数 $n\to\infty$ 可代以参数 $t\to t_0$, t, $t_0\in T$, T 是 $\{R\cup\pm\infty\}$ 内的任意集合，而仍然成立。这是建立在下面的事实上：

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\in T}} a_t=a \Longleftrightarrow \lim_{\substack{t_n\to t\\ t_n\in T\ \text{任意}}} a_{t_n}=a \quad (a,\ a_t\ \text{均是数})。$$

由此可得下列結果：

(A) 設 $g(x)$ 可积，$|f_t(x)|\leqslant g(x)$, $t\in T$,

$$f_t(x)\to f_{t_0}(x)\,(t\to t_0,\ t\in T)。\text{則} \int\limits_X f_t(x)\to\int\limits_X f_{t_0}(x).$$

(B) 若 $t\in T$, $\dfrac{df_t(x)}{dt}$ 在 t_0 存在，$g(x)$ 可积，$\left|\dfrac{f_t(x)-f_{t_0}(x)}{t-t_0}\right|\leqslant g(x)$，則 $\left(\dfrac{d}{dt}\int\limits_X f_t(x)\right)_{t_0}=\int\limits_X\left(\dfrac{df_t(x)}{dt}\right)_{t_0}$。

証 由(A)即得。

(C) 若 $\dfrac{df_t(x)}{dt}$ 在 $a\leqslant t\leqslant b$ 存在，对 t 連續，且 $g(x)$ 可积，$\left|\dfrac{df_t(x)}{dt}\right|\leqslant g(x)\,(a\leqslant t\leqslant b)$，則

$$\int\limits_X\frac{df_t(x)}{dt}=\frac{d}{dt}\int\limits_X f_t(x)\quad(a\leqslant t\leqslant b).$$

証 用 Lagrange 公式，$f_t(x)-f_{t'}(x)=(t-t')\left(\dfrac{df_t(x)}{dt}\right)_{t''}$，其中 t'' 在 t 与 t' 之間。故由(B)即得(C)。

(D) 在 $[a,b]\,(-\infty<a<b<+\infty)$ 中，$f_t(x)$ 对 t 連續，且 g 可积，$|f_t(x)|\leqslant g(x)$，則对任意 $t\in[a,b]$，有

$$\int_a^t \left(\int_X f_t(x) \right) dt = \int_X \left(\int_a^t f_t(x) dt \right). \tag{1}$$

若以上假定对所有有限区間都成立，且 $h(x)$ 可积，$\int_{-\infty}^{\infty} |f_t(x)| dt \leqslant h(x)$，則

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_X f_t(x) \right) dt = \int_X \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_t(x) dt \right), \tag{2}$$

其中对 t 的积分都是 Riemann 意义下的积分。

証 利用(C)將(1)式二边微商得恒等式，且当 $t=a$ 时，(1)式二边都为 0, 故(1)成立。再利用(A)卽得(2)。

II. 若考虑的測度空間为 (R^n, Λ^n)，μ 是 Lebesgue-Stieltjes 測度，則函数 f 的积分称为 Lebesgue-Stieltjes 积分，亦可記作 $\int f dF$，其中 F 是关于 μ 的分布函数。

§5. 測度积

集 X 与 Y 的积 $X \times Y$ 定义为 $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$。容易証明积具有下列性質:

1. $A \times B = \phi \Longleftrightarrow A = \phi$ 或 $B = \phi$。

以下恒假定所有的积均非空集。

2. $A_1 \times B_1 \subset A_2 \times B_2 \Longleftrightarrow A_1 \subset A_2,\ B_1 \subset B_2$.

3. $A_1 \times B_1 = A_2 \times B_2 \Longleftrightarrow A_1 = A_2,\ B_1 = B_2$.

4. $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.

5. $(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)] \cup [(A_1 \setminus A_2) \times \times B_1]$,

引理 1. 設 Ω_x, Ω_y 各为 X, Y 上的环，命 $\Omega_x \times \Omega_y$ 为由一切 $A \times B$ $(A \in \Omega_x, B \in \Omega_y)$ 所組成的集族，其中的元称为矩形，則 $(\Omega_x \times \Omega_y)^r$ 卽为

由一切不相交矩形的有穷并所組成的集族。

証　1）若 A, B 为矩形，由 4, $A\cap B$ 为矩形，由 5, $A\setminus B$ 为不相交二矩形之并，因而 $A\cup B$ 为不相交矩形的有穷并，如果令 Ω_0 为由一切不相交矩形的有穷并所組成的集族，則 $A\cap B, A\setminus B, A\cup B\in\Omega_0$。

2）設 $E, F\in\Omega_0$，故 $E=\bigcup_{i=1}^{n} E_i, F=\bigcup_{j=1}^{m} F_j, E_i\,(i=1, 2, \cdots, n)$ 为不相交矩形，$F_j(j=1, 2, \cdots, m)$ 亦为不相交矩形。由于 $E\cap F=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}(E_i\cap E_j)$, $E\setminus F=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}(E_i\setminus F_j)$，因而 $E\cap F\in\Omega_0$, $E\setminus F\in\in\Omega_0$，从而 $E\cup F\in\Omega_0$, Ω_0 为环，故 $\Omega_0=(\Omega_x\times\Omega_y)^r$。証畢。

定理 1. 設 μ_x, μ_y 分别为 σ-环 Ω_x, Ω_y 上的 σ-有穷測度，則界定在 σ-环 $(\Omega_x\times\Omega_y)^\sigma$ 上且滿足条件

$$A\in\Omega_x,\ B\in\Omega_y\Longrightarrow\mu(A\times B)=\mu_x(A)\mu_y(B) \qquad (*)$$

的測度 μ 是唯一的。

証　設 μ 是任意一个滿足条件(*)的測度。1）μ 为 $(\Omega_x\times\Omega_y)^\sigma$ 上的 σ-有穷測度。因

$$X=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i,\ \mu_x(A_i)<\infty,\ i=1, 2, \cdots,$$

$$Y=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j,\ \mu_y(B_j)<\infty,\ j=1, 2, \cdots,$$

故 $X\times Y=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_i\times B_j)$, $\mu(A_i\times B_j)=\mu_x(A_i)\mu_y(B_j)<\infty$。

2) 設 $E\in(\Omega_x\times\Omega_y)^r$，由引理 1, $E=\bigcup_{n=1}^{p}(A_n\times B_n)$，$A_n\times B_n$, $n=1,2,\cdots,p$, 为互不相交之矩形，故

$$\mu(E)=\sum_{n=1}^{p}\mu(A_n\times B_n)=\sum_{n=1}^{p}\mu_x(A_n)\mu_y(B_n).$$

1), 2) 說明了 σ-有穷测度 μ 在环 $(\Omega_x\times\Omega_y)^r$ 上的值是唯一确定了的，因此由 §1 定理 6 知，μ 在拓展 σ 环 $((\Omega_x\times\Omega_y)^r)^\sigma=(\Omega_x\times\Omega_y)^\sigma$ 上的值也是唯一确定的。定理証畢：

引理 2. 設 μ_x, μ_y 分别为 σ-环 Ω_x, Ω_y 上的 σ-有穷测度，$E\in(\Omega_x\times\Omega_y)^\sigma$，則对任意 $x\in X$, $E^x=\{y\,|\,(x,y)\in E\}\in\Omega_y$，并且函数 $\mu_y(E^x)$（是 x 的函数）为 Ω_x 可测。

証 設 $B\in\Omega_y$, $\mu_y(B)<\infty$。令 σ-环

$$P_B=(X\times B)\cap(\Omega_x\times\Omega_y)^\sigma=((X\times B)\cap(\Omega_x\times\Omega_y)^r)^\sigma=$$
$$=(\Omega_x\times(B\cap\Omega_y))^\sigma=((\Omega_x\times(B\cap\Omega_y))^r)^\sigma,$$

由引理 1 知，$(\Omega_x\times(B\cap\Omega_y))^r$ 是由 $\Omega_x\times(B\cap\Omega_y)$ 中一切不相交集的有穷并組成。命 $\mathfrak{M}_B$ 为 P_B 内所有滿足定理結論的集合組成的集族。

1) $\Omega_x\times(B\cap\Omega_y)\subset\mathfrak{M}_B$.

因若 $E\in\Omega_x\times(B\cap\Omega_y)$，故 $E=A_1\times A_2$，$A_1\in\Omega_x$, $A_2\in B\cap\Omega_y$,

$$E^x=\begin{cases}A_2 & (x\in A_1)\\ \phi & (x\notin A_1)\end{cases},\ \text{故 } E^x\in\Omega_y.$$

$\mu_y(E^x)=\mu_y(A_2)\chi_{A_1}(x)$（$\chi_{A_1}(x)$ 是 A_1 之特征函数）为 Ω_x 可测。故 $E\in\mathfrak{M}_B$。

2) $(\Omega_x\times(B\cap\Omega_y))^r\subset\mathfrak{M}_B$。

設 $E\in(\Omega_x\times(B\cap\Omega_y))^r$，則 $E=\bigcup_{k=1}^{n}E_k$,

$E_k\in(\Omega_x\times(B\cap\Omega_y))$, $k=1,2,\cdots,n$, $E_i\cap E_j=\phi$, $i\neq j$。由于 $E^x=\bigcup_{k=1}^{n}E_k^x$, $\mu_y(E^x)=\sum_{k=1}^{n}\mu_y(E_k^x)$, 由 1) 及可测集、可测函数的性質，得 $E\in$ $\in\mathfrak{M}_B$。

3) $\mathfrak{M}_B$ 为單調族：設 $E_i\in\mathfrak{M}_B$, $i=1,2,\cdots$, 若 $E_i\subset E_{i+1}$, $i=1,2,\cdots$, 則 $\lim\limits_i E_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$,

$$(\lim_i E_i)^x=\lim_i E_i^x, \tag{1}$$

$$\mu_y((\lim_i E_i)^x)=\lim_i \mu_y(E_i^x). \tag{2}$$

由可測集与可測函数之性質知，$\lim\limits_i E_i\in\mathfrak{M}_B$。若 $E_i\supset E_{i+1}$, 由于 $\mu_y(E_1^x)\leqslant\mu_y(B)<\infty$, $\lim\limits_i E_i=\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i$, 故(1), (2)仍真，即得 $\lim\limits_i E_i\in$ $\in\mathfrak{M}_B$, 故 $\mathfrak{M}_B$ 是單調族。

由 §1 定理 3, $P_B=\mathfrak{M}_B$。

4) 因 μ_y 为 σ 有穷，故 $\exists B_i\in\Omega_y$, $i=1,2,\cdots$, $\mu_y(B_i)<\infty$, $B_i\cap$ $\cap B_j=\phi$, $i\neq j$, $Y=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$。$E\in(\Omega_x\times\Omega_y)^\sigma\Longrightarrow E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$, $E_i\cap$ $\cap E_j=\phi$, $E_i\in P_{B_i}=\mathfrak{M}_{B_i}$, $i=1,2,\cdots$。$E^x=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i^x$, 由 $E_i^x\in\Omega_y\Longrightarrow$ $E^x\in\Omega_y$。因 $E_i^x\cap E_j^x=\phi\Longrightarrow\mu_y(E^x)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_y(E_i^x)$。因 $\mu_y(E_i^x)$ 皆 Ω_x

可测 $\Longrightarrow \mu_y(E^x)$ 为 Ω_x 可测。引理証完。

定理 2. 設 μ_x, μ_y 分别为 σ 环 Ω_x, Ω_y 上的 σ 有穷测度。今在 $(\Omega_x\times\Omega_y)^\sigma$ 上界定函数:

$$\mu(E)=\int_X \mu_y(E^x)d\mu_x,$$

则 μ 为 $(\Omega_x\times\Omega_y)^\sigma$ 上的测度，且当 $A\in\Omega_x, B\in\Omega_y$ 时，满足: $\mu(A\times B)=$ $=\mu_x(A)\mu_y(B)$。

証 $\mu(E)\geqslant 0$, $\mu(\phi)=0$ 皆为显然，μ 的可数加性由 μ_y 的可数加性与积分的可数加性而得，因此 μ 是 $(\Omega_x\times\Omega_y)^\sigma$ 上的测度，且当 $A\in$ $\in\Omega_x, B\in\Omega_y$ 时，$\mu(A\times B)=\int_X \mu_y(B)\chi_A(x)d\mu_x=\mu_y(B)\mu_x(A)$。定理証畢。

由定理 1 知，这样定义的测度 μ 就是在 $(\Omega_x\times\Omega_y)^\sigma$ 上滿足 $\mu(A\times$ $\times B)=\mu_x(A)\mu_y(B)(A\in\Omega_x, B\in\Omega_y)$ 条件的唯一测度，不妨表示为 $\mu=$ $=\mu_x\times\mu_y$。又从对称性，显然 $\int_Y \mu_x(E^y)d\mu_y$ 亦为 $(\Omega_x\times\Omega_y)^\sigma$ 上滿足上条件的测度，故有

$$(\mu_x\times\mu_y)(E)=\int_X \mu_y(E^x)d\mu_x=\int_Y \mu_x(E^y)d\mu_y.$$

测度空間 $(X\times Y, (\Omega_x\times\Omega_y)^\sigma, \mu_x\times\mu_y)$ 就叫做测度空間 (X, Ω_x, μ_x) 和 (Y, Ω_y, μ_y) 之积。

定理 3. (Fubini) 設 (X, Ω_x, μ_x) 和 (Y, Ω_y, μ_y) 是二个 σ 有穷测度空間，则

1) $(\mu_x\times\mu_y)(E)=0 \Longleftrightarrow \mu_y(E^x)=0$ (x 殆遍于 X) $\Longleftrightarrow \mu_x(E^y)=0$ (y 殆遍于 Y)。

2) $f(x, y)$ 为 $(\Omega_x\times\Omega_y)^\sigma$ 可测 $\Longrightarrow$

对任意固定的 $x\in X$, $f^x(y)=f(x, y)$ 为 Ω_y 可测函数; 对任意固定

的 $y\in Y$, $f^y(x)=f(x,y)$ 为 Ω_x 可测函数。

3) $f(x,y)$ 为非負可测函数 $\Longrightarrow \int\limits_X f(x,y)\,d\mu_x$ 为 Ω_y 可测函数, $\int\limits_Y f(x,y)d\mu_y$ 为 Ω_x 可测函数,且

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)d(\mu_x\times\mu_y)=\int\limits_X d\mu_x\int\limits_Y f(x,y)d\mu_y=$$

$$=\int\limits_Y d\mu_y\int\limits_X f(x,y)d\mu_x.$$

4) $f(x,y)$ 是 $(X\times Y,\ (\Omega_x\times\Omega_y)^\sigma,\ \mu_x\times\mu_y)$ 上的可积函数,則 3) 的結論仍成立,且在 Y 中除一測度为零的集以外的每个固定 y, $f(x,y)$ 为 (X,Ω_x,μ_x) 上的可积函数,对于在 X 中除一測度为零的集以外的每个固定的 x, $f(x,y)$ 为 (Y,Ω_y,μ_y) 上的可积函数。

証 由对称性,我們只要証各点結論的第一部分就行了。

1) 由 $(\mu_x\times\mu_y)(E)=\int\limits_X \mu_y(E^x)d\mu_x$, 由积分的性質卽可看出。

2) 因 $(f^x(y)>a)=(f(x,y)>a)^x$, 故由引理 2 知, 对任意 $x\in X$, $f^x(y)$ 为 Ω_y 可測。

3) 設 $f(x,y=\chi_A(x,y)A\in(\Omega_x\times\Omega_y)^\sigma$。3) 的結論由定理 2 推出,因此当 $f(x,y)$ 为單函数时, 3) 成立,当 $f(x,y)$ 为非負可测函数,由 § 1 定理 1, 它是一非負遞增單函数序列的極限,由單調收斂定理(§ 4 定理 2), 知 3) 成立。

4) $f(x,y)$ 可积, $f(x,y)=f^+(x,y)-f^-(x,y)$, 对 $f^\pm$ 用 3),

$$\int\limits_{X\times Y} f^\pm(x,y)d(\mu_x\times\mu_y)=\int\limits_X d\mu\int\limits_Y f^\pm(x,y)d\mu_y=$$

$$=\int\limits_Y d\mu_y\int\limits_X f^\pm(x,y)d\mu_x,$$

两式相减并用积分之定义即知对可积函数，3）的結論仍对。又因 $\int_X f(x,y)d\mu_x$, $\int_Y f(x,y)d\mu_y$ 可积，因此殆遍有穷，此即 4)。定理証畢。

§6. 一般可加函数与不定积分

在这一节里我們將討論确定在含空間 X 的 σ 环 Ω 上的一般可加函数。

定义 1. 确定在 σ 环 Ω 上的函数 φ 叫做 σ 或有限可加，若对 Ω 的任意可数或有限多个不相交的集合 A_n，有

$$\varphi\left(\bigcup_n A_n\right)=\sum_n \varphi(A_n).$$

为了討論不致無聊，我們假定 φ 至少取一个有穷值，且 φ 在 Ω 上不能同时取到 $+\infty$ 与 $-\infty$，以后我們永远假定 φ 不取 $-\infty$。

可加函数具有下列性質。

1. $\varphi(\phi)=0$。

2. $\varphi-\sigma$ 可加，$\left|\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right|<\infty$，$A_i\cap A_j=\phi$，$i\neq j$，$\Longrightarrow$ 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(A_n)$ 絕对收斂。

3. φ 可加（σ 或有限）。

$\varphi(A)$ 有穷，$A\supset B\Longrightarrow\varphi(B)$ 有穷。

若更假定 $\varphi\geqslant 0$，則 $A\supset B\Longrightarrow\varphi(A)\geqslant\varphi(B)$。从而有 $\varphi\left(\bigcup_n A_n\right)\leqslant\sum_n\varphi(A_n)$。

証 1. 由假定，存在 B，$\varphi(B)<\infty$，

$$\varphi(B)=\varphi(B+\phi)=\varphi(B)+\varphi(\phi)\Longrightarrow\varphi(\phi)=0.$$

2．設

$$A_n^+=\begin{cases}A_n, \varphi(A_n)\geqslant 0,\\ \phi, \varphi(A_n)<0,\end{cases}\quad A_n^-=\begin{cases}\phi, \varphi(A_n)\geqslant 0,\\ A_n, \varphi(A_n)<0.\end{cases}$$

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n^+\right)+\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n^-\right),$$

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n^+\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(A_n^+),\tag{1}$$

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n^-\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(A_n^-).\tag{2}$$

因級数(1),(2)皆收斂，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(A_n)$ 絕对收斂。

3．由 $\varphi(A)=(B)+\varphi(A\setminus B)$ 即得最后 $\varphi\left(\bigcup_n A_n\right)=\varphi(A_1U(A_2\setminus A_1)U\cdots)=\varphi(A_1)+\varphi(A_2\setminus A_1)+\cdots\leqslant\sum_n\varphi(A_n)$。

定义 2．集函数 φ 叫做在 A 从下面連續，若对任意 $A_n\nearrow A$，都有 $\lim_{n\to\infty}\varphi(A_n)=\varphi(A)$。$\varphi$ 叫做在 A 从上面連續，若对任意 $A_n\searrow A$，且 $\exists n_0$ 使 $\varphi(A_{n_0})<\infty$，都有 $\lim_{n\to\infty}\varphi(A_n)=\varphi(A)$。如果 φ 在 A 从下面和上面都連續，則称 φ 在 A 連續。如果 φ 对任意 $A\in\Omega$，从上面連續，則称 φ 在 Ω 上从上面連續。同样可定义 φ 在 Ω 上从下面連續，φ 在 Ω 上連續。

定理 1．設 φ 在 Ω 上 σ 可加，則 φ 在 Ω 上有限可加且連續。反之，若 φ 在 Ω 上有限可加，从下面連續或有限且在 ϕ 連續，則 $\varphi\sigma$ 可加。

証 定理前半部証明与 §1 中証明测度性質时完全一样，这里不再重复。設 φ 有限可加，从下面連續，則

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\varphi\left(\lim_{n\to\infty}\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\lim_{n\to\infty}\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\varphi(A_i)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(A_n),$$

即 φ 为 σ 可加。当 φ 有限且連續于 ϕ 时，

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(A_i)+\varphi\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right).$$

当 $n\to\infty$，等式右边第二项 $\to 0$。故 φ 为 σ 可加。証畢。

定理 2. 設 φ 是 Ω 上的 σ 可加函数，則可找到 $C, D\in\Omega$，使 $\varphi(C)=\sup\limits_{\Omega}\varphi$，$\varphi(D)=\inf\limits_{\Omega}\varphi$。亦即 φ 在 Ω 上达到它的極大值与極小值。

証 先来找 C：不妨設 $\varphi<\infty$，否則 $\exists A\in\Omega$，$\varphi(A)=\infty$，則令 $C=A$ 即为所求。因 φ 不取 $-\infty$，故 φ 有穷。

$\exists A_n\in\Omega\ (u=1,2,\cdots)$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(A_n)=\sup\limits_{\Omega}\varphi$。命 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，对于每个 n，可把 A 划分为 2^n 个互不相交的集合 $A_{n,m}(m=1,2,\cdots,2^n)$，$A_{n,m}$ 是形如 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}B_k$ 的集合，其中 $B_k=A_k$ 或 $A\setminus A_k\ (k=1,2,\cdots,n)$。显然，当 $n'>n$ 时，每个 $A_{n,m}$ 是有限个 $A_{n',m'}$ 的并。令 C_n 是所有那些使 $\varphi(A_{n,m})\geqslant 0$ 的集合 $A_{n,m}$ 的并集，如果沒有，了解 $C_n=\phi$。由于 A_n 是某些 $A_{n,m}$ 的并，且当 $n'>n$ 时 $A_{n',m'}$ 不是包含在 C_n 内就与 C_n 相交，因此有

$$\varphi(A_n)\leqslant\varphi(C_n)\leqslant\varphi(C_n\cup C_{n+1}\cup\cdots\cup C_{n'}),$$

令 $n'\to\infty$，因 φ 連續，故 $\varphi(A_n)\leqslant\varphi(C_n)\leqslant\varphi\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}C_k\right)$，取 $C=\lim_{n\to\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}C_k$，令 $n\to\infty$，注意到 φ 的連續性与有限性，得 $\lim_{n\to\infty}\varphi(A_n)\leqslant\varphi(C)$，即 $\sup\varphi\leqslant(C)\Longrightarrow\varphi(C)=\sup\varphi$。用同样方法可証 D 的存在性。

由定理 2 知，在 Ω 上的 σ 可加函数 φ 如果不取 ∞，則 φ 是有界的。

下面我們要証明，集函数 φ 是包含 X 的 σ 环 Ω 上的 σ 可加函数的充要条件是 φ 可表为二个測度之差，其中至少一个是有限的。这里充分性是显然的，因此只需証明必要性。我們設

$$\varphi_1(A)=\sup_{B\subset A}\varphi(B),\quad \varphi_2(A)=-\inf_{B\subset A}\varphi(B),$$

$A,B\in\Omega$，由于 $\varphi(\phi)=0$，故 φ_1,φ_2 皆为非負集合函数。下面的定理解决了这个問題。

定理 3. (Hahn 分解定理) 設 φ 为 Ω 上的 σ 可加函数，則 $\exists D\in\Omega$，使对任意的 $A\in\Omega$，有 $\varphi_1(A)=\varphi(A\cap(X\setminus D))$，$-\varphi_2(A)=\varphi(A\cap D)$，$\varphi_1,\varphi_2$ 皆測度且 φ_2 有限，$\varphi=\varphi_1-\varphi_2$。

証 由定理 2，$\exists D\in\Omega$，使 $\varphi(D)=\inf_{\Omega}\varphi$。因 $\varphi\neq-\infty$，所以 $-\infty<\varphi(D)=\inf_{\Omega}\varphi\leqslant 0$，由于 $\varphi\geqslant\varphi(D)$，故对任意 $A\in\Omega$ 有 $\varphi(D\cap A)\leqslant 0$，$\varphi(A\cap(X\setminus D))\geqslant 0$。因設 $\varphi(A\cap D)>0$，則 $\varphi(D\setminus A\cap D)=\varphi(D)-\varphi(A\cap D)<\varphi(D)$。設 $\varphi(A\cap(X\setminus D))<0$，則 $\varphi(D\cup A\cap(X\setminus D))=\varphi(D)+\varphi(A\cap(X\setminus D))<\varphi(D)$ 都会得到矛盾。从而对任意 $B\subset A$，$A,B\in\Omega$，有

$$\varphi(B)\leqslant\varphi(B\cap(X\setminus D))\leqslant\varphi(B\cap(X\setminus D))+$$
$$+\varphi((A\setminus B)\cap(X\setminus D))=\varphi(A\cap(X\setminus D)),$$

故 $\varphi_1(A)\leqslant\varphi(A\cap(X\setminus D)$，但 $A\cap(X\setminus D)\subset A$，故 $\varphi(A\cap(X\setminus D))\leqslant\leqslant\varphi_1(A)$，故 $\varphi_1(A)=\varphi(A\cap(X\setminus D))$。用类似方法可証 $-\varphi_2(A)=$

$=\varphi(A\cap D)$[因 $\varphi(B)\geqslant\varphi(B\cap D)\geqslant\varphi(B\cap D)+\varphi((A\setminus B)\cap D)=\varphi(A\cap D)$]。∴ $\varphi(A)=\varphi(A\cap(X\setminus D))+\varphi(A\cap D)=\varphi_1(A)-\varphi_2(A)$。

φ_1 是測度,因 $\varphi_1\geqslant0,\varphi_1(\phi)=0$,且

$$\varphi_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap(X/D)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(A_n\cap(X\setminus D))=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_1(A_n).$$

同理 φ_2 也是測度,且由于 $-\varphi(D)<\infty$. 故 φ_2 有穷,証畢。

設 (X,Ω,μ) 是給定的測度空間,f 是可測函数,$\int f^-<\infty$,故 $\int f$ 存在。

定义 3. $\varphi(A)=\int_A f(A\in\Omega)$叫做 Ω 上关于函数 f 的不定积分。

因 $\int_A f^-<\infty$,故 $\varphi(A)$是唯一确定的。

不定积分有下列簡單性質:

1. $\mu(A)=0\Longrightarrow\int_A f=\varphi(A)=0.$

这个性質叫做 φ 的 μ 絕对連續性。

2. φ 是 σ 可加。

3. f 可积$\Longrightarrow\varphi$ 有限。

f 殆遍有穷,$\mu-\sigma$ 有穷$\Longrightarrow\varphi-\sigma$ 有穷.

証 1. 不待証。

2. 分别对 $f^{\pm}$ 利用單調收斂定理的系 1,即得。

3. 第一部分显然,現証第二部分。$\exists A_n\in\Omega(n=1,2,\cdots)$,$\mu(A_n)<\infty$,$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$,故

$$\int f = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n \cap B_m} f$$ [其中 $B_m=(m\leqslant f<m+1)$]，其中每一个是有穷的。

下面要指出，这三个性質完全刻划了不定积分。

先引进一个概念：集合函数 φ_s 确定在含 X 的 σ 环 Ω 上，如果存在集合 N，$\mu(N)=0$，使

$$\varphi_s(A\cap(X\setminus N))=0,\ A\in\Omega,$$

則 φ_s 叫做 μ 奇异的。

定理 4. (Lebesgue 分解定理) 設測度 μ 与 σ 可加函数 φ 都在 Ω 上 σ 有穷，則 $\varphi=\varphi_c+\varphi_s$，其中 φ_c 是某个有限可測函数 f 的不定积分(f 殆遍唯一确定)。所以 φ_c 具有 σ 可加性与 μ 絕对連續性，φ_s 是 μ 奇异的 σ 可加函数。而且这样的分解是唯一的。

φ_c 与 φ_s 分別叫做 φ 的 μ 絕对連續部分与 μ 奇异部分，f 称为 φ 关于 μ 的导数，記作 $\frac{d\varphi}{d\mu}$ $\left(\frac{d\varphi}{d\mu}\text{是殆遍唯一确定的}\right)$。

証 1) 由于 μ 与 φ 的 σ 有穷性及 Hahn 分解定理，不影响一般性，可設 μ 与 φ 皆有穷測度。如果 φ 有二个分解：$\varphi=\varphi_s+\varphi_c=\bar{\varphi}_s+\bar{\varphi}_c$，則由于 $\varphi_s-\bar{\varphi}_s$ 是 μ 奇异的，而 $\bar{\varphi}_c-\varphi_c$ 是 μ 絕对連續的，故 $\varphi_s-\bar{\varphi}_s=\bar{\varphi}_c-\varphi_c=0$，故 $\varphi_c=\bar{\varphi}_c$，$\varphi_s=\bar{\varphi}_s$，而如果 φ 存在按定理的分解，它必是唯一的。下面来証明这样分解的存在性。

2) 設 Φ 是所有非負可积函数 f 組成的函数族，其中 f 滿足 $\int_A f\leqslant\varphi(A)$，$A\in\Omega$。$\Phi$ 非空，因 $f\equiv0\in\Phi$。$\exists\{f_n\}\subset\Phi$，使

$$\int f_n \to \sup_{f\in\Phi}\int f=\alpha\leqslant\varphi(X)<\infty.$$

設 $g_n=\sup\limits_{k\leqslant n} f_k$，所以 $0\leqslant g_n\nearrow g=\sup f_n$。令

$$A_k=\{x\,|\,g_n(x)=f_k(x)\},$$

$$B_1=A_1,\ B_k=(X\setminus A_1)\cap\cdots\cap(X\setminus A_{k-1})\cap A_k,$$

所以：$\bigcup_{k=1}^{n} B_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = X$，且对任意 $A \in \Omega$，

$$\int_A g_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{A \cap B_k} g_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{A \cap B_k} f_k \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \varphi(A \cap B_k) = \varphi(A),$$

令 $n \to \infty$，由單調收斂定理得

$$\int_A g \leqslant \varphi(A), \quad \int g = \alpha, \text{故 } g \in \Phi.$$

令 $\varphi_0(A) = \int_A g$，$\varphi_s = \varphi - \varphi_c \geqslant 0$。下面要証 φ_s 是 μ 奇异的。

3）令 $\varphi_n = \varphi_s - \frac{1}{n}\mu$，故 φ_n 是有穷 σ 可加函数，由 Hahn 分解定理，$\exists D_n$ 满足 $\varphi_n(A \cap D_n) \leqslant 0$，$\varphi_n(A \cap (X \setminus D_n)) \geqslant 0$，$A \in \Omega$ 任意。令 $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$，$(X \setminus D) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus D_n)$。故对任意 $A \in \Omega$ 与每个 n，有 $0 \leqslant \varphi_s(A \cap D) \leqslant \varphi_s(A \cap D_n) \leqslant \frac{1}{n}\mu(A \cap D_n)$，令 $n \to \infty$，因 μ 是有界的，故 $\varphi_s(A \cap D) = 0$，$\varphi_s(A) = \varphi_s(A \cap (X \setminus D))$。現在只要証 $\mu(X \setminus D) = 0$。由于

$$\varphi_c(A) = \varphi(A) - \varphi_s(A \cap (X \setminus D)) \leqslant \varphi(A) - \varphi_s(A \cap (X \setminus D_n)),$$

得
$$\int_A \left(g + \frac{1}{n}\chi_{(X \setminus D_n)}(x)\right) = \varphi_c(A) +$$

$$+ \frac{1}{n}\mu(A \cap (X \setminus D_n)) \leqslant \varphi(A) - \varphi_n(A \cap (X \setminus D_n)) \leqslant \varphi(A),$$

所以 $\mu(X \setminus D_n) = 0$。不然会發生矛盾。从而 $\mu(X \setminus D) = 0$，最后由 φ_c 的唯一性知 g 是殆遍唯一确定的。証畢。

在特殊情况下，得到下面的

定理 5. (Radon-Nikodym) 設測度μ与σ可加函数φ在Ω上σ有穷,且φ是μ絕对連續的,則φ是一个有穷可測函数f的不定积分(f殆遍唯一确定)。

綜合以上所述,得:

定理 6. 設(X, Ω, μ)是σ有穷測度空間,則集函数φ是Ω上某有穷函数f(殆遍唯一确定)的不定积分的充要条件是φ为σ有穷,σ可加和μ絕对連續。f可积的充要条件为φ有限。

系 設μ与λ是Ω上的二測度,且μ是λ絕对連續的。又設f是可測函数,$\int f d\mu$存在,則对任意$A \in \Omega$, $\int_A f d\mu = \int_A f \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda$。

証 設$f = \chi_B(x)$, $B \in \Omega$, 則

$$\int_A \chi_B(x) d\mu = \mu(A \cap B) = \int_{A \cap B} \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda = \int_A \chi_B(x) \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda.$$

因此定理成立。从而对非負單函数亦对。由單調收斂定理,当f为非負可測函数亦有上等式。因此对一般情况也对。

定理 7. 設μ是Ω上的σ有穷測度,φ—σ可加,μ絕对連續,則φ是一个可測函数f的不定积分。

証 不妨設μ为有穷測度,φ为μ絕对連續測度,命Ω_1为所有可測集組成的集族,滿足$\in \Omega_1$,

$$\exists B_n \in \Omega, n = 1, 2, \cdots, \varphi(B_n) < \infty, B_i \cap B_j = \phi, i \neq j, B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

令$S = \sup_{A \in \Omega_1} \mu(A)$, $\exists C_n \in \Omega_1$, $n = 1, 2, \cdots$, 使$\lim_{n \to \infty} \mu(C_n) = S$。所以

$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = C \in \Omega_1$, $\mu(C) = S$, 如果有$D \in \Omega \cap (X \setminus C)$, $0 < \varphi(D) < \infty$, 則由φ的μ絕对連續性$\mu(D) > 0$, 故$C \cup D \in \Omega_1$, 且$S \geqslant \mu(C \cup D) = \mu(C) + \mu(D) > s$, 因而得到矛盾。因此$\varphi$在$C \cap \Omega$上是$\sigma$有穷的,

而在 $(X\setminus C)\cap\Omega$ 上只取 0 或∞, 同时 $\mu(D)=0, \varphi(D)>0$ 与 $\varphi(D)=$ $=0, \mu(D)>0$ 都是不可能發生的，因此 $D\in\Omega\cap(X\setminus C)$, 只有可能 $\mu(D)=0, \varphi(D)=0$ 或 $\mu(D)>0, \varphi(D)=\infty$。亦即在 $\Omega\cap(X\setminus C)$上 φ 是 f 的不定积分，$f=\begin{cases}\infty, 在(X\setminus C)\\ 0, 在 C,\end{cases}$ 但在 $\Omega\cap C$ 上 φ 是有穷可測函数 g [在 C 上殆遍唯一确定而在$(X\setminus C)$上为 0]的不定积分。令 $h=f+g$, 則

$$\int_A h=\int_{A\cap C} g+\int_{A\cap(X\setminus C)} f=\varphi(A\cap C)+\varphi(A\cap(X\setminus C))=\varphi(A).$$

証畢。

習 題 一

1. 設 μ 为 R^n 內的 Lebesgue 測度，φ 为 R^n 內的非异綫性变换 $\varphi(x)=Tx+C$ (此处行列式 $\det T\neq 0, C\in R^n$)。求証

1) $\mu(\varphi(a, b])=|\det T|\cdot\mu(a, b]$。

2) $\mu^*(\varphi(A))=|\det T|, \mu^*(A)$, $(A\subset R^n)$。

3) $E\in V^\mu \longleftrightarrow \varphi(E)\in\Lambda^\mu$。

4) $\mu(\varphi(E))=|\det T|\mu(E)$, $(E\in\Lambda^\mu)$。

5) μ 对运动不变，卽設 φ 为 R^n 內的运动(保距变换)則 $\mu(\varphi(E))=\mu(E)$

6) 設 ν 为 R^n 內对位移群不变的 Lebesgue-Stieltjes 測度，則 $\nu=\alpha\mu, (\alpha\geqslant 0)$。

7) 設 $E\subset R^n$, 有界可測，$h\in R^n$ 命 $E_h=\{x\mid x+h\in E\}$, 于是 $\mu((E\setminus E_h)\cup(E_h\setminus E))\to 0, (h\to 0)$。

提示: 因矩陣 T 可以分解为初等矩陣

$$\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & \cdots & 1 & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

之积，因此变换 φ 可以分解为相应的初等齐性綫性变换以及平移变换之积，因此只需对这些簡單的变换加以証明。

2. 設在一維直綫 R^1 上取分布函数下，

$$F(x)=\begin{cases}0, & (x<0)\\ [x], & (x\geqslant 0),\end{cases}$$

$\mu=\mu_F$ 为相应的 Lebesgue-Stieltjes 測度，求証

1) R^1 內的一切集合 E 均为 μ 可測集，卽 $E\in V^\mu$, 而 $\mu(E)=\mu^*(E)=E$ 內所含正整数点的个数。

2) R^1 上的一切函数(实或复) $f(x)$ 均为 μ 可测函数。

3) $f=g$ 殆遍 $\Longleftrightarrow f(n)=g(n),(n=1,2\cdots)$。

4) $\int f d\mu=\sum_{1}^{\infty} f(n)$,

如果右端有意义

5) f 可积 $\Longleftrightarrow \sum_{\lambda=1}^{\infty}|f(n)|<\infty$。

3. 設 $f_1,\cdots,f_n$ 为 (X,Ω) 上的有穷可测函数,φ 为 (R^n,A^n) 的可測函数(这种函数叫做 R^n 上的 Borel 函数),則 $\phi(f_1,\cdots,f_n)$ 为 (X,Ω) 上的可測函数。

4. 設 (E,Ω,μ) 为测度空間,μ 为概率測度即 $\mu(E)=1$,f 为有穷实可測函数,A^1 为实直綫 R^1 上的 Borel σ-环,于是

1) 集合函数

$$\nu_{(f)}(A)=\mu\{\xi\,|\,f(\xi)\in A\},\quad (A\in \mathrm{A}^1)$$

为 (R^1,A^1) 上的 Lebesgue-Stieltjes 測度,$\nu_{(f)}(R^1)=1$,

2) 点函数

$$F(x)=\nu_{(f)}(-\infty,x]=\mu\{\xi\,|\,f(\xi)\leqslant x\},\quad (x\in R^1)$$

是 R^1 上的分布函数(即單調增,右連續),$F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$; 并它所产生的 Lebesgue-Stieltjes 測度 $\nu_F=\nu_{(f)}$,函数 $F(x)$ 叫做可測函数 $f(\xi)$ 的导来分布函数。

3) 任意滿足 $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$ 的分布函数 $F(x)$ 必定某測度空間 (E,Ω,μ) $(\mu(E)=1)$ 的某有穷实可測函数的导来分布函数。

4) 設 $g(x)$ 是 R^1 上的一个有穷 Borel 函数,因 $g(f(\xi))$ 仍为 (E,Ω,μ) 的有穷可測函数故界定測度 $\nu(g(f))$,而

$$\nu_{(g(f))}(A)=\nu_{(f)}(g^{-1}(A)),\ (A\in \mathrm{A}^1)$$

并且

$$\int_E g(f(\xi))d\mu=\int_{R^1} g(x)dF$$

(此式应了解为:如果一端有意义則另一端也有意义而兩端相等。証明时可先設 g 为單函数,然后用單調收斂定理拓至一般的 g)作为特例則有

$$\int_E f(\xi)d\mu=\int_{-\infty}^{\infty} x\,dF$$

$$\int_E (f(\xi))^k d\mu=\int_{-\infty}^{\infty} x^k dF,\ k=0,1,2,\cdots$$

$$\int_E |f(\xi)|^p d\mu=\int_{-\infty}^{\infty} |x|^p dF,\ p>0.$$

这个定理可以推广至多維的情形如下:

設 (E, Ω, μ) 为测度空間, $\mu(E)=1, f=(f_1, \cdots, f_n)$, f_i 为有穷实可测函数。Λ^n 为空間 R^n 的 Borel σ-环,于是,

1) $\nu_{(f)}(A)=\mu\{\xi \mid f(\xi)\in A\}$, $(A\in\Lambda^n)$ 为 (R^n, Λ^n) 上的Lebesgue-Stieltjes 测度, $\nu_{(f)}(R^n)=1$。

2) $F(x)=\mu(-\infty, x)=\mu\{\xi \mid f(\xi)\leqslant x\}$ $(x\in R^n)$ 为 R^n 内的分布函数, $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$ 并且 $\nu_F=\nu_{(f)}$, (我們以 $-\infty$, $+\infty$ 分别表示無穷远点 $(-\infty, \cdots, -\infty)$, $(+\infty, \cdots, +\infty)$)。

3) R^n 内任意滿足 $F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$ 的分布函数(这种分布函数叫做概率分布函数)都可以用上法导来。

4) 設 $g=(g_1, \cdots, g_m)$, $(A\in\Lambda^m)$

則

$$\nu_{(g(f))}(A)=\nu_{(f)}(\overset{-1}{g}(A)), \ (A\in\Lambda^m)$$

并且

$$\int_E g_i(f(\xi))d\mu=\int_{R^n} =g_i(x)dF, \ i=1, \cdots, m,$$

$$\int_E f_i(\xi)d\mu=\int_{R^n} x_i dF, \ i=1, \cdots, m,$$

5 設有一族空間 $\{R_t\}$, $t\in T$, $R_t=R$ (一維直綫), T 为一指标集。自然地界定笛卡兒积

$$R_T=\prod_{t\in T} R_t=\{x=(x_t) \mid x_t\in R_t, t\in T\}.$$

R_T 内的集合叫做柱形,如果它可以表为

$$\prod_{t\in N} A_t+\prod_{t\in T\setminus N} R_t=\{x \mid x_t\in A_t, t\in N\},$$

此处 N 为 T 的一个有限集 Λ_t 为直綫 R_t 的 Borel σ-环 $A_t\in\Lambda_t$, 如果相应的 A_t 为左开右閉区間, 即 $A_t\in\Gamma_t$, 則柱形叫做区間柱形。求証

1) 包含一切柱形的最小 σ-环与包含一切区間柱形的最小 σ-环一致,叫做积空間 R_T 的 Borel σ-环,記作 Λ_T。

2) 由一切柱形[区間柱形]的有穷并組成的集族为环, 因此这兩个环(分别記为 Λ_T^0, Γ_T^0)的拓展 σ-环都等于 Λ_T。

6. 設 (X, Ω, μ) 为测度空間, $\mu(X)<\infty$, f 为可测函数, Φ 为直綫 R^1 上的非負 Borel (可测)偶函数并在 $[0, +\infty]$ 上單調增,于是对任意 $\varepsilon\geqslant 0$ 求証有不等式:

$$\frac{\int \phi(f(x))d\mu-\phi(\varepsilon)\mu[(f)<\varepsilon]}{\underset{x\in X}{\operatorname{lss\ sup}}\ \phi(f(x))}\leqslant\mu[(f)\geqslant\varepsilon]\leqslant\frac{\int \phi(f(x))d\mu}{\phi(\varepsilon)}$$

作为特例，取 $\phi(\xi)=|\xi|^p(p>0)$，则得 Марков 不等式

$$\frac{\int|f|^p d\mu-\varepsilon P\mu(X)}{\operatorname*{ess\ sup}_{x\in X}|f|^p}\leqslant\mu[|f|\geqslant\varepsilon]\leqslant\frac{\int|f|^p d\mu}{\varepsilon^p}$$

更取 $r=2,\mu(X)=1$，则得 Чебышев 不等式，

$$\frac{\int|f|^2 d\mu-\varepsilon^2}{\operatorname*{ess\ sup}_{x\in X}|f|^2}\leqslant\mu[(f)\geqslant\varepsilon]\leqslant\frac{\int|f|^2 d\mu}{\varepsilon^2}.$$

7. 設 (X,Ω,μ) 为测度空間 $\mu(X)<\infty$。

求証：設 $p>0, f_n, f$ 均为有穷可积函数，则

$$\int|f_n-f|^p d\mu\longrightarrow 0\Longrightarrow f\xrightarrow{\mu}f,$$

$$f_n\text{ 殆遍一致有界}, f_n\xrightarrow{\mu}f\Longrightarrow\int|f_n-f|^p d\mu\to 0.$$

由所有有穷可测函数的等价类（殆遍相等者称为等价）所組成的空間 $S(X,\mu)$ 中引进，

$$d(f,g)=\int\frac{|f-g|}{1+|f-g|}d\mu$$

求証这样 $S(X,\mu)$ 形成一个距离空間并且

$$d(f_n,f)\longrightarrow 0\Longleftrightarrow f_n\xrightarrow{\mu}f.$$

指示，引用 Марков 不等式。

8. 設 μ 是环 Ω 上的测度，若 E 与 F 是 Ω 中任意二集，则

$$\mu(E)+\mu(F)=\mu(E\cup F)+\mu(E\cap F).$$

若 E, F 与 G 是 Ω 中任意三集，则

$$\mu(E)+\mu(F)+\mu(G)+\mu(E\cap F\cap G)=\mu(E\cup F\cup G)+\mu(E\cap F)+\mu(F\cap G)+\mu(G\cap E).$$

9. 設 X 是一个可分备距离空間，μ 是定义在 X 中 Borel $\sigma-$环（即包含 X 中所有开集的最小 $\sigma-$环）上的测度，且 $\mu(X)=1$，則 $\exists X$ 的子集 E，使 E 为可列个紧集的并集，且 $\mu(E)==1$。

10. 設 Ω^∞ 是距离空間 X 的一切子集組成的集族，μ^* 是定义在 Ω^∞ 上的外测度（即 * 單調，$\mu^*(\phi)=0$，$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n), E_n\in\Omega^\infty, n=1,2,\cdots$），如果当 $\rho(E,F)>0$ 时有 $\mu^*(E\cup F)=\mu^*(E)+\mu^*(F)$，其中 ρ 是 X 上的距离，則称 μ^* 是一个 Carathéodory 外测度。

1) 設 μ^* 是一个 Carathéodory 外测度，則每一个开集（因此每一个 Borel（集）是 μ^* 可测集。

2) 設 μ^* 是一个 Carathéodory 外测度，如果 E 是 X 中一个开集 U 的子集，且 $E_n=E\cap\left\{x\mid\rho(x,U)\geqslant\frac{1}{n}\right\}$，則

$$\lim_{n\to\infty}\mu^*(E_n)=\mu^*(E).$$

3) 設 μ^* 是定义在 Ω^∞ 上的外测度，且使每个开集是 μ^* 可測集，則 μ^* 是一 Carathéodory 外測度。

11. 設 f_n 是 σ 有穷測度空間 (X,Ω,μ) 上的一个殆遍有限可測函数列，且 $f_n\to f$ 殆遍。則存在可測集列 E_i, $i=1,2,\cdots$, 使 $\mu\left(E\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=0$, 且 $\{f_n\}$ 在每个 E_i, $i=1,2,\cdots,n$, 上一致收斂。

12. 設 μ_i, $i=1,2,\cdots$, 是 σ 环 Ω 上的一个有限測度列，則在 Ω 上存在一个測度 μ, 使所有的 μ_i, $i=1,2,\cdots$, 都是 μ 絕对連續的。

13. 設 φ_n 是 σ 环 Ω 上的 σ 可加函数，且 φ_n 在 Ω 上一致收斂到 φ, 若 $\varphi>-\infty$, 則 φ 亦为 σ 可加函数。

14. 設 f_n, f 是測度空間 (X,Ω,μ) 上的可測函数，若 $f_n\xrightarrow{\mu}f$, 則存在 $\{f_n\}$ 的一个子序列 $\{f_{nk}\}$ 殆遍收斂到 f。

15. 設 f_n, f 是測度空間 (X,Ω,μ) 上的可积函数，則 $\int|f_n-f|\longrightarrow0\Longrightarrow\int_A f_n\to\int_A f$ 对 $A\in\Omega$ 一致。

16. 設 (X,Ω,μ) 是測度空間，E 和 F 是 (X,Ω,μ) 中二集，我們用記号 $E\sim F$ 表示 $\mu(E\Delta F)=0$ ($E\Delta F=(E/F)\cup(F/E)$ 叫做 E 和 F 的对称差)。則关系"$\sim$"具有自反性对称性和傳遞性(即"$\sim$"是一个等价关系)，且当 $E\sim F\Longrightarrow\mu(E)=\mu(F)=\mu(E\cap F)$。今將滿足关系 $E\sim F$ 的二集 E 与 F 看作是相等的，則在新的相等意义下，Ω 仍是一个 σ- 环，記作 $\Omega[\mu]$，且 μ 也是 $\Omega[\mu]$ 上的測度，令 U 为 $\Omega[\mu]$ 上一切具有有限測度的集合，則 U 按距离 $\rho(E,F)==\mu(E\Delta F)$ 成为一备距离空間。

本書所用主要符号表

$\cup$, $\cap$, $\setminus$: 集的并，交，差。

$+$, Σ; $\cdot$, Π; $-$: 代数运算中的加，和；乘，积；减。

T: 一般表示算子。

$\overset{-1}{T}$: T 的逆算子。

T^*: T 的共軛算子。

$\mathfrak{D}(T)$: T 的定义域。

$\mathfrak{W}(T)$: T 的值域。

$\mathfrak{N}(T)$: T的零点集。

$E, E_0, \cdots$: 一般表示空間。

E^*: E的共軛空間。

Θ: 空間中的零元。

$\mathfrak{H}$: Hilbert 空間。

$x(t)$: 一般表示函数。

$f(x)$: 一般表示泛函数。

$\{x|P\}$: 滿足命題P規定的性質的那些元x的全体。

$\Longrightarrow$: 蘊涵。

$\Longleftrightarrow$: 等价。

$\exists$: 存在。

$\in$: 屬于。

$\notin$: 不屬于。

$\supset$: 包含。

$\subset$: 含于。

$\overline{A}$: 集A的閉包。

罗馬字母$a, b, x, y, \cdots$: 一般表示空間中的元。

希臘字母$\alpha, \beta, \cdots$: 一般表示实数或虚数。

$n, m, p, q, \cdots$: 一般表示整数。

R: 一般表示实数全体。

K: 一般表示实数或复数全体。

(α, β): 开区間(以α, β为左，右端点)

$[\alpha, \beta]$: 閉区間

$(\alpha, \beta]$: 左开右閉区間。

$[\alpha, \beta)$: 左閉右开区間。

$S(y; r)$: 以y为心r为半徑的球。

$\overline{S}(y; r)$: 以y为心r为半徑的閉球。